

干扰条件下基于空频域二次优化的 MIMO 雷达波形设计方法*

王玉玺¹, 黄国策¹, 李伟¹, 胡继宽²

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 陕西 西安 710077; 2. 空军大连通信士官学校, 辽宁 大连 116600)

摘要:针对干扰条件下多输入多输出雷达发射方向图优化问题,提出一种基于空频域二次优化的多输入多输出雷达波形设计方法。该方法将空域上方向图优化问题转化为关于空时发射序列协方差矩阵的优化问题,利用多输入多输出雷达发射方向图仅与阵元之间波形相关性有关的特性,进一步降低空域波形设计复杂度,并通过 p 阶导数约束展宽零陷;针对优化得到的协方差矩阵,利用随机向量法通过最小二乘准则逼近最优发射方向图来合成具体恒包络波形;在基于空域优化得到的发射波形基础上,根据改变不同时刻信号序列的初始相位雷达发射方向图不变的特性,通过拟功率方法优化相位变化矩阵,实现雷达波形在频域上的二次优化以抑制频域上的干扰。仿真实验证明了所提方法在方向图匹配和干扰抑制方面的有效性。

关键词:多输入多输出雷达;波形设计;干扰抑制;恒包络

中图分类号:TN911.7 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2017)03-136-08

MIMO radar waveform design method based on quadratically spatial and spectral optimizations under jamming

WANG Yuxi¹, HUANG Guoce¹, LI Wei¹, HU Jikuan²

(1. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;

2. Dalian Air Force Communication Noncommissioned Officer Academy, Dalian 116600, China)

Abstract: For the optimization problem of MIMO (multiple input multiple output) radar transmit beampattern under jamming, a new MIMO radar waveform design method based on quadratically spatial and spectral optimization was proposed. Firstly, the proposed method converted the problem of MIMO radar transmit beampattern design into the optimization problem about the covariance matrix of MIMO radar's transmit space-time sequences. Based on the fact that MIMO radar transmit beampattern was only decided by the correlation of each element's transmit waveforms, the computational burden of the spatial optimization of waveforms could be reduced. Furthermore, the nulling towards the jamming direction of the transmit beampattern was broadened by the p -order derivative constraint. With the optimized covariance matrix, the randomization method was used to synthesize the actual constant modular waveforms under the criteria of least square to gain on the optimal beampattern. Finally, with the optimized waveforms through spatial optimizing process, a phase flexible diagonal matrix was optimized with the like-power method to achieve the spectral optimization of MIMO radar waveforms based on the fact that MIMO radar transmit beampattern would not be influenced by the change of the initial phase of transmit sequence at a certain moment. And the spectral jamming could be avoided by the spectral optimization of waveforms. Simulation results prove the effectiveness of the proposed method in matching desired beampattern and anti-jamming.

Key words: multiple input multiple output radar; waveform design; anti-jamming; constant envelop

多输入多输出 (Multiple Input Multiple Output, MIMO) 雷达凭借每个阵元能够发射不同波形的优异性能受到广泛关注^[1-9]。根据 MIMO 雷达阵元布置以及信号处理的特点,可将其分为分布式 MIMO 雷达和集中式 MIMO 雷达。其中分布式 MIMO 雷达通过空间分集可以有效消除目标闪烁带来的影响^[1-2];而集中式 MIMO 雷达则利用波形分集形成较大的虚拟阵列孔径,提高雷达

参数估计、目标识别和干扰抑制等性能^[3],本文主要研究集中式 MIMO 雷达。

传统集中式 MIMO 雷达,每个阵元通过发射相互正交信号,发射端发射功率在空间均匀分布^[3]。为提高雷达发射功率的利用率,利用不同阵元之间发射波形的相关性设计 MIMO 雷达发射方向图,实现发射功率在特定空域范围内的聚焦已成为目前研究的热点^[4-10]。现有关于 MIMO

* 收稿日期:2016-09-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61302153)

作者简介:王玉玺(1989—),男,山东寿光人,博士研究生,E-mail:WYX10013@163.com;

黄国策(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:huanguoce@163.com

雷达发射方向图设计的波形优化方法可分为两步,首先根据期望发射方向图优化发射波形协方差矩阵,然后利用优化协方差矩阵匹配设计具体发射波形。文献[4]首次推导了MIMO雷达发射方向图计算公式,建立了发射方向图优化模型并利用梯度算法求解发射波形的协方差矩阵;文献[5]则提出了经典的方向图匹配设计模型和最小化旁瓣方向图设计模型;文献[6]在文献[4]的基础上提出了一种关于协方差矩阵的无约束半正定规划模型;文献[7-8]为避免直接优化协方差矩阵,分别提出了无约束实相关矩阵综合方法;为降低协方差矩阵优化计算复杂度,文献[9-10]分别提出了基于发射加权矩阵优化的MIMO雷达发射方向图优化算法,将MIMO雷达波形设计问题转化为关于正交基波形加权矩阵的优化问题;文献[11]则在文献[9]基础上进一步研究了优化波形的模糊函数。文献[12]针对主瓣波动和旁瓣电平进行了研究;文献[13]在现有方向图匹配准则的基础上进一步推广,提出一种旁瓣控制方向图设计方法;通过上述不同方法对发射波形协方差矩阵进行优化后,接下来则需要根据优化后的协方差矩阵设计具体的发射波形。由于在实际应用中天线阵元发射功率放大器具有非线性特性,因此为保证发射波形不失真并最大化功率利用率,需要发射波形满足恒包络特性。目前最为通用的波形设计方法为文献[14]所提基于协方差矩阵匹配的循环算法,该方法虽然能够以闭合解的形式给出具体的发射波形,但是算法为高度非凸非线性优化问题对初始迭代点非常敏感,而且该方法在波形合成时没有考虑干扰情况下雷达发射方向图的置零约束,因此优化后的波形不能保证雷达发射方向图在干扰方向上形成满足要求的零陷。

现有文献大都针对理想情况下MIMO雷达发射方向图及波形优化设计进行研究,而没有考虑实际应用中特别是在复杂电磁环境下,MIMO雷达不仅可能面临来自空域特定方向的干扰,而且还有可能在频域上面临来自敌方甚至是己方与雷达具有重叠频带的其他无线电设备的干扰。本文针对上述问题,提出一种干扰条件下基于空频域二次优化的MIMO雷达波形设计方法。

1 MIMO雷达信号模型

设集中式MIMO雷达发射阵列为一均匀线

阵,阵元数目为 M 且阵元间距为 $d = \frac{f_0}{2c}$, f_0 为发射信号载频, c 为光速。设在 n 时刻 M 个阵元发射基带离散信号序列为:

$$\mathbf{s}(n) = [s_1(n), s_2(n), \dots, s_M(n)]^T \in C^M \quad (1)$$

则MIMO雷达在一次相干处理间隔内发射基带离散信号矩阵可表示为:

$$\mathbf{S} = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)] = [s_1, s_2, \dots, s_M]^T \in C^{M \times N} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{s}_m = [s_m(0), s_m(1), \dots, s_m(N-1)]^T \in C^N$ 表示第 m 个阵元发射的信号序列, N 为一次相干处理时间内信号取样次数即信号码长,由信号带宽和发射脉冲宽度决定。假设各个阵元发射的波形均为窄带信号,则在 n 时刻,远场 θ 方向接收到的信号为:

$$r(n, \theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{s}(n) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\pi \sin(\theta)}, \dots, e^{-j(M-1)\pi \sin(\theta)}]^T$ 为发射阵列导向矢量。因此在 n 时刻MIMO雷达发射波形在空间的能量分布为:

$$P(n, \theta) = \mathbf{a}^H(\theta) E\{s(n)s^H(n)\} \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\theta) \quad (4)$$

其中, $\bar{\mathbf{R}} = E\{s(n)s^H(n)\}$ 表示 n 时刻雷达发射信号的协方差矩阵。由于 $\bar{\mathbf{R}}$ 为雷达发射信号协方差矩阵的理论值,在统计理论上满足如下关系式:

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)s^H(n) = \frac{1}{N} \mathbf{S} \mathbf{S}^H = \frac{1}{N} \mathbf{R} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{S}^H$ 。在相干处理时间内,MIMO雷达发射方向图可表示为:

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{a}^H(\theta) E\{s(n)s^H(n)\} \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (6)$$

将整个空域 $\Theta = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 划分为 L 个离散点,雷达期望发射方向图为 $P_d(\theta_l)$, $\theta_l \in \Theta$ 。假设在空域 θ_c 方向存在一干扰,则为了抑制该干扰需要使雷达发射方向图在 θ_c 方向上形成零陷,即:

$$\mathbf{a}^H(\theta_c) \mathbf{s}(n) = 0, n = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

利用方向图匹配准则^[5]可以得到带有零陷约束的协方差矩阵优化模型为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{R}, r} \sum_{l=1}^L |r P_d(\theta_l) - \mathbf{a}^H(\theta_l) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta_l)|^2 \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{R}(m, m) = \frac{E}{M}, m = 1, 2, \dots, M \\ \mathbf{a}^H(\theta_c) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta_c) = 0 \\ \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (8)$$

其中, r 为尺度因子, E 表示雷达总的发射功率。

式(8)为关于 \mathbf{R} 的半正定规划问题,可以利用 CVX 工具箱高效求解。在求得最优协方差矩阵 \mathbf{R} 后,需要根据 $\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{S}^H$ 合成具体的发射波形,利用文献[14]所提循环优化方法可以得到具体的发射波形,即:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{S}} \|\mathbf{S} - \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{U}\| \\ \text{s. t. } |\mathbf{S}(m,n)|^2 = \frac{E}{MN} \quad m=1, \dots, M \quad n=1, \dots, N \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{R}^{1/2}$ 表示协方差矩阵的 Hermite 均方根, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 为半正交矩阵,约束条件表示雷达发射波形为具有恒包络特性。利用式(8)和式(9)虽然能够解决 MIMO 雷达发射波形设计问题,但是仍然存在几点不足:①在考虑发射波形恒包络或低峰均值比(Peak-to-Average-power Ratio, PAR)等实际约束条件下,基于协方差矩阵匹配的波形设计是一个高度非凸非线性优化问题,而且循环算法对初始迭代点非常敏感;②由于循环算法在合成雷达波形矩阵 \mathbf{S} 时,仅以最小二乘准则逼近矩阵 $\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{U}$,而没有考虑零陷约束,因此不能保证优化波形在方向 θ_c 处形成满足条件的零陷;③在实际应用中特别是复杂电磁环境下, MIMO 雷达不仅面临来自空域的具有特定方向的杂波干扰,而且还可能面临来自敌方特定频谱上的干扰,甚至是己方与雷达工作频段相重叠的其他无线电设备频段上的干扰,而现有关于 MIMO 雷达波形设计方法仅从空域对雷达波形进行优化,无法同时抑制来自空域和频域上的干扰。

2 基于空频域二次优化的 MIMO 雷达波形设计

针对复杂电磁环境下 MIMO 雷达有可能同时面临来自空域和频域干扰的情况,设计一种基于空频域二次优化的 MIMO 雷达波形设计方法,通过分别在空域和频域内对雷达波形进行优化,在匹配期望发射方向图的条件下,同时抑制来自空域和频域的干扰。

2.1 基于空域的 MIMO 雷达波形设计

虽然式(7)可以保证 MIMO 雷达最优发射方向图在干扰 θ_c 方向上形成一零陷,但是所得零陷较窄,无法保证雷达与干扰源相对移动时干扰始终处于零陷内,为提高雷达干扰抑制的有效性,可利用 p 阶导数约束方法对干扰零陷展宽,即:

$$\left. \frac{\partial^r (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{s}(n))}{\partial \xi^r} \right|_{\theta=\theta_c} = c_r (\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H \mathbf{s}(n) = 0 \quad (10)$$

其中: $n = 1, \dots, N; r = 1, \dots, p; \xi = \pi \sin(\theta); c_r = j^r \left(\sum_{m=1}^M z_m^{2r} \right)^{1/2}; \mathbf{D}^r = \left(\sum_{m=1}^M z_m^{2r} \right)^{-1/2} \text{diag}([z_1^r, z_2^r, \dots, z_M^r]); z_m = m - 1, m = 1, \dots, M$ 。令 $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{S})$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^H$, 由式(6)可知:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \text{vec}(\mathbf{S}))^H (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \text{vec}(\mathbf{S})) \\ &= \text{vec}(\mathbf{S})^H \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}(\theta) \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \text{vec}(\mathbf{S}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \text{vec}(\mathbf{S}) \text{vec}(\mathbf{S})^H \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}(\theta)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{X} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}(\theta)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{X} \mathbf{A}(\theta)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{V}(\theta) \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,“ \otimes ”表示 Kronecker 乘积运算, $\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{V}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{A}^H(\theta)$ 。式(11)推导中利用了矩阵向量化和 Kronecker 乘积运算特性以及矩阵迹运算特性。同理,零陷展宽约束式(10)可表示为:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H \mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c) \\ &= \text{vec}((\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H \mathbf{S})^H \text{vec}((\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H \mathbf{S}) \\ &= \text{vec}(\mathbf{S})^H \mathbf{I}_N \otimes ((\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c)) (\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H) \text{vec}(\mathbf{S}) \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{H}(\theta_c) \mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{H}(\theta_c) \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{H}(\theta_c) = \mathbf{I}_N \otimes ((\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c)) (\mathbf{D}^r \mathbf{a}(\theta_c))^H)$ 。因此带有展宽零陷的 MIMO 雷达发射方向图设计问题可转化为关于协方差矩阵 \mathbf{X} 的优化问题 P_1 , 即:

$$\begin{cases} \min_{\alpha, \mathbf{X}} \sum_{l=1}^L |\alpha P_d(\theta_l) - \text{tr}(\mathbf{V}(\theta_l) \mathbf{X})|^2 \\ \text{s. t. } \text{tr}(\mathbf{H}(\theta_c) \mathbf{X}) \leq \varepsilon \\ \text{diag}(\mathbf{X}) = \frac{E}{MN} \\ \text{rank}(\mathbf{X}) = 1, \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中, ε 表示零陷深度, α 表示尺度因子用于更好地匹配期望方向图,第二个约束条件表示每个阵元发射波形为恒包络的。优化问题 P_1 可以通过半正定松弛忽略阶为 1 的约束条件,将非凸问题转化为凸的半正定规划问题并求得最优协方差矩阵 \mathbf{X} 。但是直接通过 P_1 求解协方差矩阵 \mathbf{X} 计算复杂度为 $O((MN)^{3.5})$,特别是当发射波形码元数目 N 较大时,不能满足雷达发射波形优化的实时性要求。为降低计算复杂度,根据式(6)可知:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= \mathbf{N} \mathbf{a}^H(\theta) \bar{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\theta) \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{a}(\theta)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\theta)) \end{aligned} \quad (14)$$

由式(11)和式(14)对比可知,在空域上通过

优化MIMO雷达空时序列协方差矩阵 \mathbf{X} 设计MIMO雷达发射方向图等效于对矩阵 $\mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}}$ 的优化。由于MIMO雷达发射方向图仅由各阵元发射波形之间的相关性决定,而与码元序列之间的相位差无关,在空域上优化雷达空时序列协方差矩阵 \mathbf{X} 等价于对 n 时刻雷达发射信号的协方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}} = E\{s(n)s^H(n)\}$ 的优化。因此基于空域的MIMO雷达发射方向图优化模型 P_2 可表示为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{R}, r} \sum_{l=1}^L |rP_d(\theta_l) - \mathbf{a}^H(\theta_l)\bar{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta_l)|^2 \\ \text{s. t.} \quad \text{diag}(\bar{\mathbf{R}}) \leq \gamma \frac{E}{MN} \\ \quad (\mathbf{D}'\mathbf{a}(\theta_c))^H \bar{\mathbf{R}} \mathbf{D}'\mathbf{a}(\theta_c) \leq \varepsilon \quad (15) \\ \quad \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{E}{N} \\ \quad \text{rank}(\bar{\mathbf{R}}) = 1 \\ \quad \bar{\mathbf{R}} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

需要注意的是问题 P_2 为对 n 时刻发射波形协方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}} = E\{s(n)s^H(n)\}$ 的优化,而非式(8)中的 $\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{S}^H$,因此在 P_2 中波形功率约束为 $\text{tr}(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{E}{N}$ 且 $\text{rank}(\bar{\mathbf{R}}) = 1$ 。此外, P_2 中第一个约束条件表示对 n 时刻每个阵元的发射功率进行约束,其中 $\gamma \in [1, M]$ 。由于矩阵 $\bar{\mathbf{R}}$ 的阶1约束条件, P_2 为非凸的,因此可利用半正定松弛方法省略矩阵 $\bar{\mathbf{R}}$ 的阶1约束条件,将 P_2 松弛变换为 P_3 ,即:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{R}, r} \sum_{l=1}^L |rP_d(\theta_l) - \mathbf{a}^H(\theta_l)\bar{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta_l)|^2 \\ \text{s. t.} \quad \text{diag}(\bar{\mathbf{R}}) \leq \gamma \frac{E}{MN} \\ \quad (\mathbf{D}'\mathbf{a}(\theta_c))^H \bar{\mathbf{R}} \mathbf{D}'\mathbf{a}(\theta_c) \leq \rho \quad (16) \\ \quad \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{E}{N}, \bar{\mathbf{R}} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

其中 P_3 为关于 $\bar{\mathbf{R}}$ 的半正定规划问题,可以通过CVX工具箱高效求解。在求得优化矩阵 $\bar{\mathbf{R}}^*$ 后,相应的 $\mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}}^*$ 可直接作为MIMO雷达空时序列的最优协方差矩阵 \mathbf{X}^* 。由于 $\mathbf{X}^* = \mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}}^*$,因此在优化 $\bar{\mathbf{R}}$ 时,若 $\gamma = 1$,则MIMO雷达各个阵元发射功率相同而且每个阵元发射波形满足恒包络;若 $1 < \gamma \leq M$,则MIMO雷达不同阵元之间发射功率具有一定变化范围,但是每个阵元发射波形仍然满足恒包络。

通过优化问题 P_3 求得 $\bar{\mathbf{R}}^*$ 并根据 $\mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}}^*$ 获得最优协方差矩阵 \mathbf{X}^* 后,接下来则需要根据 \mathbf{X}^* 设计具体的发射波形。若优化后的协方差矩阵

\mathbf{X}^* 满足 $\text{rank}(\mathbf{X}^*) = 1$,经过特征值分解后,其非零特征值所对应的特征向量即为期望的恒包络发射波形;但是由于优化问题 P_3 经过松弛变化,实际所得优化矩阵 \mathbf{X}^* 的阶往往大于1,此时可以利用随机向量合成方法^[15]得到满足约束条件的恒包络发射波形,其具体求解过程为:当 $\text{rank}(\mathbf{X}^*) \geq 2$ 时,任意选取 Q 个随机向量 \mathbf{x}_q ,且 \mathbf{x}_q 服从均值为 $\mathbf{0}$ 方差为 \mathbf{X}^* 的复高斯正态分布,即 $\mathbf{x}_q \sim N_c(\mathbf{0}, \mathbf{X}^*)$, $q = 1, 2, \dots, Q$,其中 Q 为随机化实验次数。

计算 $\mathbf{y}_q = \sqrt{\frac{E}{MN}} \exp(j \arg \mathbf{x}_q)$, $\arg(\mathbf{x}_q)$ 表示向量 \mathbf{x}_q 中每一元素的角度,并对于每一个向量 \mathbf{y}_q ,计算代价函数,即:

$$\beta_q = \|\mathbf{X}^* - \mathbf{y}_q \mathbf{y}_q^H\|^2, q = 1, 2, \dots, Q \quad (17)$$

则序列 $\{\beta_q\}$ 中的最小值所对应的 \mathbf{y}_q 即为满足约束条件的恒包络发射波形。

2.2 基于频域的MIMO雷达波形二次优化

在得到满足空域发射方向图匹配以及置零约束等条件的MIMO雷达恒包络发射波形后,对发射波形在频域上进行二次优化,实现在空域雷达发射方向图不变的条件下优化波形频谱,从而避免频域干扰提高雷达工作性能。

由式(6)可知,MIMO雷达发射方向图仅与不同阵元之间发射波形的相关性有关,而与不同码元之间信号相位无关,因此改变每一码元时刻对应信号序列 $s(n)$ 的初始相位,不会对雷达发射方向图造成影响。设基于空域优化后得到的波形矩阵为 $\mathbf{S} \in C^{M \times N}$,通过改变不同时刻信号序列的初始相位,得到新的波形矩阵为:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{A} = [e^{j\varphi_0} \mathbf{s}(0), e^{j\varphi_1} \mathbf{s}(1), \dots, e^{j\varphi_{N-1}} \mathbf{s}(N-1)] \quad (18)$$

其中, $\mathbf{A} = \text{diag}([e^{j\varphi_0}, e^{j\varphi_1}, \dots, e^{j\varphi_{N-1}}])$ 为相位变化对角矩阵,则有:

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{S}^H = \mathbf{S}\mathbf{S}^H \quad (19)$$

由此可知,相位变化后的波形相关矩阵不会发生任何变化,即方向图不变。因此在不影响雷达发射方向图的基础上可以通过优化对角矩阵 \mathbf{A} ,实现波形在频域上的进一步优化。相位变化后阵元 m 发射信号序列 \tilde{s}_m 在归一化信号频带内的功率谱密度(Power Spectral Density, PSD)为^[16]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m(f) &= \left| \sum_{n=0}^{N-1} s_m(n) e^{j\varphi_n} e^{-j2\pi fn} \right|^2 \\ &= |\mathbf{v}^H \mathbf{s}_m \odot \mathbf{F}(f)|^2 \\ &= \mathbf{v}^H (\mathbf{s}_m \odot \mathbf{F}(f)) (\mathbf{s}_m \odot \mathbf{F}(f))^H \mathbf{v} \quad (20) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{v} = [e^{-j\varphi_0}, e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j\varphi_{N-1}}]^T$, $\mathbf{F}(f) = [1,$

$e^{-j2\pi f}, \dots, e^{-j2\pi f(N-1)}]^T$ 表示在归一化频点 f 处的傅里叶变化向量, “ \odot ” 表示 Hadamard 乘积, 信号序列 \bar{s}_m 在干扰频带 $\Omega = [f_1^i, f_2^j]$ 内的发射功率为:

$$\int_{f_1^i}^{f_2^j} \bar{S}_m(f) df = \mathbf{v}^H \int_{f_1^i}^{f_2^j} (s_m \odot \mathbf{F}(f)) (s_m \odot \mathbf{F}(f))^H df \mathbf{v} = \mathbf{v}^H \mathbf{R}_J^m \mathbf{v} \quad (21)$$

其中: $\mathbf{R}_J^m = \int_{f_1^i}^{f_2^j} (s_m \odot \mathbf{F}(f)) (s_m \odot \mathbf{F}(f))^H df, f_1^i$ 表示干扰频带下边界, 即最小干扰频点; f_2^j 则表示干扰频带上边界, 即最大干扰频点。为避免频域上的干扰, MIMO 雷达发射波形在频域上的优化方程 P_4 可表示为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^H \sum_{m=1}^M \mathbf{R}_J^m \mathbf{v} \\ \text{s. t.} \quad |\mathbf{V}(n)| = 1, n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (22)$$

为求解该非凸优化问题, 首先将矩阵 $\sum_{m=1}^M \mathbf{R}_J^m$ 进行特征值分解, 得到最大特征值 λ , 令 $\bar{\mathbf{R}} = \lambda \mathbf{I}_N - \sum_{m=1}^M \mathbf{R}_J^m$, 利用辅助变量 $\bar{\mathbf{R}}$ 将 P_4 等效转化为 P_5 , 即:

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^H \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v} \\ \text{s. t.} \quad |\mathbf{v}(n)| = 1, n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (23)$$

由于 $\bar{\mathbf{R}}$ 为 Hermitian 半正定矩阵, 且向量 \mathbf{V} 的取值范围为 $\Delta = \{\mathbf{v} \in C^N \mid |\mathbf{V}(n)| = 1, n = 0, 1, \dots, N-1\}$, 因此优化问题 P_5 为关于 \mathbf{v} 的非凸单位二次规划问题 (Unimodular Quadratic Programming, UQP), 可利用拟功率迭代算法^[17] 进行有效求解。假设经过 k 次迭代后优化得到 $\mathbf{v}^{(k)}$, 则第 $k+1$ 次迭代优化方程等价于:

$$\min_{\mathbf{v}^{(k+1)} \in \Delta} \|\mathbf{v}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}\|^2 \quad (24)$$

利用拟功率算法可直接求得第 $k+1$ 次迭代的最优解, 即:

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = e^{j\arg(\bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)})} \quad (25)$$

由于

$$\|\mathbf{v}^{(k+1)} - \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}\|_2^2 = \text{const} - 2\Re\{\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}\} \quad (26)$$

则 $\mathbf{v}^{(k+1)}$ 应满足 $\Re\{\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}\}$ 最大化。若 $\mathbf{v}^{(k+1)} \neq \mathbf{v}^{(k)}$, 因为 $\bar{\mathbf{R}}$ 为 Hermitian 半正定矩阵, 则有:

$$(\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)})^H \bar{\mathbf{R}} (\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}) > 0 \quad (27)$$

其中 $\Re\{\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}\}$ 表示复数 $\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v}^{(k)}$ 的实部, 因此由式(27)可进一步得知:

$$\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v}^{(k+1)} > 2\Re\{\mathbf{v}^{(k+1)H} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v}^{(k)}\} - \mathbf{v}^{(k)H} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v}^{(k)} > \mathbf{v}^{(k)H} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v}^{(k)} \quad (28)$$

拟功率迭代算法的收敛性得到证明。重复上述迭代优化过程直到 $\mathbf{v}^H \bar{\mathbf{R}} \mathbf{v} \leq E_I, E_I$ 为干扰频带内雷达允许最大发射功率, 停止迭代输出 \mathbf{v} 。最终经过空频域二次优化的 MIMO 雷达发射波形矩阵为:

$$\bar{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S} \text{Diag}(\mathbf{v}^*) \quad (29)$$

其中 $\text{Diag}(\mathbf{v}^*)$ 表示以向量 \mathbf{v}^* 构造的对角矩阵。

2.3 算法性能分析

针对干扰条件下 MIMO 雷达发射方向图优化问题, 本文提出一种基于空频域二次优化的 MIMO 雷达波形设计方法, 即首先在空域上设计与期望方向图匹配而且能够形成较宽零陷的 MIMO 雷达发射波形, 在此基础上利用阵列信号 $s(n)$ 每个码元改变相同相位对应方向图不变的特性, 通过优化相位变化矩阵实现波形在频域上的优化。与文献[14]所提波形设计方法相比, 本文在利用向量方法合成具体波形时, 采用最小二乘准则使合成信号方向图逼近优化发射方向图, 从而保证了合成后的发射波形能够在空域上形成较宽的零陷; 在频域上通过优化相位变化矩阵 Λ , 实现在不影响雷达发射方向图条件下优化波形频谱, 从而抑制频域上的干扰。本文所提算法主要分为三部分, 基于协方差矩阵的发射方向图设计、信号合成和频谱优化, 其计算复杂度分别为 $O((M)^{3.5}), O(Q(MN)^2), O(N_{\text{iter}}(N)^2)$, 其中 N_{iter} 为拟功率算法迭代次数, 相比式(13)直接对 MIMO 雷达空时序列协方差矩阵 \mathbf{X} 优化, 所提算法计算复杂度大大降低, 因此能够更好地满足雷达波形设计实时性应用的要求。

3 实验仿真

设 MIMO 雷达发射阵列为均匀线阵, 阵元间距为半波长, 阵元数目 $M = 10$, 每个阵元发射信号中心载频和信号带宽相同, 分别为 $f_0 = 10 \text{ GHz}, B = 10 \text{ MHz}$, 雷达发射脉冲宽度 $T_p = 6.4 \mu\text{s}$, 发射总功率 $E = M$, 每个阵元发射基带信号码长为 $N = T_p B = 64$ 。设整个空域为 $\Theta = [-90^\circ, 90^\circ]$, 其中感兴趣的目标空域为 $\Theta_r = [-30^\circ, 30^\circ]$, 旁瓣空域为 $\Theta_s = [-90^\circ, -30^\circ] \cup [30^\circ, 90^\circ]$, 空域离散点间隔为 0.5° 。设在方向 $\theta_c = 57^\circ$ 处存在一快速移动干扰, 令导数约束 $p = 2$, 空域零陷深度 $\varepsilon = -40 \text{ dB}$, 随机化实验次数 $Q = 1000$ 。

设阵元功率变化参数 $\gamma = 1, \gamma = 1.5, \gamma = 2$, 将本文所提通过优化协方差矩阵 $\mathbf{X} = \mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{R}}^*$ 形成带有宽零陷的 MIMO 雷达发射方向图与式(8)形

成的发射方向图进行对比,如图1所示。相比于式(8)形成的干扰条件下MIMO雷达发射方向图,本文所提方法能够通过 p 阶导数约束展宽零陷,可以较好地抵抗快速移动干扰。而且由图1可知,阵元功率变化参数 γ 越大,优化矩阵 \mathbf{X} 所对应的发射方向图旁瓣越低,这是因为不同阵元功率变化越大,发射波形自由度越高,因此合成方向图质量越好。此外,为进一步验证本文所提方法与直接求解式(13)所得优化方向图一致,将两者所得优化方向图进行对比,如图2所示。两者所得方向图完全一致,具有相同的方向图匹配误

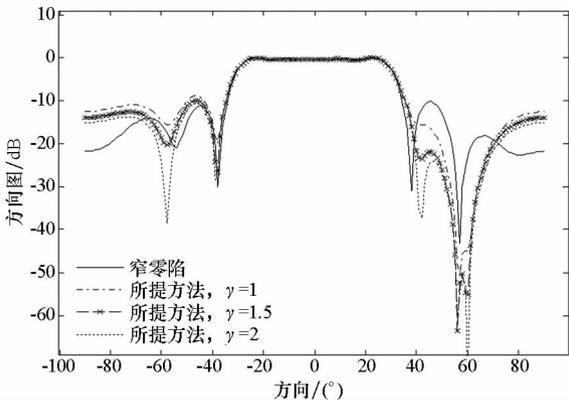


图1 MIMO雷达最优发射方向图

Fig. 1 Optimal transmit beampatterns of MIMO radar

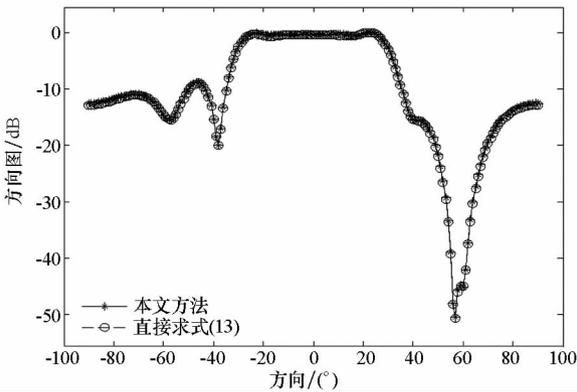


图2 所提方法与式(13)所得优化方向图

Fig. 2 Transmit beampatterns by the proposed method and equation (13)

差,但是直接求解式(13)计算复杂度为 $O((MN)^{3.5})$,而本文所提方法求解 P_3 计算复杂度仅为 $O(M^{3.5})$,在发射信号码长较大时,本文所提在空域上的波形优化方法比直接求解式(13)计算效率大幅提升。

为更好地分析基于随机向量合成方法和文献[15]所提循环算法(Cyclic Algorithm, CA)在干扰条件下合成波形的质量,令 $\gamma = 1$,基于两种

恒包络波形设计方法所得MIMO雷达发射方向图如图3所示。由图3可以直观看出,CA方法所得波形不能保证雷达发射方向图在干扰方向上形成满足条件的零陷,这是因为该循环算法在合成信号矩阵 \mathbf{S} 时,仅以最小二乘准则逼近矩阵 $\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{U}$,而没有考虑零陷约束。相比于CA算法,基于随机向量合成的波形设计方法以最小二乘准则逼近最优协方差矩阵,因此合成的波形不仅能够较好地匹配最优协方差矩阵 \mathbf{X} 所对应的发射方向图,而且能够保证在干扰方向形成满足一定宽度和深度的零陷。图4则表示了在不同功率变化参数 γ 优化情况下,本文所提方法合成的信号矩阵 \mathbf{S} 所对应的每个阵元的发射功率分配情况。虽然优化后的发射波形每个阵元发射功率不同,但是由于优化过程中定义发射空时序列协方差矩阵 $\mathbf{X} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}$,因此每个阵元发射波形仍然保持恒包络特性。

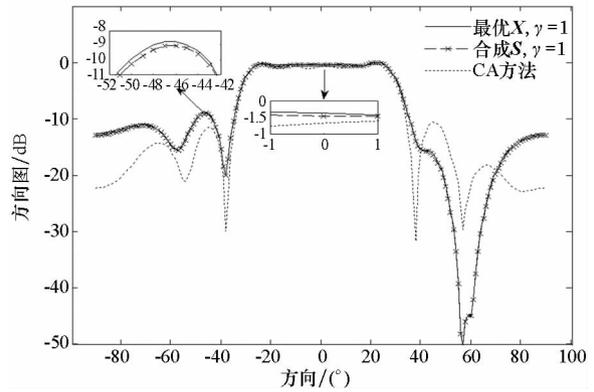


图3 不同波形设计方法形成的MIMO雷达发射方向图
Fig. 3 MIMO radar transmit beampatterns synthesized by different waveform design methods

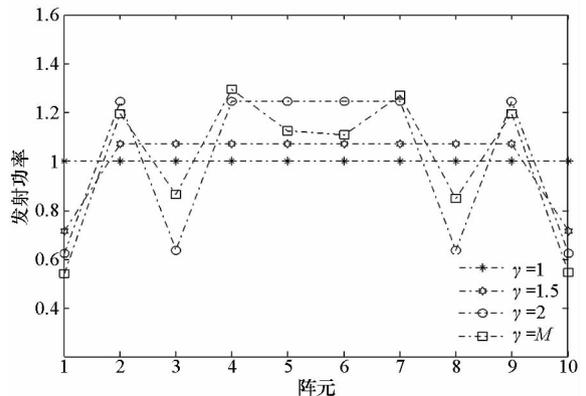


图4 不同 γ 条件下阵元发射功率

Fig. 4 Element transmit power with different γ

本文所提基于空频域联合优化MIMO雷达波形设计方法中,在利用随机向量合成方法对优化协方差矩阵分解得到具体发射波形时,随机化向

量实验次数直接决定所得波形质量。定义所得波形协方差矩阵 $\hat{\mathbf{X}}$ 与优化矩阵 \mathbf{X}^* 之间均方误差 (Mean-Squared Error, MSE) 为:

$$MSE = \|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}^*\|_2^2 \quad (30)$$

在 $\gamma = 1$ 、蒙特卡洛次数为 100 的条件下,波形合成均方误差随随机化实验次数的变化情况如图 5 所示。由图 5 可知,随着实验次数的增加波形合成误差变小,当 $Q \geq 800$ 时,合成波形误差几乎不变,因此当实验次数足够大时,合成波形能够较好地匹配优化协方差矩阵,从而保证发射方向图的质量。

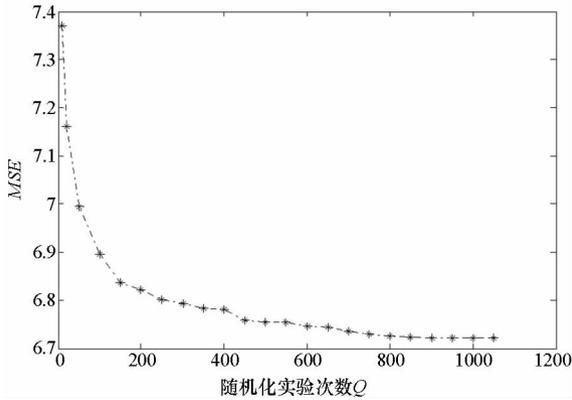


图 5 均方误差随实验次数变化情况

Fig. 5 MSE versus the number of experiments

设在频域上干扰信号归一化带宽为 $\Omega = [0.4, 0.5]$, 雷达发射信号在干扰频带内允许的最大发射功率为 $E_t = -40$ dB。在 $\gamma = 1$ 条件下,将本文所提空频域二次优化方法与式(13)仅在空域进行优化所得波形的功率谱密度进行对比,后者得到的优化波形功率谱在频域上任意分布,无法有效抵抗频域上的干扰,如图 6 所示。而本文所提基于频域二次优化后的 MIMO 雷达发射波形功率谱如图 7 所示。在保证 MIMO 雷达空域发射方向图不变的情况下,通过优化发射波形初始

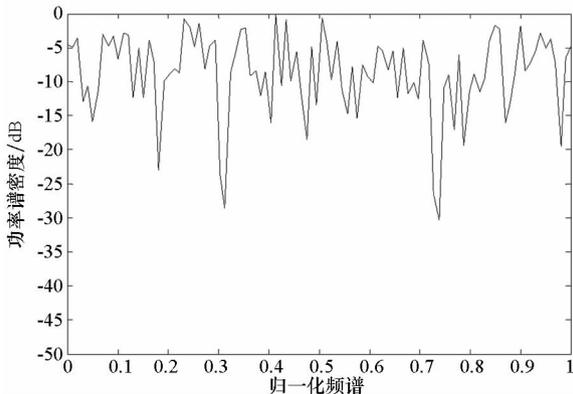


图 6 基于空域优化后的波形功率谱

Fig. 6 PSD of optimized waveforms via spatial optimization

相位矩阵 \mathbf{A} , 可以较好地控制波形频谱在干扰频带内总的发射功率,从而将雷达发射波形规避干扰带宽,实现频域上的干扰抑制。

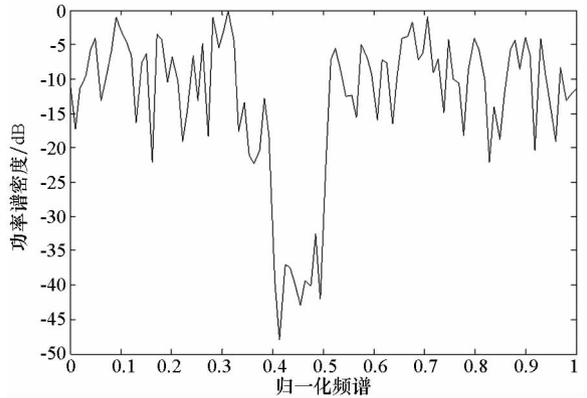


图 7 基于频域二次优化后的波形功率谱

Fig. 7 PSD of optimized waveforms via the second spectral optimization

4 结论

本文针对一般 MIMO 雷达波形设计方法不能在匹配期望发射方向图的同时抑制来自空域和频域的干扰问题,提出一种干扰条件下基于空频域二次优化的 MIMO 雷达波形设计方法。该方法首先利用 MIMO 雷达发射方向图表达式,将空域上方向图优化问题转化为关于雷达空时序列协方差矩阵 \mathbf{X} 的优化问题,并利用 MIMO 雷达发射方向图仅与不同阵元之间发射波形相关性有关这一特性,进一步降低空域上波形优化计算复杂度,针对空域上快速移动的干扰,通过 p 阶导数约束实现零陷展宽;通过优化得到最优协方差矩阵 \mathbf{X}^* 后,利用随机向量方法通过最小二乘准则逼近最优发射方向图来合成恒包络发射波形,不仅能够较好地匹配最优协方差矩阵 \mathbf{X}^* 所对应的发射方向图,而且能够保证在干扰方向形成满足一定宽度和深度的零陷;最后在空域优化得到的发射波形基础上,利用改变不同时刻信号序列的初始相位雷达发射方向图不变的特性,通过拟功率算法对相位变化矩阵 \mathbf{A} 进行优化,从而实现 MIMO 雷达发射波形在频域上的二次优化。实验仿真证明了所提方法在方向图设计和空频域干扰抑制方面的有效性。

参考文献 (References)

[1] Haimovich A M, Blum R S, Cimini L J. MIMO radar with widely separated antennas [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(1): 116 - 129.
 [2] 许红波, 王怀军, 陆珉, 等. 一种新的 MIMO 雷达 DOA 估计方法[J]. 国防科技大学学报, 2009, 31(3): 92 - 96.

- XU Hongbo, WANG Huaijun, LU Min, et al. A new algorithm on estimation of DOA using MIMO radar [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2009, 31(3): 92–96. (in Chinese)
- [3] Li J, Stocia P. MIMO radar with colocated antennas [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(5): 106–114.
- [4] Fuhrmann D R, Antonio G S. Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(1): 171–186.
- [5] Stocia P, Li J, Yao X. On probing signal design for MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8): 4151–4161.
- [6] Pandey N, Roy L P. Convex optimization based transmit beam pattern synthesis for MIMO radar [J]. Electronic Letters, 2016, 52(9): 761–763.
- [7] Ahmed S, Alouini M S. MIMO radar transmit beam pattern design without synthesising the covariance matrix [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(9): 2278–2289.
- [8] Imani S, Ghorashi S A, Bolhasani M. SINR maximization on colocated MIMO radars using transmit covariance matrix [J]. Signal Processing, 2016, 119: 128–135.
- [9] Khabbazbasmenj A, Hassanien A, Vorobyov S, et al. Efficient transmit beamspace design for search-free based DOA estimation in MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(6): 1490–1500.
- [10] Friedlander B. On transmit beamforming for MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(4): 3376–3388.
- [11] Li Y Z, Vorobyov S A, Koivunen V. Ambiguity function of the transmit beamspace-based MIMO radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(17): 4445–4457.
- [12] Hua G, Abeysekera S S. MIMO radar transmit beam pattern design with ripple and transition band control [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(11): 2963–2974.
- [13] Gong P C, Shao Z H, Tu G P, et al. Transmit beam pattern design based on convex optimization for MIMO radar systems [J]. Signal Processing, 2014, 94: 195–201.
- [14] Stocia P, Li J, Zhu X M. Waveform synthesis for diversity-based transmit beam pattern design [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2593–2598.
- [15] Tang B, Tang J. Joint design of transmit waveforms and receive filters for MIMO radar space time adaptive processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(18): 4707–4722.
- [16] Aubry A, De Maio A, Huang Y, et al. A new radar waveform design algorithm with improved feasibility for spectral coexistence [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1029–1038.
- [17] Soltanalian M, Stoica P. Designing unimodular codes via quadratic optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(5): 1221–1234.