

低错误平层数列分割移位低密度奇偶校验码构造算法*

雷菁¹,董乐^{1,2},李二保¹

(1. 国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073;
2. 中国电子科技集团公司第二十九研究所,四川成都 610036)

摘要:为降低LDPC(低密度奇偶校验码)码错误平层,提出一种基于环分类搜索的APPS-LDPC(数列分割移位的LDPC)码构造算法。该算法具有码长、码率和列重的任意可设性,同时该类码的Tanner图围长至少为8。循环移位因子可以通过简单的代数表达式描述,从而降低内存需求。仿真结果表明,当误码率达到 10^{-5} 时,APPS-LDPC码(496,248)相对于PEG-LDPC(渐进边增长LDPC)码获得了约1.9 dB的性能提升;随着信噪比的升高,两条译码性能曲线之间的差距将更大。此外,列重为3的APPS-LDPC码(6144,5376)在信噪比4.6 dB以后并未出现明显的错误平层。该构造算法与PS-LDPC码相比,在误码率达到 10^{-8} 时大约获得0.25 dB增益;与围长为4和6的PEG构造算法相比,在错误平层区域其译码性能极优;同时相较于此两者,其构造复杂度和耗时也展现出一定优势。通过基于Tanner图的诱捕集分析方法,统计APPS-LDPC码(496,248)中由8环组成的部分小型诱捕集并不存在,从而证明了其错误平层降低的原因。

关键词:准循环低密度奇偶校验码;错误平层;诱捕集;环结构;围长;数列分割移位
中图分类号:TN911 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2017)02-107-07

Construction algorithm of APPS-LDPC codes with low error floor

LEI Jing¹, DONG Le^{1,2}, LI Erbao¹

(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. The 29th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Chengdu 610036, China)

Abstract: In order to lower the error floor of LDPC (low-density parity-check) codes, a new class of APPS-LDPC (arithmetic progression and partition shift LDPC) codes was proposed. The APPS-LDPC codes are based on cycle path description theory with arbitrary code length, code rate, column weight. The girth of their Tanner graph is at least eight. Cyclic shift coefficients can be described in simple analytic expressions to reduce required memory usage. The simulation results show that the proposed APPS-LDPC code (496,248) gets a coding gain of 1.9 dB at least compared to the PEG-LDPC (progressive edge-growth LDPC) code at BER (bit error rate) 10^{-5} . And at high signal to noise ratio region, the gap between two decoding curve increases gradually. Besides, APPS-LDPC code (6144, 5376) whose column degree is 3 gets a coding gain of 0.25 dB at least compared to the PS-LDPC code at BER 10^{-8} , and there's no obvious error floor phenomenon when the signal to noise is above 4.6 dB. The performance of the proposed algorithm also outperforms the 4-girth or the 6-girth PEG-based LDPC codes, especially in error floor region. The time-consuming and complexity for constructing an APPS-LDPC code also show some advantages over PS-LDPC code and PEG-LDPC code. And through trapping sets searching method based on Tanner graph, there is no small trapping set composed by cycle 8 in (496,248) APPS-LDPC code, which demonstrates the reduction of the error floor.

Key words: quasi-cyclic low-density parity-check codes; error floor; trapping sets; cycles; girth; arithmetic progression and partition shift

低密度奇偶校验(Low-Density Parity-Check, LDPC)^[1]码以其接近香农限的优异性能,被广泛应用于现代通信系统。随着对LDPC码的构造、编译码算法、性能结构分析等研究的不断深入,人们发现在LDPC码的Tanner图中普遍存在短环及诱捕集结构^[2]。这些由变量节点组成的特殊结构将严重影响LDPC码的译码性能,导致错误平

层现象的出现,从而限制了LDPC码在误码率(Bit Error Rate, BER)要求极低的通信系统中的应用。因此,从分析LDPC码译码性能的影响因素及特殊结构角度出发,研究有效的LDPC码构造算法、译码方法以降低错误平层成为一种新的思路。LDPC码的构造方法主要有两种:一种是随机结构的,由基于某些规则的计算机搜索方法

* 收稿日期:2015-09-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61372098,61501479)

作者简介:雷菁(1968—),女,陕西西安人,教授,博士,硕士生导师,E-mail:leijing@nudt.edu.cn

生成;另一种是代数结构的,利用代数理论进行构造。

从构造角度来看,一种常用的提高 LDPC 码性能的方法是,优化 LDPC 码围长、环与诱捕集分布等影响译码性能的因素,规避那些可能会引起译码陷入错误的 Tanner 图子结构,从而达到提高 LDPC 码性能、降低错误平层的效果。Lu 等描述了一种结构规则化的 LDPC 码:大围长 PS-LDPC 码^[3](partition-and-shift LDPC codes)。该方法通过 $2k$ 环存在定理控制移位值参数,避免一些对 LDPC 码性能有影响的环结构出现。然而在构造围长更大的 PS-LDPC 码时,扩展系数一定则基矩阵行列大小的灵活性可能降低。在此基础上,学者们给出了一种实用型移位 LDPC 码^[4]构造方法。通过围长优化,这类 LDPC 码的性能表现可与随机构造的 LDPC 码相媲美。更重要的是,它不仅更适合于高速译码器实现,而且当采用常见的并行译码器结构时可以节省至少 50% 的内存空间。

此外张轶等^[5]利用等差数列构造大围长准循环低密度奇偶校验(Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check, QC-LDPC)码,詹伟等^[6]研究利用斐波那契数列构造 QC-LDPC 码的方法。朱磊基等^[7]利用大衍数列研究 QC-LDPC 码的构造。该类方法简单可行但其基矩阵大小和行重列重分布具有一定限制性,从而码长码率的设计灵活性降低。这在一定程度上限制了利用代数数列构造 LDPC 码的实际应用。

在追求和研究性能优异、结构简单的实用型 LDPC 码构造方法的同时,如何更恰当地设计和优化基矩阵、码长、码率、度分布、环分布、诱捕集等影响 LDPC 码性能的因素,仍然面临多重挑战。因此,本文在分析和研究代数构造理论和 PS-LDPC 码的基础上,给出了低错误平层数列分割移位的 LDPC (Arithmetic Progression and Partition Shift LDPC, APPS-LDPC)码构造方法。该方法不仅在性能表现上优于相同码率码长的渐进边增长(Progressive Edge-Growth, PEG)构造算法^[8]和 PS-LDPC 码^[3],而且在码长、码率、度分布等方面具有更大的灵活性。

1 LDPC 码短环分类方法及诱捕集

1.1 QC-LDPC 码基本定义

QC-LDPC 码记作 $C(p, m, n)$,可以用一个大小为 $mp \times np$ 的一致校验矩阵 H 来表示。其中 $n \times p$ 表示码长, $m \times p$ 为 QC-LDPC 码中校验节点的个数, p 为循环置换矩阵的大小,即扩展系数。

循环置换矩阵是一个单位对角阵 $I(p \times p)$ ^[9]。

此外,LDPC 码还可以用 Tanner 图的形式表示,Tanner 图是一种由节点集合和边集合组成的二分图^[2]。节点集合记作 V ,它包含两种类型的节点: n 个变量节点记作 $V_v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, m 个校验节点记作 $V_c = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 。LDPC 码列的度分布与行的度分布可分别记作 d_v 和 d_c 。本文考虑度分布均匀即规则 LDPC 码的情况。

在 Tanner 图中,定义长度为 $2k$ 的环结构,它是连接校验节点和变量节点且不重复经过同一节点的闭合路径,其起始点和结束点均位于同一节点,经过边的数目称为该环的长度。Tanner 图中最短环的长度称为该 Tanner 图的围长。Tanner 图中短环的存在会严重影响 LDPC 码的瀑布区的译码性能,而相互重叠的短环又构成了一类称为诱捕集的结构,诱捕集是导致错误平层出现的重要因素。因此消除环结构或增大围长,是目前提高 LDPC 码译码性能的重要研究方向。码长较长的随机构造码在瀑布区性能要优于代数结构的码,而代数结构构造的码通常具有循环码或准循环码特性,编码复杂度低。因而本文提出了基节点环结构的数列分割移位 LDPC 码短环分类方法。

1.2 数列分割移位 LDPC 码的短环分类方法

本文提出一种基于环路径分类的数列分割移位的 LDPC (APPS-LDPC)码的构造算法,来构造性能优、应用范围更广的大围长 LDPC 码。该算法采用的短环结构分类方法,可以快速有效地遍历搜索经过某一节点的所有短环。短环分类是根据 QC-LDPC 码中移位矩阵元素(节点)构成块环的不同形式,以基节点类型的不同来划分环结构的。

已知 QC-LDPC 码的一致校验矩阵 H 可以由基矩阵和移位矩阵描述^[3,10],本文对短环的分类是依据其移位矩阵特点进行的。

定义 S 是一个大小为 $m \times n$ 的移位矩阵^[3],如图 1 所示, S 中包含一个环长为 6 的块环路径, $S_{i,j}$ 为循环置换矩阵的移位系数。

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & S_{1,n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & S_{2,n} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & \dots & S_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m,1} & S_{m,2} & S_{m,3} & \dots & S_{m,n} \end{bmatrix}$$

图 1 移位矩阵 S 中的 6 环

Fig. 1 A cycle-6 path in shift matrix S

定义奇偶校验矩阵中存在一个短环路径,在该路径包含的所有节点中排布于 a, b, c 三行和 d, e, f 三列,其中 $a < b < c; d < e < f$ 。位于 c 行 f 列的点为 I 型基节点;位于 c 行 e 列的点为 II 型基节点;位于 c 行 d 列的点为 III 型基节点。

例如在图 1 中用虚线所示的闭合路径,规定这条路径的 6 个顶点遵循 $S_{3,3} \rightarrow S_{3,2} \rightarrow S_{2,2} \rightarrow S_{2,1} \rightarrow S_{1,1} \rightarrow S_{1,3}$ 的顺序,将 $S_{3,3}$ 作为固定起始点。很明显该闭合路径包含六条边,它构成了一个长度为 6 的环。在分析 LDPC 码的环结构种类时发现,长度为 4 的环仅有 1 种结构,6 环有 6 种结构,8 环有 72 种结构。根据环结构的分析,一般而言,可以按照基节点行列位置的不同进行短环分类。短环路径分类理论的关键是选取基节点作为 $2k$ 环路径的起始节点。若将一致校验矩阵按行列坐标编号,则在校验矩阵中基节点的选取规则为:先选取环在校验矩阵中最大行位置坐标,再从最大行位置的两个节点中选取具有最大列位置的节点作为基节点。若将校验节点按自上到下和变量节点按从左到右顺序编号,对应到 Tanner 图中的环,基节点即为连接最大校验节点和最大变量节点的一条边。如图 2 和图 3 所示,空心点即为 6 环中的基节点,按照不同的基节点的短环分类理论,这 6 种结构的 6 环可分为两种类型,一种是基节点位于环中最大行和最大列,另一种的基节点位于最大行但非最大列。

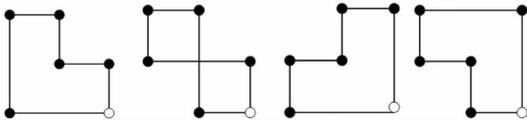


图 2 I 型基节点的 4 种 6 环结构

Fig. 2 Cycle-6 constructs of basic node type 1

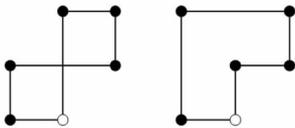


图 3 II 型基节点的两 种 6 环结构

Fig. 3 Cycle-6 constructs of basic node type 2

因此在 APPS-LDPC 码中,将 6 环的路径简化为两种序列形式。I 型基节点(即行数列数均最大)的六环路径顺序: $\{S_{i,j} \rightarrow S_{i,j-y} \rightarrow S_{i-x,j-y} \rightarrow S_{i-x,j-t} \rightarrow S_{i-r,j-t} \rightarrow S_{i-r,j}\}$ ($x, r = 0, \dots, i-1; y, t = 0, \dots, j-1$)。II 型基节点(即行数最大而列数非最大)的六环路径顺序: $\{S_{i,j} \rightarrow S_{i,j-y} \rightarrow S_{i-x,j-y} \rightarrow S_{i-x,j+t} \rightarrow S_{i-r,j+t} \rightarrow S_{i-r,j}\}$ ($x, r = 0, \dots, i-1; y = 0, \dots, j-1; t = 0, \dots, dc-j-1$)。

不同长度短环按基节点分类方法的环结构数目统计如表 1 所示。同一环长的环会有很多不同的表现形式,例如长度为 6 的环就有如图 2 和图 3 的不同具体结构,而本文以基节点类型进行划分,涵盖了各种环结构,更重要的是,同一类的环路径搜索方式一致,这样就简化了环长搜索的数量,从而实现快速有效的短环搜索。长度为 8 的环可按行列位置不同分为 3 类。3 种结构类型的 8 环与基节点的类型定义中给出的描述对应, I 型 8 环——基节点位于 c 行 f 列; II 型 8 环——基节点位于 c 行 e 列; III 型 8 环——基节点位于 c 行 d 列。

表 1 基节点分类方法的环结构数目统计

Tab. 1 Cycle amount of basic nodes classification method

| 环长 | I 型基节点 | II 型基节点 | III 型基节点 |
|----|--------|---------|----------|
| 4 | 1 种结构 | × | × |
| 6 | 4 种结构 | 2 种结构 | × |
| 8 | 37 种结构 | 24 种结构 | 11 种结构 |

1.3 数列分割移位 LDPC 码的诱捕集结构

诱捕集是一类具有特殊结构的变量节点的集合^[11]。一个 (a, b) 型诱捕集 $T(a, b)$ 表示该集合中存在 a 个错误的变量节点,且由这 a 个变量节点引出的子图中包含 b 个奇度数校验节点。诱捕集不可避免地由一个或多个相互重叠的短环构成。如图 4 中的 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 构成了一个 $(5, 3)$ 诱捕集。

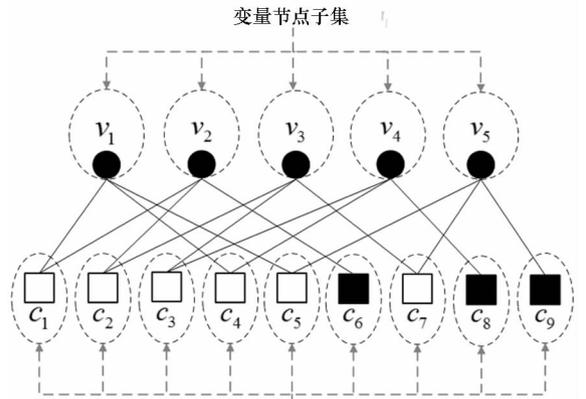


图 4 (5,3) 诱捕集

Fig. 4 (5,3) trapping set

以 ● 表示变量节点, ■ 表示诱捕集子图中的奇度数校验节点。虚线圈表示具有同一移位系数的变量节点或者校验节点子集。变量节点子集 V_{ij} 对应移位系数 $S_{i,j}$ 的行坐标 j , 校验节点子集 V_{ci} 对应移位系数 $S_{i,j}$ 的列坐标 i 。与位于同一校验节

点子集 V_{e_i} 中的校验节点相连的变量节点也位于同一变量节点子集 V_{v_j} , 它们共同的移位系数为 $S_{i,j}$ 。

许多学者已经证明^[10,12], 变量节点通过短环相互联系, 将破坏 LDPC 码消息传递译码机制中的独立性假设, 使得在迭代过程中这些变量节点频繁地给自己传递正反馈信息, 以致抗干扰能力降低, 译码输出无法收敛到一个最优的译码结果。与单环相比, 不同的环通过共同的节点相互连接组合, 扩大了错误消息的传播范围, 加剧了短环内节点消息的错误偏离, 使得译码更加不充分。因此诱捕集会对 LDPC 码的译码性能产生不利的影 响, 特别是在错误平层区域。

2 数列分割移位 LDPC 码构造算法

2.1 算法原理

在分析和研究代数构造理论和 PS-LDPC 码的基础上, 给出两种不同结构的低错误平层数列分割移位 LDPC 码的构造方法。以下将给出数列分割移位 LDPC 码构造方法的基本原理。分割移位构造思想的关键是 Tanner 图中的短环与移位值参数的关系。

定理(2k - 环) 在 PS-LDPC 码的 Tanner 图中存在至少一个 2k 环的充分条件是, 当且仅当在移位矩阵 S 中存在一个长度为 2k 的闭合路径, 且其 2k 个顶点 $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2}, \dots, S_{\alpha_{2k}, \beta_{2k}}$ 满足移位条件^[3] $\bigoplus_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} S_{\alpha_i, \beta_i} = 0 \pmod{p}$ 。其中,

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} S_{\alpha_i, \beta_i} = S_{\alpha_1, \beta_1} \oplus_p (-S_{\alpha_2, \beta_2}) \oplus_p \dots \\ &\oplus_p S_{\alpha_{2d-1}, \beta_{2d-1}} \oplus_p (-S_{\alpha_{2d}, \beta_{2d}}) \oplus_p \dots \\ &\oplus_p S_{\alpha_{2k-1}, \beta_{2k-1}} \oplus_p (-S_{\alpha_{2k}, \beta_{2k}}) \end{aligned} \quad (1)$$

学者已给出详细的移位条件的证明^[13]。本文所提出的数列分割移位构造方法与 PS-LDPC 码不同之处在于, 它按移位参数的设计方法不同将移位矩阵 S 分块。这样移位矩阵被分为数列部分 S_{AP} 和分割部分 S_{PS} 。

移位矩阵的前两行为数列移位矩阵 S_{AP} , 它是一个大小为 $2 \times n$ 的非负矩阵, 定义如图 5 所示。

$$S_{AP} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & S_{1,n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & S_{2,n} \end{bmatrix}$$

图 5 移位矩阵 S 的数列部分 S_{AP}

Fig. 5 S_{AP} matrix of shift matrix S

推论 构造一个大小为 $2 \times n$ 的数列移位矩阵 S_{AP} , 若数列移位矩阵中每行移位系数之间的

大小关系及初始值的设置满足式(2)、式(3)给出的条件, 那么在数列移位矩阵 S_{AP} 及其对应的扩展数列奇偶校验矩阵 H_{AP} 中则不包含短环^[5,14-15]。

$$\begin{cases} 0 \leq S_{1,1} \leq S_{1,2} \leq \dots \leq S_{1,n} \leq p-1 \\ p-1 \geq S_{2,1} > S_{2,2} > \dots > S_{2,j} \geq 0 \\ \text{if } j < n, S_{2,j+1} \leq 0, \text{ then } S_{2,j+1} = 0 \\ \begin{cases} S_{1,j} = S_{1,1} + (j-1)d_1, 1 \leq j \leq n \\ S_{2,j} = S_{2,j-1} - d_{2,j}, 1 \leq j \leq n \\ d_{2,j} = d_{2,1} + j - 1 \\ \min\{d_{2,1}, d_{2,2}, \dots, d_{2,n}\} > d_1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} S_{1,j} = S_{1,1} + (j-1)d_1, 1 \leq j \leq n \\ S_{2,j} = S_{2,j-1} - d_{2,j}, 1 \leq j \leq n \\ d_{2,j} = d_{2,1} + j - 1 \\ \min\{d_{2,1}, d_{2,2}, \dots, d_{2,n}\} > d_1 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中, d_1 是数列移位矩阵 S_{AP} 第一行等差数列的公差, $d_{2,j}$ 是数列移位矩阵 S_{AP} 第二行等差数列相邻两项 $S_{2,j}$ 和 $S_{2,j-1}$ 之差。

根据 $2k -$ 环定理, 从基节点 $S_{i,j}$ 开始沿着环路径顺序, 依次交替地加减移位系数, 最后回到 $S_{i,j}$ 。因此移位矩阵的前两行按不同公差的递增或递减数列赋值, 是为了保证当环路中存在由数列部分的节点构成的路径时, 经 $2k -$ 环定理运算结果不为 0, 即该路径短环不存在。

数列移位矩阵 S_{AP} 是移位矩阵 S 的前两行, 因此不包含环长大于 4 的环, 依照本文提出的方法构造的数列移位矩阵又可以至少规避 4 环^[16-17]。算法的另一个关键步骤是初始值 $S_{1,1}, S_{2,1}, d_1$ 和 $d_{2,1}$ 的选取问题。本文中选取的 LDPC 码初始值参数如表 2 所示。一般按照构造两行单调性不同的递增(递减)数列来设置每行的首项和公差, 其中最大项不大于扩展系数 p 。

表 2 数列移位矩阵构造初始值设置

Tab.2 Value of initial parameters in arithmetic progression shift matrix

| 初始值 | p | $S_{1,1}$ | $S_{2,1}$ | d_1 | $d_{2,1}$ |
|--------------------------|-----|-----------|-----------|-------|-----------|
| APPS-LDPC (496,248) | 62 | 0 | $p-1=61$ | 0 | 1 |
| APPS-LDPC (6144,5376) | 256 | 1 | $p-1=255$ | 1 | 2 |

2.2 算法描述

数列分割移位的 LDPC 码的构造算法根据移位参数设计方法不同, 将移位矩阵 S 分块成数列部分和分割部分。数列部分根据公式直接给出。分割部分按照短环路径分类的简化路径进行遍历搜索。以基节点为起始节点, 搜索已添加的所有移位系数节点是否满足 $2k -$ 环定理, 控制围长最

终获得目标矩阵。

给定一个 (p, m, n) APPS-LDPC 码,其中 p 为循环置换矩阵的大小, m 为 LDPC 码的移位矩阵行数, n 为移位矩阵列数。采用本文提出的数列分割移位构造算法可构造出多种码长码率的 APPS-LDPC 码,本文示例性地构造了列重为 3 的 APPS-LDPC 码,其算法过程描述如图 6 和算法 1 所示。

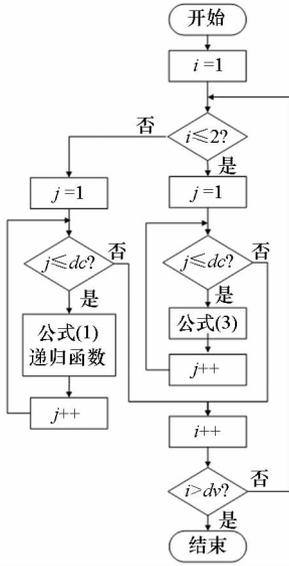


图 6 算法流程图

Fig. 6 Algorithm flow chart

一致校验矩阵 H 可以用一个 $m \times n$ 的移位矩阵 S 表示。在数列分割移位算法中,对于移位矩阵 S 的前两行数列移位矩阵 S_{AP} 的构造方法,采用数列理论来计算移位系数。保证第一行移位系数构成一个单调递增序列,而第二行构成一个单调递减序列。接下来,再按行从左到右逐个添加移位矩阵 S 中的剩余行移位系数。此外,还应确保位于同一列的各行之间不出现重复移位系数值。每当添加新的移位系数时,把当前添加的移位系数 $S_{i,j}$ 作为基节点,也就是环搜索的起点。应用上一节提出的短环路径分类方法,可以快速有效地搜索包括数列移位矩阵 S_{AP} 以及已添加的循环移位值中的所有长度小于 g 的环路径。很明显,在当前添加过程中,所有包含基节点 $S_{i,j}$ 且环长小于 g 的短环将被搜索到。

2.3 短环及诱捕集统计分析和算法耗时分析

对于码长为 496、码率为 1/2 的 APPS-LDPC 码,本文分析了其短环与诱捕集特性。采用数列分割移位 LDPC 码构造方法所构造的(496, 248) LDPC 码围长为 8,即其 Tanner 图中不包含 4 环、6 环。通过基于校验矩阵列的逐点搜索短环的方法,统计得到该码中 8 环为 30 287 个,10 环为 408 828 个。另外本文采用基于 Tanner 图的诱捕

算法 1 APPS-LDPC 码构造算法

Alg. 1 Construction algorithm of APPS-LDPC codes

```

For  $i = 1:dv$ 
  For  $j = 1:dc$ 
    定义递归函数  $level = 0; flag = 1; final-step = 4, 6, \dots, g;$ 
    Step 1: 生成移位矩阵数列部分  $S_{AP}$ 。设置  $S_{1,1}, S_{2,1}, d_1, d_{2,1}$  初始值,根据式(3)计算数列移位矩阵的剩余移位系数  $S_{AP}$ :
      
$$S_{1,j} = S_{1,1} + (j-1)d_1, 1 \leq j \leq n;$$

      
$$S_{2,j} = S_{2,j-1} - d_{2,j}, 1 \leq j \leq n;$$

      
$$d_{2,j} = d_{2,1} + j - 1.$$

    Step 2: 生成移位矩阵分割部分  $S_{PS}$ 。置初始节点移位系数  $S_{i,j} = -1$  并将其作为当前节点。
    Step 3: 调用递归函数 Recursion 选择下一节点 ( $level++$ ):
      (1) If  $flag$ , 水平步骤: 从与当前节点同行的其他节点中选择出第  $level$  个节点作为临时节点。置  $flag = \sim flag$ , 调用递归函数 Recursion。
      (2) If  $\sim flag$ , 垂直步骤: if  $level = final-step$ , For  $S_{i,j} = 0:p-1$ , 检查移位条件  $\bigoplus_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} S_{\alpha_i, \beta_j} = 0$ , 将不同  $S_{i,j}$  记录到集合 forbid。Return; Else 从与当前节点同一列的其他节点中选择出第  $level$  个节点作为临时节点。置  $flag = \sim flag$ , 调用递归函数 Recursion。
    Step 4: If forbid 元素个数不为  $p$ , 选择不在集合 forbid 中的  $S_{i,j}$  值(确保在同一列中移位系数  $S_{i,j}$  不同) continue; Else break; 返回至 step 2。
    If  $i = dv \ \& \ j = dc$ , 移位矩阵构造完成, break。
    Else  $j++$ 
  End for
  End for
  
```

集搜索方法^[18]分析了诱捕集结构及数目,发现其中不包含由 8 环构成的部分小型诱捕集,即诱捕集 $T(4,4)$ 、 $T(5,3)$ 、 $T(6,0)$ 、 $T(6,2)$ 、 $T(6,4)$,从而降低了小型诱捕集对译码性能尤其在错误平层区域的影响。这些小型诱捕集均是由变量节点和校验节点组成的 (a,b) 型诱捕集,具有 1.3 节介绍的环结构特性,例如 $T(4,4)$ 表示该集合中存在 4 个错误的变量节点,且由这 4 个变量节点引出的子图中包含 4 个奇度数校验节点。 $T(6,0)$ 等表示方法类似。

本文示例性地对码长为 6144、码率为 1/2 的 APPS-LDPC 码以及 PEG 和 PS 方法构造的 LDPC 码的构造耗时进行了初步统计,结果如表 3 所示。从构造耗时统计可以得出结论,本文提出的数列分割移位 LDPC 码构造耗时最低,效率最高。

表 3 LDPC 码构造耗时统计

Tab. 3 Time-consuming about constructing LDPC codes

| | ms | | | |
|------|-----------|---------|----------|-------------|
| | APPS-LDPC | PS-LDPC | PEG-LDPC | |
| | 围长 8 | 围长 8 | 围长 4 | 围长 6 |
| 移位矩阵 | 71 214 | 144 317 | 1950 | 827 |
| 扩展矩阵 | 5333 | 5311 | 439 439 | 41 562 784 |
| 总耗时 | 76 547 | 149 650 | 441 389 | 415 637 611 |

3 仿真结果

本文尝试构造两种数列分割移位 LDPC 码准循环基矩阵,并且在加性高斯白噪声 (Additive White Gauss Noise, AWGN) 信道下进行仿真,译码采用置信传播 (Belief Propagation, BP) 算法,最大迭代次数为 20,调制方式为二进制相移键控 (Binary Phase Shift Keying, BPSK),其他参数如表 2 所示。选取同码长码率的 PEG^[8] 码以及同码长码率的 PS-LDPC 码进行性能比较;分别构造码率 R 为 $1/2$ 和 $7/8$ 的 APPS-LDPC 码,其码长分别为 496 和 6144。仿真结果如图 7、图 8 所示 (图例中“g”代表围长)。

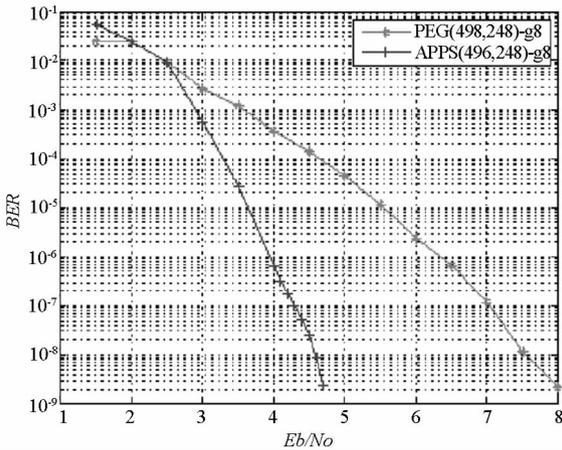


图 7 码长为 496、围长为 8 的 APPS-LDPC 码与 PEG-LDPC 码的误码率性能对比

Fig. 7 Performance of APPS-LDPC codes and PEG-LDPC codes when the girth is 8 and the length is 496

图 7 对比了码长为 496、码率为 $1/2$ 、围长为 8 的 APPS-LDPC 码 $C_1(62, 4, 8)$ 和 PEG-LDPC 码。可以看出,随着信噪比 E_b/N_0 的升高,两条译码性能曲线之间的差距在逐渐增大,当误码率达到 10^{-5} 时,数列分割移位 LDPC 码构造的 APPS-LDPC 码 $C_1(62, 4, 8)$ 相比 PEG-LDPC 码能获得约 1.9 dB 的性能提升。这种走低趋势将随着信噪比的升高而继续增强。当误码率为 10^{-9} 时,所

构造的 APPS-LDPC 码仍未出现错误平层现象。

图 8 在相同仿真条件下对比了相同码参数的围长为 8 的数列分割移位 LDPC 码 $C_2(256, 3, 24)$ 和围长为 8 的 PS-LDPC 码^[3] 的译码性能,同时给出了围长为 4 和 6 的 PEG-LDPC 码的仿真性能。所有码的码长均为 6144,码率为 $7/8$ 。在译码曲线的瀑布区域,本文构造的 APPS-LDPC 码的性能均优于其他三种 QC-LDPC 码。此外,APPS-LDPC 码的误码率曲线在 4.6 dB 以后并未出现错误平层现象,而此时其他三种 LDPC 码均已在误码率大约 10^{-7} 至 10^{-8} 时呈现出明显的平层。在相同码参数及仿真条件下,本文提出的 APPS-LDPC 码相较于 PS-LDPC 码在误码率达到 10^{-8} 时至少获得 0.25 dB 增益,同时 APPS-LDPC 码性能优于围长为 4 的 PEG-LDPC 码 0.6 dB,优于围长为 6 的 PEG-LDPC 码大约 0.2 dB。

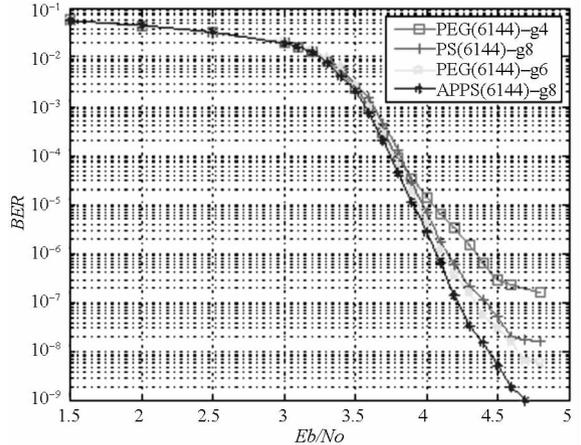


图 8 码长为 6144、码率为 $7/8$ 的 APPS-LDPC 码、PS-LDPC 码、PEG-LDPC 码的误码率性能对比

Fig. 8 Performance of APPS-LDPC code, PS-LDPC code and PEG-LDPC code when the length is 6144 and the rate is $7/8$

4 结论

本文提出一种基于环路径分类的数列分割移位 LDPC 码构造算法。该算法可以构造出任意码长码率的大围长 LDPC 码,其译码性能优异且具有较低的错误平层、较低的构造复杂度,因而更适宜在 LDPC 码的高速译码硬件实现中应用。研究结果表明,该算法通过简单的公式或定理来控制移位矩阵的移位参数,因而构造出的 LDPC 码具有较低错误平层。在研究分割移位 LDPC 码以及数列 LDPC 码构造方法的基础上,扬长避短,突破数列构造方法矩阵大小的局限性,提高分割移位 LDPC 码构造的扩展系数 p 与基矩阵大小、度分

布、码长、码率等的灵活性。在低复杂度的前提下,尽可能提高 LDPC 码的译码性能。仿真结果表明,本文的算法不仅在瀑布区表现优异,在错误平层区域也呈现出良好的译码性能。

参考文献 (References)

- [1] Gallager R G. Low-density parity check codes [M]. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1963.
- [2] Tanner R M. A recursive approach to low complexity codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1981, 27(5): 533 - 547.
- [3] Lu J, Moura J M F. Partition-and-shift LDPC codes[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(10): 2977 - 2979.
- [4] Sha J, Wang Z F, Gao M L, et al. Multi-Gb/s LDPC code design and implementation[J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems, 2009, 17(2): 262 - 268.
- [5] 张轶, 达新宇, 苏一栋. 利用等差数列构造大围长准循环低密度奇偶校验码[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(2): 394 - 398.
ZHANG Yi, DA Xinyu, SU Yidong. Construction of quasi-cyclic low-density parity-check codes with a large girth based on arithmetic progression [J]. Journal of Electronic & Information Technology, 2015, 37(2): 394 - 398. (in Chinese)
- [6] 詹伟, 朱光喜, 彭立. 利用斐波那契数列构造 QC-LDPC 码的方法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2008, 36(10): 63 - 65.
ZHAN Wei, ZHU Guangxi, PENG Li. Design of QC-LDPC codes using Fibonacci sequence[J]. Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2008, 36(10): 63 - 65. (in Chinese)
- [7] 朱磊基, 汪涵, 施玉松, 等. QC-LDPC 码基矩阵构造方法[J]. 现代电子技术, 2012, 35(5): 68 - 70.
ZHU Leiji, WANG Han, SHI Yusong, et al. Construction methods of basis matrix for QC-LDPC code [J]. Modern Electronics Technique, 2012, 35(5): 68 - 70. (in Chinese)
- [8] Hu X Y, Eleftheriou E, Arnold D M. Progressive edge-growth Tanner graphs [C]//Proceedings of Global Telecommunications Conference, IEEE GLOBECOM'01, 2001: 995 - 1001.
- [9] Kim S, No J S, Chung H, et al. Quasi-cyclic low-density parity-check codes with girth larger than 12 [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(8): 2885 - 2891.
- [10] 雷菁. 低复杂度 LDPC 码构造及译码研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2009.
LEI Jing. The study of low complex structure and decoding for LDPC codes[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009. (in Chinese)
- [11] Vasic B, Chilappagari S K, Nguyen D V, et al. Trapping set ontology [C]//Proceedings of Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, 2009: 1 - 7.
- [12] Mackay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45(2): 399 - 431.
- [13] Lu J, Moura J M F. Structured LDPC codes for high-density recording: large girth and low error floor [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(2): 208 - 213.
- [14] Milenkovic O, Kashyap N, Leyba D. Shortened array codes of large girth [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(8): 3707 - 3722.
- [15] Zhang G H, Sun R, Wang X M. Several explicit constructions for (3, L) QC-LDPC codes with girth at least eight [J]. IEEE Communications Letters, 2013, 17(9): 1822 - 1825.
- [16] Kang J Y, Huang Q, Zhang L, et al. Quasi-cyclic LDPC codes: an algebraic construction [J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(5): 1383 - 1396.
- [17] Huang Q, Diao Q, Lin S, et al. Cyclic and quasi-cyclic LDPC codes on constrained parity-check matrices and their trapping sets [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(5): 2648 - 2671.
- [18] Dong L, Zhao Z Y, Lei J, et al. Lower error floor of LDPC codes based on trapping sets elimination [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Wireless Communications and Signal Processing, 2014: 163 - 167.