

区域和参数化可靠性灵敏度指标及其解法*

李宝玉^{1,2}, 张磊刚², 师 娇², 余雄庆¹

(1. 南京航空航天大学 航空宇航学院, 江苏 南京 210016; 2. 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘要:针对基于方差的全局可靠性灵敏度指标,分别提出基于方差的区域和参数化可靠性灵敏度指标,以衡量输入变量的取值区域发生变化时或输入变量的方差减小时整个输入变量系统对失效概率不确定性贡献的变化情况。然后从 Pearson 相关系数的视角分别将所提指标表述成无条件失效域指示函数与固定某一随机输入时的条件失效域指示函数之间的相关系数。在此转换的基础上,提出基于 Pearson 相关系数的两种求解方法,一种采用蒙特卡洛方法重复抽样进行循环计算,另一种借鉴重要抽样的思想。功能函数的计算样本可重复使用而不增加任何额外的计算代价,故后者大大提高了求解所提区域和参数化灵敏度指标的计算效率。算例结果验证了所提指标的合理性,同时也证明了所提方法的准确性与高效性。

关键词: Pearson 相关系数; 区域和参数灵敏度; 蒙特卡洛; 重要抽样

中图分类号: TB114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2017)02-049-08

New regional and parametric reliability sensitivities and their computational methods

LI Baoyu^{1,2}, ZHANG Leigang², SHI Jiao², YU Xiongqing¹

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: Based on the variance-based global reliability sensitivity index, new regional and parametric sensitivity indices were defined respectively to measure how the sensitivity indices of the whole inputs change when the distribution range of one input is changed or its variance is decreased. Then these two proposed indices were described by PCC (Pearson correlation coefficient) between the unconditional failure indicator and its pick-frozen replication. Based on the transformation, two methods based on PCC were proposed to compute the proposed regional and parametric sensitivity indices. One method was based on Monte Carlo method and iterating sampling, whereas the other one was based on IS (importance sampling) and reusing the samples without extra computational cost, so the computational efficiency of the second method was much higher. The feasibility of the proposed regional and parametric indices, the accuracy and high efficiency of the proposed methods were demonstrated by the results of several examples.

Key words: Pearson correlation coefficient; regional and parametric sensitivity; Monte Carlo; importance sampling

研究某系统的状态或输出响应对系统输入参数和周围条件的敏感程度称为灵敏度分析^[1],通常包括局部灵敏度分析、全局灵敏度分析和区域灵敏度分析。局部灵敏度以各输入变量取名义值时的偏导数作为其灵敏度;全局灵敏度则不同,主要用来考察输入变量在其整个取值范围内变化时对输出不确定性的影响程度,也称为重要性测度^[2];区域灵敏度则是考量输入变量在某个特定区间内对输出不确定性的影响程度^[3-4]。局部灵敏度只能反映特定点处的信息,而全局灵敏度和区域灵敏度则被用来度量某个输入变量对给定输

出的平均影响程度,因此应用更为广泛。

目前,全局灵敏度分析已经发展得比较完善,如 Helton、Davis 等提出的非参数方法(nonparametric technique)^[5], Sobol、Saltelli 等提出的基于方差的指标(variance based indices)及求解方法^[6-9], Borgonovo、Chun 和 Liu 等提出的矩独立的指标(moment independent indices)^[10-14]等。而区域灵敏度最早是 Bolado-Lavin、Castaings 和 Tarantola 等提出的,首先是基于样本均值,后来推广到样本方差^[3-4]。

近年来,基于方差的重要性指标应用广泛,首

* 收稿日期:2015-11-07

基金项目:国家部委基金资助项目(6140244010216HT15001)

作者简介:李宝玉(1984—),男,江苏连云港人,博士研究生,E-mail:li.bao.yu@163.com;

张磊刚(通信作者),男,工程师,硕士,E-mail:leigang_zhang@163.com

先由 Sobol 提出,后来 Wei 等^[14]将该指标推广到失效概率。然而,全局灵敏度不能反映输入变量不同分布区域的贡献信息,因此区域灵敏度得到了广泛研究,以反映输入变量内部区域产生变化时灵敏度指标的变化情况。发展较早的为 Bolado-Lavin 等^[3]提出的样本均值贡献(Contribution to Sample Mean, CSM)指标以及随后 Tarantola 等^[4]提出的样本方差贡献(Contribution to Sample Variance, CSV)指标。Li 等^[15]又在此基础上发展了一种基于失效概率的区域灵敏度指标。然而这种区域指标并不能反应当某输入变量的取值区域变化时,该变量对其他各个输入变量的重要度的影响。因此研究一种当输入变量不确定性改变时,能够衡量所有输入变量可靠性灵敏度变化的指标十分必要。Janon 等^[16]指出,Sobol 提出的指标可以看作是无条件输出与某一随机输入固定时的条件输出之间的 Pearson 相关系数,这为求解基于方差的灵敏度提供了一种新思路。

1 基于方差的重要性测度回顾

假设结构输出响应为 $Y, \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ 为 n 维不确定性输入变量,其联合概率密度函数(Probability Density Function, PDF)记为 $f_X(\mathbf{X})$ 。

对于独立输入变量,有 $f_X(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$,其中 $f_{X_i}(x_i)$ 为变量 X_i 的边缘概率密度函数。

目前应用较广泛的基于方差的重要性测度指标为 Sobol 指标,定义为^[7]:

$$S_i = \frac{V[E(Y|X_i)]}{V(Y)} \quad (1)$$

S_i 可反映输入不确定性对输出方差的贡献程度。类似地,Wei 等提出了式(2)中的基于失效概率的全局灵敏度指标^[15]:

$$S_i^p = \frac{V[E(I_F|X_i)]}{V(I_F)} \quad (2)$$

式中: $F = \{\mathbf{X}; g(\mathbf{X}) < 0\}$ 为失效域; $g(\mathbf{X})$ 为结构系统的功能函数,定义为规定的阈值与输出响应 Y 之间的差值; $I_F = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \notin F \end{cases}$ 为失效域指示函数。 S_i^p 值越大,代表 X_i 对失效概率 P_f 的贡献越大,减小 X_i 的不确定性引起的 P_f 的减小量也就越大^[14]。

2 区域和参数化可靠性灵敏度指标的定义

2.1 已有的区域可靠性灵敏度指标

已有的区域灵敏度指标 CSM 和 CSV 可反映输入变量不确定取值区域缩减为任一子分布区域

时其对输出响应均值和方差的贡献程度,如式(3)和式(4)所示:

$$CSM_{X_i}(q) = \frac{1}{E(Y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{F_{X_i}^{-1}(q)} g(\mathbf{X}) \prod_{j=1}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (3)$$

$$CSV_{X_i}(q) = \frac{1}{V(Y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{F_{X_i}^{-1}(q)} [g(\mathbf{X}) - E(Y)]^2 \prod_{j=1}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (4)$$

其中, $q \in [0, 1]$ 为分位数, $E(Y)$ 和 $V(Y)$ 分别为输出响应样本的均值和方差, $F_{X_i}^{-1}(q)$ 为输入变量 X_i 的逆累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)在分位数 q 处对应的值。可以看出,式(3)和式(4)对除 X_i 以外的所有输入变量均在 $[-\infty, +\infty]$ 进行积分,而对 X_i 在 $[-\infty, F_{X_i}^{-1}(q)]$ 上进行积分,两种指标性质可以参考文献[3-4]。

随后, Li 等^[15]提出了一种基于失效概率的区域灵敏度指标 CFPME(contribution to failure probability-based main effect):

$$\begin{cases} CFPME_{X_i}(q) = \\ \frac{1}{\delta_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{F_{X_i}^{-1}(q)} [E(I_F | X_i) - E(I_F)]^2 \prod_{j=1}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \\ \delta_i = V[E(I_F | X_i)] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [E(I_F | X_i) - E(I_F)]^2 \prod_{j=1}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中所提灵敏度可衡量输入 X_i 的取值区域变化对其自身重要度的影响程度,却不能同时反应其他输入变量重要度的变化趋势。

针对此,本文在 Wei 等^[14]所提灵敏度指标 S_i^p (式(2))的基础上,提出了新的区域和参数化的可靠性灵敏度指标。

2.2 新区域可靠性灵敏度指标

当某输入变量 X_k 的取值区域发生变化时(由 $[-\infty, +\infty]$ 到 $[F_k^{-1}(q_k^{(l)}), F_k^{-1}(q_k^{(u)})]$),变量 X_k 的概率密度函数 $f_{X_k}^*(x_k)$ 更新为:

$$f_{X_k}^*(x_k) = \frac{f_{X_k}(x_k)}{\int_{F_k^{-1}(q_k^{(l)})}^{F_k^{-1}(q_k^{(u)})} f_{X_k}(x_k) dx_k} = \frac{f_{X_k}(x_k)}{q_k^{(u)} - q_k^{(l)}} \quad (6)$$

其他区域有 $f_{X_k}^*(x_k) = 0$ 。因此,失效域指示函数均值和方差分别更新为:

$$E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) f_{X_k}^*(x_k) dx_k \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (7)$$

$$V[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{I_F(\mathbf{X}) - E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}]\}^2 f_{X_k}^*(x_k) dx_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (8)$$

$$V\{E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})} | X_i]\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] - E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}] \right\}^2 f_{X_i}^*(x_i) dx_i & k = i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) f_{X_k}^*(x_k) dx_k \prod_n [f_{X_j}(x_j) dx_j] - E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}] \right\}^2 f_{X_i}^*(x_i) dx_i & k \neq i \end{cases} \quad (10)$$

式(9)中的区域灵敏度指标可以给出输入变量 X_k 的取值区域缩减为 $[F_k^{-1}(q_k^{(l)}), F_k^{-1}(q_k^{(u)})]$ 时各个输入变量重要度的变化趋势。同时,式(9)中区域指标有如下性质:

- 1) $S_i^p(0, 1) = S_i^p$;
- 2) 对于任意 $q_i \in [0, 1]$, 都有 $S_i^p(q_i, q_i) = 0$ 成立。

2.3 参数化可靠性灵敏度指标

同理,考虑输入变量 X_k 的方差由 σ_k^2 减小为 $q_k \sigma_k^2 (q_k \in [0, 1])$ 时,其PDF更新为 $f_{X_k}^{**}(x_k)$ 。例如 X_k 服从正态分布时,其PDF更新为 $f_{X_k}^{**}(x_k) = \exp[-(x_k - \mu_k)^2 / 2q_k \sigma_k^2] / \sqrt{2\pi q_k} \sigma_k$ 。

失效域指示函数的均值和方差更新为:

$$E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) f_{X_k}^{**}(x_k) dx_k \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (11)$$

$$V\{E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)} | X_i]\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] - E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}] \right\}^2 f_{X_i}^{**}(x_i) dx_i & k = i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} I_F(\mathbf{X}) f_{X_k}^{**}(x_k) dx_k \prod_n [f_{X_j}(x_j) dx_j] - E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}] \right\}^2 f_{X_i}^*(x_i) dx_i & k \neq i \end{cases} \quad (14)$$

式(13)中的参数化灵敏度指标可以给出输入变量 X_k 的方差由 σ_k^2 减小为 $q_k \sigma_k^2 (q_k \in [0, 1])$ 时各个输入变量重要度的变化趋势。同时,式(13)中区域指标有如下性质:

- 1) $S_i^p(1) = S_i^p$;
- 2) $S_i^p(0) = 0$ 。

其中, $I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}$ 表示输入 X_k 的取值区域缩减为分位数 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 对应的区间 $[F_k^{-1}(q_k^{(l)}), F_k^{-1}(q_k^{(u)})]$ 时的失效域指示函数。

为了度量 X_k 取值区域发生变化时各输入变量对 $S_i^p (i = 1, 2, \dots, n)$ 的变化趋势,提出如下与式(2)对应的新区域灵敏度指标:

$$S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) = \frac{V\{E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})} | X_i]\}}{V[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}]} \quad (9)$$

其中,

$$V[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{I_F(\mathbf{X}) - E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}]\}^2 f_{X_k}^{**}(x_k) dx_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n [f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (12)$$

其中, $I_F^{(q_k \sigma_k^2)}$ 为 X_k 的方差减小为 $q_k \sigma_k^2 (q_k \in [0, 1])$ 时的失效域指示函数。

为了度量输入变量 X_k 的方差由 σ_k^2 减小为 $q_k \sigma_k^2 (q_k \in [0, 1])$ 时各个输入变量对失效概率的重要度 $S_i^p (i = 1, 2, \dots, n)$ 的变化趋势,同样提出新的参数化灵敏度指标:

$$S_i^p(q_k) = \frac{V\{E[I_F^{(q_k \sigma_k^2)} | X_i]\}}{V[I_F^{(q_k \sigma_k^2)}]} \quad (13)$$

其中,

2.4 区域与参数化可靠性灵敏度指标的区别与联系

可以看出,2.2节中的区域可靠性灵敏度指标是直接缩减输入变量的不确定性取值区域,通过分位数将输入变量的取值缩减到原始取值区域中的任一部分,而2.3节中的参数化可靠性灵敏度指标是从输入变量的方差入手,通过比例性的

方式将输入变量的方差进行缩减,从而间接地实现输入变量取值区域的缩减。两种指标采取不同的区域缩减方式,前者直接对输入变量取值区域进行缩减,因此称之为区域可靠性灵敏度指标;后者则从输入变量的分布参数着手,因此称之为参数化可靠性灵敏度指标。然而两者都是为了获取输入变量内部取值区域变化情况下的所有输入变量重要性的排序变化,均属于输入变量的区域可靠性灵敏度指标。

3 区域和参数化可靠性灵敏度指标的求解方法

3.1 区域和参数化灵敏度指标的 Pearson 相关系数转换

Janon^[16]指出,式(1)的指标中的分子(即 $V[E(Y|X_i)]$)可以表示成模型的无条件输出与固定某一输入时的条件输出之间的协方差。这个条件输出一般可以通过固定某个感兴趣的输入变量然后对其他变量随机采样得到,也就是^[16]:

$$S_i = \frac{V[E(Y|X_i)]}{V(Y)} = \frac{Cov[Y, Y^{X_i}]}{V(Y)} = \rho(Y, Y^{X_i}) \tag{15}$$

其中, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{-i} X_i$ 和 $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'_{-i} X'_i$ 为两个随机产生的独立输入变量样本矩阵, X_i 和 X'_i 分别为 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 的第 i 列, 即第 i 个变量的样本, \mathbf{X}_{-i} 和 \mathbf{X}'_{-i} 则分别为 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 的除第 i 列以外的其他输入变量样本。 $Y = f(\mathbf{X}_{-i}, X_i)$ 为无条件输出响应, $Y^{X_i} = f(\mathbf{X}'_{-i}, X'_i)$ 为固定某随机输入 X_i 时的条件输出响应。因此, 由式(15)可以发现 Sobol 基于方差的指标代表无条件输出与固定某一随机输入时的条件输出之间的 Pearson 相关系数。

类似地, 式(9)和式(13)也可以表示成相关系数的形式:

$$S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) = \frac{V\{E[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})} | X_i]\}}{V[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}]} = \frac{Cov[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}, I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) X_i}]}{V[I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}]} = \rho(I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})}, I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) X_i}) \tag{16}$$

$$S_i^p(q_k) = \frac{V\{E[I_F^{q_k \sigma_k^2} | X_i]\}}{V[I_F^{q_k \sigma_k^2}]} = \frac{Cov[I_F^{q_k \sigma_k^2}, I_F^{(q_k \sigma_k^2) X_i}]}{V[I_F^{q_k \sigma_k^2}]} = \rho(I_F^{q_k \sigma_k^2}, I_F^{(q_k \sigma_k^2) X_i}) \tag{17}$$

其中, $I_F^{(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) X_i}$ 和 $I_F^{(q_k \sigma_k^2) X_i}$ 分别代表当输入变量

X_k 的取值区域缩减为 $[F_k^{-1}(q_k^{(l)}), F_k^{-1}(q_k^{(u)})]$ 时和当输入变量 X_k 的方差减小为 $q_k \sigma_k^2$ ($q_k \in [0, 1]$) 时对应的固定随机输入 X_i 时的条件失效域指示函数。

式(16)和式(17)将所提区域与参数化可靠性灵敏度指标转化为 Pearson 相关系数的形式, 因此可以从转化后的 Pearson 相关系数的角度出发进行指标的求解。然而值得注意的是, Janon 提出的将 Sobol 指标转化为 Pearson 相关系数形式的前提是基于变量之间相互独立的情况, 因此基于 Pearson 相关系数的求解方法均只适用于输入变量相互独立的情况。本文提出两种算法, 一种采用 Monte Carlo 方法进行循环求解, 结果可作为对照解; 另一种利用重要抽样的思想来进行求解。

3.2 基于 Pearson 相关系数的 Monte Carlo 求解法

Monte Carlo 求解法的具体步骤如下所示:

1) 根据输入变量的联合 PDF $f_X(\mathbf{X})$ 产生两个 $N \times n$ 的输入样本矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} ;

2) 对输入变量 X_k , 当给定 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 时利用分位数反变换抽取 2 列 $N \times 1$ 的输入变量 X_k 的样本 K 和 R , 或者当其方差缩减为 $q_k \sigma_k^2$ 时, 抽取 2 列 $N \times 1$ 的输入变量 X_k 的样本 K 和 R ;

3) 当 $k = i$, 将矩阵 \mathbf{A} 的第 k 列替换为 K , 组合成新矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{-k} K$ 并计算失效域指示函数 $I_F^C = G(\mathbf{C}) \leq 0$; 将矩阵 \mathbf{B} 的第 k 列替换为 K , 组合成新矩阵 $\mathbf{D} = \mathbf{B}_{-k} K$ 并计算失效域指示函数 $I_F^D = G(\mathbf{D}) \leq 0$; 计算区域和参数化指标为 $S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) = \rho(I_F^C, I_F^D)$ 或 $S_i^p(q_k) = \rho(I_F^C, I_F^D)$;

4) 当 $k \neq i$, 将矩阵 \mathbf{A} 的第 k 列替换为 K , 组合成新矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{-k} K$ 并计算失效域指示函数 $I_F^C = G(\mathbf{C}) \leq 0$; 将矩阵 \mathbf{B} 的第 k 列替换为 R , 第 i 列替换为 \mathbf{A} 的第 i 列, 组合成新矩阵 $\mathbf{D} = \mathbf{B}_{-k-i} \mathbf{A}_i R$ 并计算失效域指示函数 $I_F^D = G(\mathbf{D}) \leq 0$; 计算区域和参数化指标为 $S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) = \rho(I_F^C, I_F^D)$ 或 $S_i^p(q_k) = \rho(I_F^C, I_F^D)$;

循环步骤 2 ~ 4, 直至所有给定区间 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 或给定 q_k 求解完毕。

由上述步骤可以看出, 对于每一个给定的区间, 也即步骤 2 ~ 4 每循环一次, 功能函数计算量为 $N \times (n + 1)$ 。

3.3 基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解法

基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解

法的具体步骤如下:

1) 根据 $f_X(\mathbf{X})$ 产生两个 $N \times n$ 的样本矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 计算输出 I_F^A 和 I_F^B 。

2) 对于任意输入变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 构造新矩阵 \mathbf{C}_i (将矩阵 \mathbf{B} 的第 i 列换为矩阵 \mathbf{A} 的第 i 列, 即 $\mathbf{C}_i = \mathbf{B}_{\sim i} \mathbf{A}_i$), 并计算输出 $I_F^{C_i} (i=1, 2, \dots, n)$ 。

3) 当 $k=i$, 对矩阵 \mathbf{A} 的第 k 列, 即 \mathbf{A}_k , 按照从小到大的顺序排为 \mathbf{A}'_k , 序列记为 M_k , 同时将 I_F^A 与 $I_F^{C_k}$ 按照 M_k 进行排序得到相应的 $I_F^{A'}$ 和 $I_F^{C'_k}$ 。当给定区域 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 时, 在 $I_F^{A'}$ 和 $I_F^{C'_k}$ 中选择第 $q_k^{(l)}N+1$ 个到第 $q_k^{(u)}N$ 个样本, 记为 $I_F^{A''}$ 和 $I_F^{C''_k}$; 或当其方差缩减为 $q_k\sigma_k^2$ 时, 根据 3σ 法则选择满足条件的 \mathbf{A}'_k 中样本对应的 $I_F^{A'}$ 和 $I_F^{C'_k}$ 中的样本, 分别记为 $I_F^{A''}$ 和 $I_F^{C''_k}$, 从而计算 $S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)}) = \rho(I_F^{A''}, I_F^{C''_k})$ 或者计算 $S_i^p(q_k) = \rho(I_F^{A''}, I_F^{C''_k})$ 。

4) 当 $k \neq i$, 对给定 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 时或其方差缩减为 $q_k\sigma_k^2$ 时, 计算更新后的 $f_{X_i}^*(x_i)$ 或 $f_{X_i}^{**}(x_i)$, 并计算 \mathbf{A}_k 与 \mathbf{B}_k 处的概率密度比例函数 $R_f^a = f_{X_k}^*(\mathbf{A}_k)/f_{X_k}(\mathbf{A}_k)$ 和 $R_f^b = f_{X_k}^*(\mathbf{B}_k)/f_{X_k}(\mathbf{B}_k)$ (或 $R_f^a = f_{X_k}^{**}(\mathbf{A}_k)/f_{X_k}(\mathbf{A}_k)$ 和 $R_f^b = f_{X_k}^{**}(\mathbf{B}_k)/f_{X_k}(\mathbf{B}_k)$)。根据 R_f^a 与 R_f^b 计算出给定 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 时或其方差缩减为 $q_k\sigma_k^2$ 时的失效域指示函数的无条件均值与方差为 $E_{I_F^*}^a = E[I_F^a R_f^a]$ 和 $V_{I_F^*}^a = E[R_f^a (I_F^a - E_{I_F^*}^a)^2]$, 从而计算出新的指标 $S_i^p(q_k^{(l)}, q_k^{(u)})$ 或 $S_i^p(q_k)$ 为 $\rho(R_f^a I_F^a, R_f^b I_F^b) \cdot \sqrt{V(R_f^a I_F^a) \cdot V(R_f^b I_F^b)} / V_{I_F^*}^a$ 。

5) 循环步骤 3~4, 直至所有给定区间 $[q_k^{(l)}, q_k^{(u)}]$ 或给定 q_k 求解完毕。

基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解法对所有区域的和参数化的灵敏度指标求解, 总共只需要 $N \times (n+1)$ 次模型计算量。

4 算例验证

4.1 Ishigami 测试函数

Ishigami 函数是一个高度非线性的显式非可加计算模型^[17], 被广泛应用于验证各类灵敏度分析方法, 其函数表达式为

$$g = \sin X_1 + 5 \sin^2 X_2 + 0.1 X_3^4 \sin X_1$$

其中, 三个输入变量 $X_i (i=1, 2, 3)$ 相互独立, 且均服从均匀分布 $U(-\pi, \pi)$ 。将所提的区域灵敏度指标应用于本算例, 以获得输入变量不同取值

区域对所有输入重要性排序的影响。

考虑将输入变量 X_k 的分布区间对称缩减, 即分位数区间为 $[q_k, 1-q_k]$ 时 ($q_k \in [0, 0.5]$) 各输入变量对失效概率重要度的变化曲线。图 1~2 分别给出了基于 Pearson 相关系数的两种求解方法对应的结果, 取 $N=10^4$ 。将第一种 Monte Carlo 法求解的结果作为对照解, 通过图 2 与图 1 结果的对比, 证明了基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解法的合理性和有效性, 其在保证精度的同时大大提升了计算效率, 减少了模型计算量。

结合式(9)的性质 1 可知, 区间未缩减时, 即图 1~2 中 $q_i=0$ 时曲线与纵轴的交点即为 S_i^p 的值, 由图可读出 $S_1^p=0.2994$, $S_2^p=0.1651$, $S_3^p=0.0676$, 也即 X_1 的整体不确定性对结构失效概率的贡献最大, X_3 最小。由图 1~2 可以看出, 当输入变量 X_1 的分位数 $q_1 > 0.2$ 时, 变量 X_1 和 X_3 的重要度开始下降, 而变量 X_2 的重要度开始逐渐上升; 在约 $0 < q_1 < 0.37$ 之间, 三个输入变量的重要性排序并没有发生变化, 而在 $q_1 > 0.37$ 之后, 三者的重要性排序与区间未缩减时的排序相比已然发生了变化。同时, 可以看出当 q_1 逐渐靠近 0.5, 即 X_1 接近固定于 0 点处时, X_1 和 X_3 的重要度将会为 0, 这从功能函数的表达式也可以看出, 从而也说明了所给曲线的合理性。当输入变量 X_2 的分位数 $q_2 > 0.2$ 时, X_1 的重要度大幅提高, 而 X_2 和 X_3 的重要度渐趋于 0。同时在 q_2 从 0 变化到 0.5 时, 三个输入变量的重要性排序始终与区间未缩减时排序保持一致。而当输入变量 X_3 的分布区间开始对称缩减时, X_2 的重要度逐渐升高, 而 X_1 和 X_3 的重要度逐渐减小。在 $q_3 > 0.08$ 时, 三个输入变量的重要性排序已经开始发生变化。而当 $q_3 > 0.3$ 时, 可以看出三个输入变量的重要度已经基本趋于稳定, 继续缩减 X_3 的分布区间对其并无影响。

另外, 可以看出, 随着三个输入变量分布区间的缩减, 各个输入变量的重要性指标的变化曲线并非是非线性单调的。

本算例中, 考虑 $q \in [0, 0.48]$, 每间隔 0.03 取值, 因此对于 Monte Carlo 方法, 计算成本为 $10^4 \times (3+1) \times 17$, 而重要抽样单层求解方法的计算成本仅为 $10^4 \times (3+1)$, 很大程度地减少了计算量, 从而很好地验证了该方法的高效性和精确性。

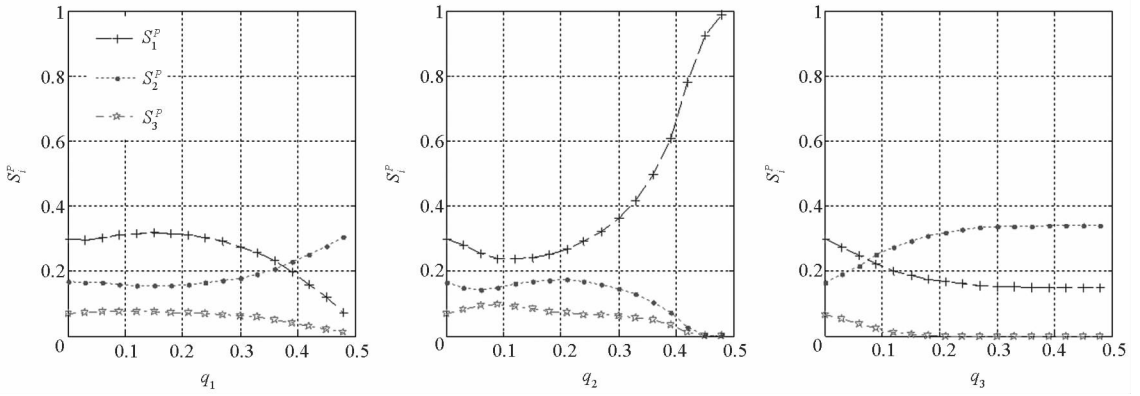


图 1 Ishigami 测试函数基于 Pearson 相关系数的 Monte Carlo 求解法结果

Fig. 1 Results of Monte Carlo method based on Pearson correlation of Ishigami test function

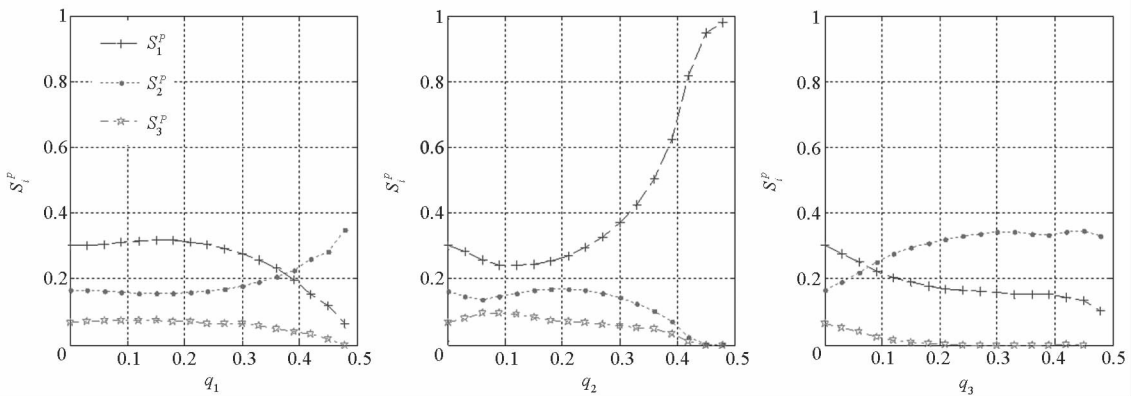


图 2 Ishigami 测试函数基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解法结果

Fig. 2 Results of single importance sampling method based on Pearson correlation of Ishigami test function

4.2 复合材料悬臂梁结构

如图 3 所示铺层的复合材料悬臂梁结构,其承受外载荷 F_0 作用。根据复合材料力学可求得其自由端的位移 δ_{Tip} 为:

$$\delta_{\text{Tip}} = \frac{F_0 L^3}{2h^3} \left[\frac{E_L^2 - 4G_{LT}E_T v_{LT}^2 + E_L(E_T + 4G_{LT} + 2E_T v_{LT})}{E_L G_{LT}(E_L + E_T + 2E_T v_{LT})} \right]$$

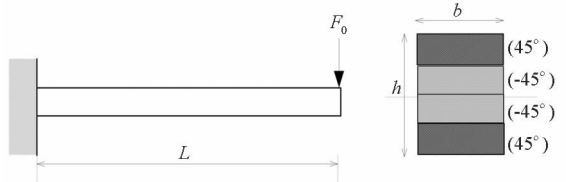


图 3 复合材料悬臂梁结构

Fig. 3 Composite cantilever beam structure model

现以其自由端位移不超过 9.6 cm 构建结构的功能函数,即 $g = 9.6 - \delta_{\text{Tip}}$ 。其中 h, L 和 F_0 分别为悬臂梁的高度、长度和单位宽度上的载荷。 G_{LT} 为剪切模量, v_{LT} 是泊松比, E_L 和 E_T 分别是纵向和横向的杨氏模量。它们均服从独立正态分布,其分布参数如表 1 所示。本算例考虑将所提的参数化灵敏度指标应用于该结构,以获得输入变量方差变化

对所有输入重要性排序的影响程度。

在此考虑将输入变量 X_k 的方差由 σ_k^2 变化为 $q_k \sigma_k^2$ 时 ($q_k \in [0, 1]$), 各输入变量对失效概率重要度的变化情况。通过计算, v_{LT}, E_L 和 E_T 的重要性几乎为 0, 且减小它们的方差并不会对其他变量的重要性产生影响, 因此本算例中仅仅给出了四个重要变量, 即 h, L, F_0 和 G_{LT} 的参数化灵敏度指标曲线, 两种算法的结果如图 4 ~ 5 所示, 可以看出两种方法所得结果吻合得非常好。

表 1 复合材料悬臂梁结构随机基本变量分布参数

Tab. 1 Distribution parameters of random variables of composite cantilever beam structure

随机变量	分布类型	均值	标准差
h/cm	正态	3.81	0.381
L/cm	正态	50.8	5.08
$F_0/(\text{kN/m})$	正态	350	35
G_{LT}/GPa	正态	9.38	0.938
v_{LT}	正态	0.036	0.003 6
E_L/GPa	正态	173	17.3
E_T/GPa	正态	33.1	3.31

由图4~5可以看出,初始情况下, h 和 L 的重要性最高,因此本算例重点考虑它们的重要性变化走势。由图可知,当变量 h 的方差由 σ_h^2 逐渐缩减为0时,它的重要性 S_h^P 基本呈线性减小的趋势,而变量 L 的重要性 S_L^P 则以越来越快的速度增长,当方差减小到原方差70%左右时,二者的重要性排序开始发生变化。而当变量 L 的方差由 σ_L^2 逐渐缩减为0时,它的重要性基本呈线性减小,而变量 h 的重要性 S_h^P 则是逐步增大,然而在此过程中,两者的重要性排序始终与分布区间缩减前一致。此外,变量 F_0 和 G_{LT} 的重要性在四个

重要变量方差缩减的过程中几乎保持不变,图中 F_0 和 G_{LT} 的两条重要性曲线始终都基本重合且重要性值非常小,故可以将其重要性忽略。因此在该工程算例中,应重点关注 h 和 L 两个重要的变量,通过研究它们的方差缩减情况对重要性排序的影响,为工程实际提供指导信息。

此例中考虑 $q \in [0.05, 1]$,每间隔0.05取值, $N = 10^4$,因此对于Monte Carlo方法,计算成本为 $10^4 \times (7 + 1) \times 20$,而对于单层求解方法,计算成本仅为 $10^4 \times (7 + 1)$,再次证明了单层方法的高效性和精确性。

5 结论

在基于方差的全局可靠性灵敏度的基础上,提出了区域和参数化的可靠性灵敏度指标,用来衡量某一输入变量的取值区域缩减或方差减小时整个输入变量系统对结构系统失效概率的重要度的变化情况。为了方便求解,将所提指标转化为Pearson相关系数描述的形式,进而提出了基于Pearson相关系数的Monte Carlo方法和重要抽样单层求解方法。Monte Carlo方法计算样本量大,所得结果可作为参照解。单层求解法能在保证计算精度的前提下大大提高计算效率。通过数值算例与工程算例,证实了所提指标的有效性及其合理性,也证明了所提方法的高精度与高效率。

输入变量相互独立情况下,所提区域及参数化可靠性灵敏度指标能够给出整个输入变量系统重要性随各个输入变量分位数变化的曲线图,而且包含了已有的全局可靠性灵敏度信息。通过调节变量的取值区域或方差大小,就可以获取整个输入变量系统的重要性变化情况,从而可以有根据地开展有效的调节措施,为结构安全及优化设计提供有效指导。

参考文献 (References)

- [1] Castillo E, Minguéz R, Castillo C. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(12): 1788 - 1800.
- [2] Sankaraman S, Mahadevan S. Likelihood-based representation of epistemic uncertainty due to sparse point data and/or interval data [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96(7): 814 - 824.
- [3] Bolado-Lavin R, Castaings W, Tarantola S. Contribution to the sample mean plot for graphical and numerical sensitivity analysis [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2009, 94(6): 1041 - 1049.
- [4] Tarantola S, Kopustinskas V, Bolado-Lavin R, et al. Sensitivity analysis using contribution to sample variance plot;

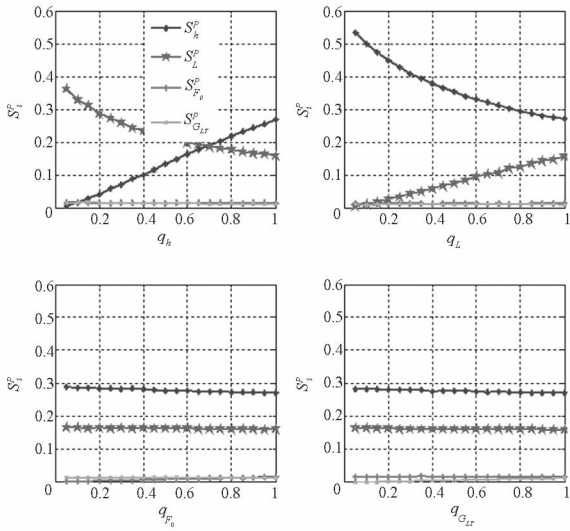


图4 复合材料悬臂梁结构基于 Pearson 相关系数的 Monte Carlo 求解法结果

Fig. 4 Results of Monte Carlo method based on Pearson correlation of composite cantilever beam structure

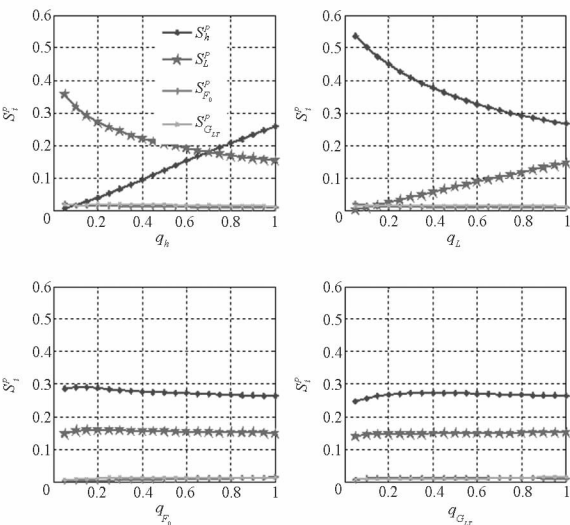


图5 复合材料悬臂梁结构基于 Pearson 相关系数的重要抽样单层求解法结果

Fig.5 Results of single importance sampling method based on Pearson correlation of composite cantilever beam structure

- application to a water hammer model [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2012, 99(1): 62 - 73.
- [5] Helton J C, Davis F J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003, 81(1): 23 - 69.
- [6] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 55(1/2/3): 271 - 280.
- [7] Saltelli A. Sensitivity analysis for importance assessment [J]. *Risk Analysis*, 2002, 22(3): 579 - 590.
- [8] Sanseverino C M R, Ramirez-Marquez J E. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in system reliability assessment via unscented transformation [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 132(8): 176 - 185.
- [9] 吴丹清, 吕震宙, 胡吉祥. 多项式输出中相关变量的结构贡献和相关贡献分析 [J]. *国防科技大学学报*, 2014, 36(5): 26 - 32.
- WU Danqing, LYU Zhenzhou, HU Jixiang. Analysis of structural and correlative contributions by correlated variables in polynomial output [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2014, 36(5): 26 - 32. (in Chinese)
- [10] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771 - 784.
- [11] Chun M H, Han S J, Tak N I. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2000, 70(3): 313 - 321.
- [12] Liu H B, Chen W, Sudjianto A. Relative entropy based method for probabilistic sensitivity analysis in engineering design [J]. *Journal of Mechanical Design ASME*, 2006, 128(3): 326 - 333.
- [13] Zhang L G, Lu Z Z, Cheng L, et al. A new method for evaluating Borgonovo moment independent importance measure with its application in an aircraft structure [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 132(8): 163 - 175.
- [14] Wei P F, Lu Z Z, Hao W R, et al. Efficient sampling methods for global reliability analysis [J]. *Computer Physics Communications*, 2012, 183(8): 1728 - 1743.
- [15] Li L Y, Lu Z Z. Regional importance effect analysis of the input variables on failure probability and its state dependent parameters approach [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2013, 66(10): 2075 - 2091.
- [16] Janon A, Klein T, Lagnoux A, et al. Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators [J]. *ESAIM: Probability and Statistics*, 2014, 18: 342 - 364.
- [17] Storlie C B, Swiler L P, Helton J C, et al. Implementation and evaluation of nonparametric regression procedures for sensitivity analysis of computationally demanding models [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, 94(11): 1735 - 1763.