doi:10.11887/j.cn.201703017 http://journal.nudt.edu.cn

滑模控制的新型双幂次组合函数趋近律*

廖 瑛[1],杨雅君[1,2],王 勇[1]
(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073;2. 装备学院,北京 101416)

摘 要:提出一种基于双幂次组合函数趋近律的新型滑模控制方案。与现有的快速幂次或双幂次趋近律相比,具有更快的收敛速度,同时还保持了全局固定时间收敛特性,收敛时间上界与滑模初值无关。当系统存在有界扰动时,能够使滑模变量在有限时间内收敛到稳态误差界内,同时其稳态误差要小于现有方法的。仿真实验验证了该方法的有效性及理论分析的正确性。

关键词:幂次趋近律;双幂次趋近律;固定时间收敛;稳态误差界;非线性组合函数
中图分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)03-105-06

Novel double power combination function reaching law for sliding mode control

LIAO Ying[1], *YANG Yajun*[1,2], *WANG Yong*[1]
(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Equipment Academy, Beijing 101416, China)

Abstract: A novel sliding control approach based on double power combination function reaching law was proposed. The proposed reaching law has faster convergence speed in comparison with fast power/double power reaching law, and it also has the characteristic of global fixed-time convergence, which means the upper bound of convergence time is independent of the initial value of sliding mode variables. It was proved that for a class of bounded external disturbance, the sliding mode variable can converge to a proposed steady-state error bounds in finite time, and the value of the steady-state error is less than the previous reaching law. Simulation results show that the validity of conclusion is confirmed.

Key words: power rate reaching law; double power rate reaching law; fixed time convergence; steady-state error bound; nonlinear combination function

滑模控制是一种鲁棒控制方法,在滑模运动阶段对系统中的匹配扰动项具有不变性,广泛应用于不确定性系统的控制问题。传统滑模控制在系统状态处于滑模面上时,产生高频切换的控制信号,在保证滑动模态存在的同时也引发了严重的抖振现象。对实际控制对象而言,抖振不仅意味着过高的能量消耗,也容易激发未建模的高频动态而导致系统失稳。此外,控制的鲁棒性只在滑模运动阶段存在,在滑模趋近阶段系统仍受到不确定性和外扰的影响。如何缩短趋近阶段的时间和消除抖振,一直是滑模控制研究的热点问题。

目前解决该问题常见的方法有:准滑模(边界层)方法[1]、高阶滑模控制[2]、非奇异终端滑模控制[3]、动态滑模控制[4]和趋近律技术[5]。准滑模方法利用饱和函数或连续函数近似传统滑模控制中的符号函数,使系统状态进入并保持在滑模面周围的邻域内,即形成所谓“准滑模”运动,有效削弱了抖振,但系统只能达到一致有界稳定,事实上降低了控制精度。高阶滑模控制和动态滑模控制将产生控制切换信号的符号函数置于控制输入的一阶或更高阶导数上,避免了抖振现象,但难以应用于一阶系统,获取滑模变量高阶导数信号也存在一定难度。非奇异终端滑模控制既能有效去除抖振也能够在有限时间内使系统状态收敛于平衡点,但相对传统滑模的指数趋近律,其收敛速度非常慢,实际上降低了滑模趋近阶段的过渡品质。高为炳[5]提出了趋近律技术的概念并分析了等速趋近律、指数趋近律和幂次趋近律等方法。其中:等速趋近律可视为传统滑模控制,趋近速度恒定,指数趋近律通过增加线性项加快了状态远离滑模面时的趋近速度,这两种方法均不能完全消除抖振;幂次趋近律中符号函数的增益与滑模

* **收稿日期:**2016-02-17
基金项目:航天科技创新基金资助项目(CAST201502)
作者简介:廖瑛(1961—),女,湖南长沙人,教授,博士,博士生导师,E-mail:liaoying1104@163.com

变量绝对值的幂次成正比,在状态到达滑模面时趋近速度为零,消除了抖振,但在远离滑模面时趋近速度较小。结合指数趋近律与幂次趋近律,文献[6]提出了一种快速幂次趋近律,在整个趋近阶段都具有较好的收敛速度。文献[7]提出了一种双幂次趋近律,文献[8]指出快速幂次和双幂次趋近律均具有二阶滑模特性,并推导了稳态误差界。文献[9]分析指出双幂次趋近律的二阶滑模运动在有限时间内形成,并给出了收敛时间的估计,也有研究进一步指出,双幂次趋近律具有固定时间收敛特性,并可以给出收敛时间上界。

本文在以上研究的基础上,结合快速幂次和双幂次趋近律,提出了一种新型双幂次组合函数趋近律。

1 双幂次组合趋近律设计

文献[6]和文献[7]分别提出了快速幂次趋近律和双幂次趋近律。

$$\dot{s} = -k_1 s - k_2 |s|^{1-\gamma}\mathrm{sgn}(s) \tag{1}$$

$$\dot{s} = -k_1 |s|^{1+\gamma}\mathrm{sgn}(s) - k_2 |s|^{1-\gamma}\mathrm{sgn}(s) \tag{2}$$

其中,$k_1>0$, $k_2>0$, $0<\gamma<1$。若不考虑干扰,上述两种趋近律均可以实现二阶滑模动态,即有限时间内使得 $s=\dot{s}=0$。系统初始状态到达滑模面的过程分为两个阶段:当系统状态远离滑模面,即 $|s|>1$ 时,式(1)和式(2)的等号右侧第一项起主导作用;当系统状态接近滑模面时,即 $|s|<1$ 时,则是等号右侧第二项起主导作用。

假设初始状态满足 $s(0)=s_0>1$,比较上述两种趋近律的收敛时间,分两个阶段进行讨论。

1)第一阶段:$s(0)=s_0\to s(t_1)=1$。

取 Lyapunov 函数 $V=s^2$,结合式(1)和式(2)分别得到:

$$\dot{V} = -2k_1 V - 2k_2 V^{1-\gamma/2} \tag{3}$$

$$\dot{V} = -2k_1 V^{1+\gamma/2} - 2k_2 V^{1-\gamma/2} \tag{4}$$

对比式(3)和式(4)可以看出,只有等号右侧第一项存在差异,而在该阶段,同样是等号右侧第一项起主导作用。因此,只需分析此项就可以比较收敛时间。

忽略等号右侧第二项,分别对式(3)和式(4)两边求积分,得:

$$V(t) = V_0 \exp(-2k_1 t) \tag{5}$$

$$V^{-\gamma/2}(t) = V_0^{-\gamma/2} + \gamma k_1 t \tag{6}$$

将 $V(t_1)=s^2(t_1)=1$ 分别代入式(5)和式(6),计算得 $s_0\to1$ 所需时间为:

$$t_{s1} = -\frac{\ln(1-x)}{k_1\gamma} \tag{7}$$

$$t_{d1} = \frac{x}{k_1\gamma} \tag{8}$$

其中:$x=1-V_0^{-\gamma/2}$;根据对数函数不等式 $-\ln(1-x)>x$,可得 $t_{s1}>t_{d1}$。说明在第一阶段($|s(t)|>1$),式(4)具有更快的收敛速度。

2)第二阶段:$s(t_1)=1\to s(T)=0$。

此时,式(3)和式(4)的第二项起主导作用,由于两式中第二项相同,因此,比较该阶段的收敛时间应同时考虑所有项。参考文献[10],快速幂次和双幂次趋近律收敛到原点所需时间分别为:

$$T = \frac{1}{k_1\gamma}\ln\left(1+\frac{k_1}{k_2}|s_0|^{\gamma}\right) \tag{9}$$

$$T = -\frac{|s_0|^{-\gamma}}{\gamma}k_1^{-\gamma/(1+\gamma)}\cdot F\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{k_2}{k_1}|s_0|^{-2\gamma}\right) \tag{10}$$

其中,$F(\cdot)$为高斯超几何函数,其定义[11]为

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta;\gamma;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n \\ &= 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2}z^2+\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

其中:$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$,$(\alpha)_n$ 表示 α 的波赫汉默 n 阶乘幂,定义为$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$,$n\in\mathbb{N}$,特别地,$(\alpha)_0=1$,$(1)_n=n!$。

将该阶段初始状态 $s_0=s(t_1)=1$ 代入式(9)和式(10),收敛所需时间分别为:

$$t_{s2} = \frac{1}{k_1\gamma}\ln\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) \tag{12}$$

$$t_{d2} = -\frac{1}{k_1^{\gamma/(1+\gamma)}\gamma}\cdot F\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{k_2}{k_1}\right) \tag{13}$$

进一步计算 t_{d2}/t_{s2} 得到:

$$\frac{t_{d2}}{t_{s2}} = \frac{z\cdot\arctan(z)}{\ln(1+z^2)} \tag{14}$$

式(14)的推导利用了高斯超几何函数定义式(11)和 arctan(·)函数的幂级数展开式。其中 $z=\sqrt{k_1/k_2}>0$。根据实函数理论,可以推导得到 $z\cdot\arctan(z)>\ln(1+z^2)$(如图 1(a)所示)。因此 $t_{d2}>t_{s2}$,说明在第二阶段($|s(t)|<1$)式(1)的收敛速度更快。

通过对上述两种趋近律的收敛时间的分析,提出一种新型双幂次组合函数趋近律。

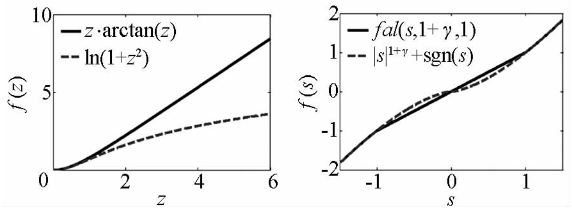
$$\dot{s} = -k_1 fal(s,a,\delta) - k_2|s|^{b}\mathrm{sgn}(s) \tag{15}$$

其中,$a=1+\gamma$, $b=1-\gamma$, $\delta=1$, $0<\gamma<1$, 非线

性幂次组合函数$fal(\cdot)$(函数曲线如图1(b)所示)的形式[12]为

$$fal(s,a,\delta)=\begin{cases}|s|^a\operatorname{sgn}(s), & |s|>\delta\\ \dfrac{s}{\delta^{1-a}}, & |s|\leqslant\delta\end{cases}\tag{16}$$

当$|s|>1$时,式(15)等价于式(2);而当$|s|<1$时,式(15)又等价于式(1)。根据本节前文的分析可知,与现有的快速幂次及双幂次趋近律相比,新型趋近律(式(15))具有更快的收敛速度。



(a) 反正切函数与对数函数的比较
(a) Compare of arctan function and logarithmic function

(b) 幂次组合函数与幂次函数的比较
(b) Compare of combination function and power function

图1　$z\cdot\arctan(z)$,$\ln(1+z^2)$,$fal(s,1+\gamma,1)$和$|s|^{1+\gamma}\operatorname{sgn}(s)$的函数曲线图

Fig.1　Curves of functions of $z\cdot\arctan(z)$, $\ln(1+z^2)$, $fal(s,1+\gamma,1)$ and $|s|^{1+\gamma}\operatorname{sgn}(s)$

2　新型趋近律特性分析

2.1　固定时间收敛特性

在给出新趋近律收敛时间特性之前,先引入固定时间收敛的定义和引理[13]。

定义1　设一个系统的初始状态为$x_0\in\mathbb{R}^n$,原点是全局有限时间收敛平衡点,如果收敛时间函数$T(x_0)$有界,即存在时间常数T_{max},使得$T(x_0)\leqslant T_{max}$对任意初始状态x_0成立,则称原点是系统的全局固定时间收敛平衡点。

引理1　若连续的径向无界函数$V(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$满足下述两个条件:

1) $V(0)=0$,原点是全局有限时间收敛平衡点;

2) 存在$0<\mu<1$,$\nu>0$,$r_\mu>0$和$r_\nu>0$使式(17)成立。

$$\dot V\leqslant\begin{cases}-r_\mu V^{1-\mu}, & V\leqslant1\\ -r_\nu V^{1+\nu}, & V>1\end{cases}\tag{17}$$

则原点是全局固定时间收敛平衡点,最大收敛时间为:

$$T_{max}=\frac{1}{\mu r_\mu}+\frac{1}{\nu r_\nu}\tag{18}$$

根据引理1,可以证明新型双幂次组合函数趋近律(式(15))满足定理1。

定理1　对式(15),状态$(s,\dot s)$在固定时间T_{max}内收敛到0,即在有限时间$T(s_0)$后有$s=\dot s=0$,收敛时间$T(s_0)$存在与初始状态s_0无关的上界。

$$T_{max}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)\tag{19}$$

证明:选取Lyapunov函数

$$V=s^2\tag{20}$$

显然,式(20)满足$V(0)=0$。

当状态$s(t)$在区域$|s|>1$中时,式(15)等价于式(2)。根据文献[9]可知,式(2)的原点是全局有限时间收敛平衡点。可以推论:在有限时间内状态$s(t)$收敛到区域$|s|<1$中,此时式(15)等价于式(1),状态$s(t)$收敛到0的时间满足式(7),可知收敛时间是有限的。因此对于式(15),$s=0$是全局有限时间收敛的平衡点。引理1的第一个条件成立。

对V沿式(15)轨迹求导,得:

$$\begin{aligned}\dot V&=2s\dot s\\&=\begin{cases}-2k_1V-2k_2V^{1-\gamma/2}, & V\leqslant1\\ -2k_1V^{1+\gamma/2}-2k_2V^{1-\gamma/2}, & V>1\end{cases}\\&\leqslant\begin{cases}-2k_2V^{1-\gamma/2}, & V\leqslant1\\ -2k_1V^{1+\gamma/2}, & V>1\end{cases}\end{aligned}\tag{21}$$

满足引理1的第二个条件。对比式(21)与式(17),参数对应关系为:$r_\mu=2k_2$,$\mu=\nu=0.5\gamma$,$\nu=2k_1$。综上所述,结合引理1可知,$s=0$是式(15)的全局固定时间收敛平衡点。收敛时间$T(s_0)$满足:

$$T(s_0)\leqslant T_{max}=\frac{1}{\mu r_\mu}+\frac{1}{\nu r_\nu}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)$$

至此定理得证。□

2.2　稳态误差界分析

考虑式(15)受到不确定扰动d的影响,系统方程变为:

$$\dot s=-k_1fal(s,1+\gamma,1)-k_2|s|^{1-\gamma}\operatorname{sgn}(s)+d\tag{22}$$

式中,不确定扰动d未知但有界,即$|d|\leqslant D$。式(22)的稳态误差界满足定理2。

定理2　式(22)的状态s在有限时间内收敛到以下区域。

$$|s|\leqslant\min\{D/k_1,(D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}},(D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}}\}$$

证明:选择Lyaponov函数

$$V=0.5s^2\tag{23}$$

沿式(22)轨线求导得：

$$\dot{V} = -k_1 fal(s,1+\gamma,1)s - k_2|s|^{2-\gamma} + d \cdot s$$

上式可进一步写成以下四种形式：

$$\dot{V} \leqslant \begin{cases} -k_2|s|^{2-\gamma} - |s|(k_1|s| - D) \\ -k_1|s|^2 - |s|(k_2|s|^{1-\gamma} - D) \end{cases},\quad |s| \leqslant 1 \tag{24}$$

$$\dot{V} \leqslant \begin{cases} -k_2|s|^{2-\gamma} - |s|(k_1|s|^{1+\gamma} - D) \\ -k_1|s|^{2+\gamma} - |s|(k_2|s|^{1-\gamma} - D) \end{cases},\quad |s| > 1 \tag{25}$$

1）当 $1 \geqslant |s| \geqslant D/k_1$，即 $0.5 \geqslant V \geqslant V_1 = 0.5(D/k_1)^2$ 时，由式(24)第一式可知：

$$\dot{V} \leqslant -k_2|s|^{2-\gamma} = -2^{1-\gamma/2}k_2 V^{1-\gamma/2} \tag{26}$$

注意到 $1-\gamma/2$ 小于 1。说明如果 $D/k_1 < 1$，则有限时间内系统收敛到区域 $|s| \leqslant D/k_1$ 中。

2）当 $1 \geqslant |s| \geqslant (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$，即 $0.5 \geqslant V \geqslant V_1 = 0.5(D/k_2)^{\frac{2}{1-\gamma}}$ 时，由式(24)第二式可知：

$$\dot{V} \leqslant -k_1|s|^2 = -2k_1 V \tag{27}$$

从 $V_0 = 0.5s_0^2$ 收敛到 V_1 所需时间 $T \leqslant T_{\max}$，其中 $T_{\max} = 0.5k_1^{-1}\ln(V_0/V_1)$，说明如果 $D/k_2 < 1$，则有限时间内系统收敛到区域 $|s| \leqslant (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ 中。

3）当 $|s| > (D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}} > 1$，即 $0.5 \geqslant V \geqslant V_1 = 0.5(D/k_1)^{\frac{2}{1+\gamma}}$ 时，由式(25)第一式可知：

$$\dot{V} \leqslant -k_2|s|^{2-\gamma} = -2^{1-\gamma/2}k_2 V^{1-\gamma/2}$$

与式(26)相同，说明如果 $D/k_1 > 1$，则有限时间内系统收敛到区域 $|s| \leqslant (D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}}$ 中。

4）当 $|s| > (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}} > 1$，即 $0.5 \geqslant V \geqslant V_1 = 0.5(D/k_2)^{\frac{2}{1-\gamma}}$ 时，由式(25)第二式可知：

$$\dot{V} \leqslant -k_1|s|^{2+\gamma} = -2^{1+\gamma/2}k_1 V^{1+\gamma/2} \tag{28}$$

从 $V_0 = 0.5s_0^2$ 收敛到 V_1 所需时间 $T \leqslant T_{\max}$，其中 $T_{\max} = \dfrac{1}{2^{\gamma/2}k_1\gamma}\left(\dfrac{1}{V_1^{\gamma/2}} - \dfrac{1}{V_0^{\gamma/2}}\right)$，说明如果 $D/k_2 > 1$，则有限时间内系统收敛到区域 $|s| < (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ 中。

综上所述，状态 s 将在有限时间内收敛到如式(29)所示区域。

$$|s| \leqslant \min\{D/k_1, (D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}}, (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}\} \tag{29}$$

至此定理得证。 □

注释 1 文献[8]给出了式(1)和式(2)的稳态误差界，分别为：

$$|s| \leqslant \min\{D/k_1, (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}\} \tag{30}$$

$$|s| \leqslant \min\{(D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}}, (D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}\} \tag{31}$$

根据式(29)～(31)可见，如果 $(D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ 最小，三种趋近律的稳态误差界相同；如果 $(D/k_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ 最大，则稳态误差界取决于 D/k_1，当 $D/k_1 > 1$ 时，$(D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}} < D/k_1$，而当 $D/k_1 < 1$ 时，$(D/k_1)^{\frac{1}{1+\gamma}} > D/k_1$。提出的幂次组合函数趋近律在任何情况下（$D/k_1 \in (0, +\infty)$）的稳态误差总是小于或等于现有的快速幂次或双幂次趋近律。

3 仿真算例

考虑单输入单输出系统

$$\dot{s} = u + d(t) \tag{32}$$

式中，u 为控制输入，$d(t)$ 为时变不确定扰动。分别利用快速幂次趋近律、双幂次趋近律和提出的双幂次组合函数趋近律设计控制律 u 并进行仿真。控制参数取为 $k_1 = 4, k_2 = 1, \gamma = 0.5$。利用各趋近律设计的控制律为：

1）快速幂次趋近律

$$u_1 = -4s - |s|^{0.5}\mathrm{sgn}(s) \tag{33}$$

2）双幂次趋近律

$$u_2 = -4|s|^{1.5}\mathrm{sgn}(s) - |s|^{0.5}\mathrm{sgn}(s) \tag{34}$$

3）双幂次组合函数趋近律

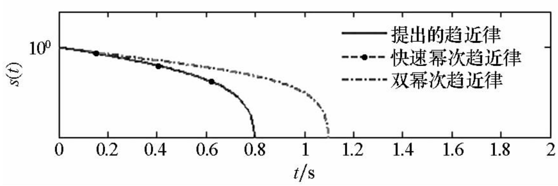
$$u_3 = -4 \cdot fal(s,1.5,1) - |s|^{0.5}\mathrm{sgn}(s) \tag{35}$$

3.1 收敛时间仿真对比

当式(32)不存在扰动，即 $d(t) = 0$ 时，设置初始状态分别为 $s_0 = 1, s_0 = 10, s_0 = 100$，控制输入 u 分别采用式(33)～(35)所示控制律，对比三种趋近律的收敛时间。状态变量 s 的时间历程曲线如图 2 所示，图 2 中纵轴采用对数坐标。

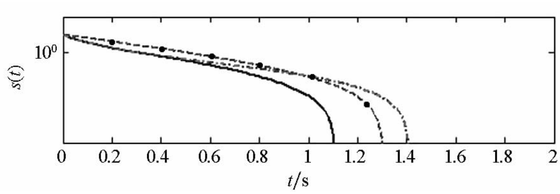
图 2(a)表明，当初始状态 $s_0 = 1$ 时，所提趋近律与快速幂次趋近律收敛速度相同，收敛时间约为 0.8 s，均小于双幂次趋近律收敛时间（约 1.1 s）。图 2(b)中，当初始状态 $s_0 = 10$ 时，所提趋近律具有最快收敛速度，收敛时间约为 1.1 s，快速幂次趋近律次之，收敛时间约为 1.3 s，双幂次趋近律收敛最慢，收敛时间为 1.4 s。图 2(c)显示，初始状态 $s_0 = 100$ 时，所提趋近律收敛速度仍为最快，收敛时间约为 1.2 s，而快速幂次趋近律收敛速度最慢，收敛时间约为 1.85 s，双幂次趋近律收敛时间为 1.5 s。

对比图 2 中的 3 个子图，可以看出快速幂次趋近律收敛时间受初始状态影响很大，不能看出存在收敛时间上限，而双幂次趋近律和所提双幂次组合函数趋近律的收敛时间受初始状态变化影



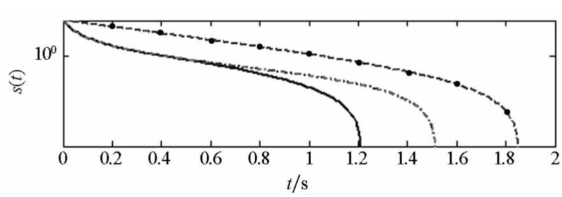
(a) $s_0=1$ 时的轨迹

(a) Curves of $s(t)$ when $s_0=1$



(b) $s_0=10$ 时的轨迹

(b) Curves of $s(t)$ when $s_0=10$

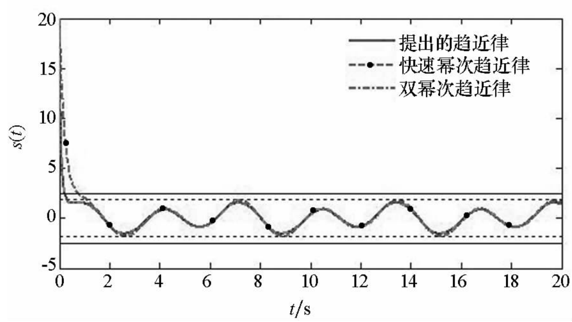


(c) $s_0=100$ 时的轨迹

(c) Curves of $s(t)$ when $s_0=100$

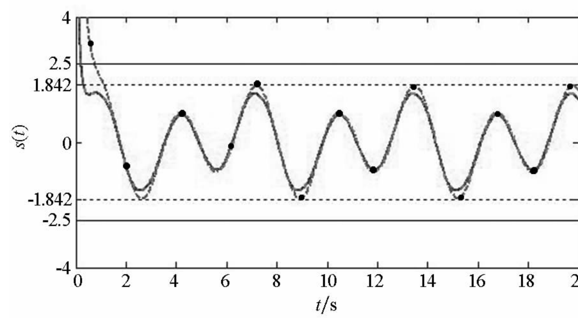
图 2　不同控制律 u 作用下 s 的收敛曲线

Fig 2　Convergence curves of s by different control inputs u



(a) 全局视图

(a) Global view of curves



(b) 稳态曲线局部放大

(b) Local view of curves

图 3　扰动上界 $D=10$ 时的稳态误差曲线

Fig. 3　Curves of stabilized error when disturbance upper bound $D=10$

响较小。根据定理 1,存在与初始状态无关的收敛时间上限。在本例中,理论上的最大收敛时间 $T_{\max}=2.5$ s。与现有的双幂次趋近律相比,所提趋近律不仅保持了收敛时间上限的存在,还使实际收敛速度更快。

3.2　稳态误差界仿真对比

当式(32)存在扰动,即 $d(t)\neq 0$ 时,设置初始状态 $s_0=6$,分别采用式(33)~(35)所列控制律进行仿真,以对比不同趋近律的稳态误差界。取扰动项 $d(t)$ 为以下两种不同的情况。

1)扰动上界 $D=10$ 时,

$$d_1(t)=7\sin(2t)+3\cos t$$

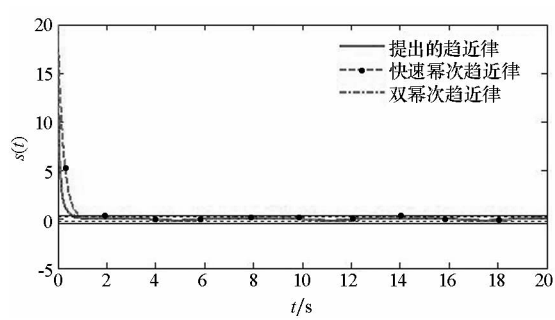
根据式(29)~(31),计算所提趋近律和双幂次趋近律的稳态误差上界为 1.842 0,快速幂次趋近律的稳态误差上界为 2.500 0。

2)扰动上界 $D=1$ 时,

$$d_2(t)=0.3\cos(2t)+0.7\sin t$$

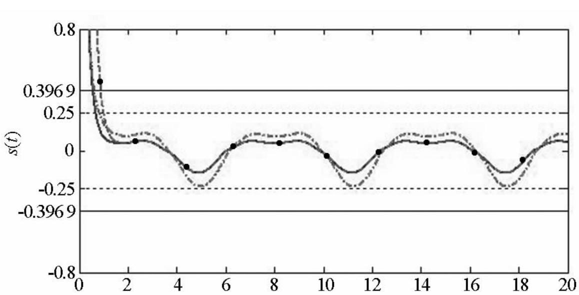
计算得出所提趋近律和快速幂次趋近律的稳态误差上界为 0.250 0,双幂次趋近律的稳态误差上界为 0.396 9。

仿真结果如图 3 和图 4 所示。可见,在受扰情况下,状态 s 没有收敛到 0,而是有限时间收敛



(a) 全局视图

(a) Global view of curves



(b) 稳态曲线局部放大

(b) Local view of curves

图 4　扰动上界 $D=1$ 时的稳态误差曲线

Fig. 4　Curves of stabilized error when disturbance upper bound $D=1$

到稳态误差界之内,此后误差轨迹不再超出式(29)~(31)所描述的范围。图3显示,当不确定扰动为 $d_1(t)$ 时,所提趋近律与双幂次趋近律的稳态轨迹相同,实际误差范围小于快速幂次趋近律。图4表明,不确定扰动为 $d_2(t)$ 时,所提趋近律又与快速幂次趋近律的稳态轨迹相同,实际误差范围小于双幂次趋近律。综合图3与图4的仿真结果可知,式(29)是正确的。同时,与现有的两种趋近律相比,所提新型趋近律对任意有界扰动具有更好的稳态品质。

4 结论

本文提出了一种双幂次组合函数趋近律设计方案,相比现有趋近律,具有收敛速度快、稳态误差小的特点,还能够解决滑模控制中的抖振问题。理论分析表明:所提新型趋近律无论是在远离还是接近滑动模态时都具有很快的趋近速度,不仅收敛总时间小于现有的快速幂次及双幂次趋近律,能在有限时间内实现二阶滑模,即 $s=\dot{s}=0$。还具有固定时间收敛的特性,即有限收敛时间的上界与初始状态无关;当存在有界外扰时,状态 s 收敛于平衡零点的有界领域内,同时稳态误差范围也小于现有快速幂次趋近律或双幂次趋近律。将该趋近律与滑模干扰观测器结合,可以实现无抖振快速连续控制。当双幂次组合函数趋近律取更一般的形式($a>1;0<b<1;k_1,k_2,\delta>0$)时,滑模收敛特性有待进一步的研究。

参考文献(References)

[1] Lee H, Utkin V I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems[J]. Annual Reviews in Control, 2007, 31(2): 179 – 188.

[2] Fridman L, Levant A. Higher order sliding modes [J]. Sliding Mode Control in Engineering, 2002(11): 53 – 102.

[3] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y. Finite-time chaos control via nonsingular terminal sliding mode control [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(6): 2728 – 2733.

[4] Koshkouei A J, Burnham K J. Dynamic sliding mode control design [J]. IEEE Proceedings Control Theory and Applications, 2005, 152(4): 392 – 396.

[5] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
GAO Weibing. Theory and design method for variable sliding mode control [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)

[6] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957 – 1964.

[7] 梅红, 王勇. 快速收敛的机器人滑模变结构控制[J]. 信息与控制, 2009, 38(5): 552 – 557.
MEI Hong, WANG Yong. Fast convergent sliding mode variable structure control of robot [J]. Information and Control, 2009, 38(5): 552 – 557. (in Chinese)

[8] 李鹏, 马建军, 郑志强. 采用幂次趋近律的滑模控制稳态误差界[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 619 – 624.
LI Peng, MA Jianjun, ZHENG Zhiqiang. Sliding mode control approach based on nonlinear integrator[J]. Control Theory and Applications, 2011, 28(5): 619 – 624. (in Chinese)

[9] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 289 – 293.
ZHANG Hexin, FAN Jinsuo, MENG Fei, et al. A new double power reaching law for sliding mode control [J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 289 – 293. (in Chinese)

[10] Yang L, Yang J Y. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(16): 1865 – 1879.

[11] Olver F W, Lozier D W, Boisvert R F, et al. NIST handbook of mathematical functions [M]. US: Cambridge University Press, 2010.

[12] Han J. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900 – 906.

[13] Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(4): 1831 – 1865.