

加肋圆柱壳结构的 FE - IE 算法网格尺度划分原则*

黄振卫,周其斗,方斌,谢剑波

(海军工程大学舰船工程系,湖北武汉 430033)

摘要:为了研究结构有限元耦合流体无限元算法的网格尺度划分原则,提出有限元-无限元算法中结构湿表面的网格尺度划分原则。数值计算结果表明,对加肋圆柱壳而言,在保证一个肋骨间距至少有2个有限元单元的前提下,将结构主振型弯曲波波长作为有限元-无限元算法中结构湿表面网格尺度划分的参考标准是可行的,即保证一个主振型分量波长内至少有6个有限元单元。提出以结构主振型分量的弯曲波波长(而不是最短的结构波长)作为有限元-无限元算法中网格尺度划分的参考标准,所得结论对于有限元-无限元算法中结构湿表面的网格划分以及控制内域流体有限元数量均具有十分重要的参考意义。

关键词:加肋圆柱壳;有限元-无限元算法;振动与声辐射;网格尺度

中图分类号:U661.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)03-179-06

Guidance of meshing scale of finite element coupled infinite element method for a ring stiffened cylindrical shell

HUANG Zhenwei, ZHOU Qidou, FANG Bin, XIE Jianbo

(Department of Naval Ship Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: In order to investigate the meshing scale of the FE - IE (finite element coupled infinite element) method for a ring stiffened cylindrical shell, the guidance was put forward for the structural wetted surface. Numerical results show that, for ring-stiffened cylindrical shells, the bending wavelength of the main vibration mode can be taken as the reference of meshing scale in FE - IE calculation which is testified with at least two finite elements per distance of stiffeners. There are at least six finite elements per one bending wavelength of the main vibration mode. The bending wavelength of the main vibration mode is used as the reference of meshing scale of FE - IE calculation rather than the shortest wavelength of structural waves. The obtained conclusions are significant to the meshing of structural wetted surface and the controlling of the total number of elements in the interior fluid region.

Key words: ring stiffened cylindrical shell; finite element coupled infinite element method; vibration and sound radiation; mesh scale

有限元-无限元(Finite Element coupled Infinite Element, FE - IE)算法在声学中的应用研究比较活跃^[1-9],新的理论和算法不断地出现和完善,其中 Astley-Leis 无限元^[1]和 Burnett 无限元^[2]最具代表性。但是不管是哪种无限元,其核心目标都是希望在保证计算精度的前提下尽量降低计算成本。对于一般结构而言,FE - IE 算法的人工边界的大小 r 可选取为结构几何直径的3倍^[3],人工边界的单元尺度可选取为1/6倍的声波波长,且靠近结构湿表面(结构物与水接触的外表面)的流体单元尺度等于结构湿表面上有限元单元尺度。此时,为了节约计算成本,应采用较大的单元尺度对结构湿表面进行有限元划分,以便于减少内域流体的有限元数量,但是这会由于

单元尺度无法描述结构湿表面上以及近场流体中短波的波动特性而导致计算精度降低。另一方面,为了保证计算精度,结构湿表面的单元尺度以及近场流体的单元尺度应该尽量小,但是这将导致实际大型复杂工程结构的求解规模急剧地增加,使得 FE - IE 算法的计算时间非常长。因此对于 FE - IE 算法,结构湿表面单元尺度的选取与计算精度和计算成本之间有个权衡的问题。目前很少有文献研究 FE - IE 算法中结构湿表面的单元尺度划分原则问题。

圆柱壳结构作为很多工程结构的典型结构^[10-11],对其 FE - IE 算法的网格尺度划分进行研究具有一定的指导意义。结构的振动可以通过傅里叶变换分解为一系列不同波长的振动分量的

* 收稿日期:2016-01-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51309230)

作者简介:黄振卫(1986—),男,湖北恩施人,博士研究生,E-mail: hzw125760220@126.com;

周其斗(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: qidou_zhou@126.com

叠加^[12],一般而言,应保证结构湿表面上最短的结构振动波长内至少有 6 个有限元单元^[13]。工程上,不能简单地采用最短的结构波长作为 FE-IE 算法中结构湿表面的有限元单元划分的参考标准,主要原因是通过分解得到的最短结构波长可以无限小,假如采用一个结构波长 6 个单元进行有限元划分,会导致结构湿表面以及内域流体的有限元数量呈级数式地增加,从而使得耦合系统的矩阵求解成本急剧增加。由于主振型分量的波长对流固耦合的计算具有重要的作用,因此文中以有限长加肋圆柱壳为研究对象,提出了 FE-IE 算法中结构湿表面的网格尺度划分原则,并通过 FE-IE 算法与有限元-边界元(Finite Element-Boundary Element, FE-BE)算法的数值计算结果的对比验证了该原则的有效性,FE-BE 算法程序的正确性在文献[14-15]中得到了很好的验证。

1 数学模型及有限元划分

以一个长 5.715 m,直径 1.27 m 的加肋圆柱壳为研究对象,壳体的内表面上均匀布置了 23 根肋骨,肋骨尺寸为 0.012 7 m × 0.050 8 m,壳体厚度为 0.006 35 m,两端盖板厚度为 0.025 m。幅值为 4.454 N 的激励力作用于中间肋骨上,激励力的方向为沿着径向指向壳体外部。加肋圆柱壳的材料密度为 7850 kg/m³,泊松比为 0.3,弹性模量为 2.06 × 10¹¹ N/m²,结构阻尼为 0.06。假设模型置于无限水深且为自由边界条件,周围流体的密度为 1030 kg/m³。采用 PATRAN 软件进行有限元建模,壳体表面和两端的端盖采用三角形单元进行划分,肋骨采用四边形单元进行划分。采用 NASTRAN 软件中 IE 算法计算加肋圆柱壳的振动与声辐射。无限元的计算阶次选取为 10。IE 算法的人工边界选取为一个长 10 m,半径为 5 m(大于 3 倍的结构几何直径)的圆柱面。人工边界采用三角形单元进行划分,人工边界与结构湿表面之间的内域流体采用四面体单元进行划分,内域流体的单元尺度从结构湿表面到人工边界逐渐增大,靠近结构湿表面的流体单元尺度较小,靠近人工边界的流体单元尺度较大。用于比较的 72 个声场点均分布于与柱壳中间肋骨同心,半径为 9 m 的圆周上,如图 1 所示。由于加肋结构的湿表面最大网格尺度只能为 0.238 m,即一个肋骨间距一个单元,因此,为了便于研究,将计算频率选取为 100 Hz、200 Hz、300 Hz、500 Hz。

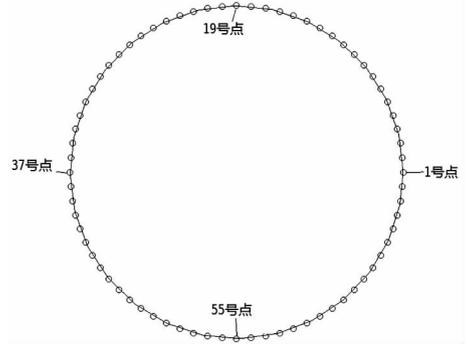


图 1 声场点分布

Fig. 1 Field point for acoustic computation

2 分离结构的主振型分量

本节采用自编波数谱程序分离有限长圆柱壳的主振型分量,该程序的正确性已在文献[16]中得到了很好的验证。为了描述有限长圆柱壳刚体运动的波数谱,将柱壳长度延长为原长度的 12 倍,并假定延长部分的外壳体法向速度为零^[16]。首先,采用 FE-BE 算法程序^[14]计算圆柱壳湿表面的法向位移复数幅值 $w(z, \theta)$, 即^[16]:

$$w(z, \theta) = \begin{cases} w_R + jw_I, & z \in [0, L] \\ 0, & z \notin [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

式中, w_R 为结构湿表面的法向位移的实部, j 为虚数, w_I 为结构湿表面的法向位移的虚部, L 是圆柱壳的长度。为了保证提取的圆柱壳的湿表面法向位移的正确性,加肋圆柱壳的每档肋骨间距采用 6 个单元进行划分,周向采用 48 个单元进行划分。对法向位移的实部 w_R 沿柱壳的轴向和周向进行傅里叶变换,得到实部所代表的驻波场为:

$$\begin{aligned} w_R(z, \theta) e^{-j\omega t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^R \cos n\theta + b_n^R \sin n\theta) e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [A_n^R(k_z) \cos n\theta + \right. \\ &\quad \left. B_n^R(k_z) \sin n\theta] e^{-j\omega t} e^{jk_z z} dk_z \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中, k_z 为轴向波数, n 为柱壳周向上完整波的数量, a_n^R 、 b_n^R 、 $A_n^R(k_z)$ 、 $B_n^R(k_z)$ 均为分解系数。采用相同的处理方法可获得虚部所代表的驻波场为:

$$\begin{aligned} w_I(z, \theta) e^{-j\omega t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^I \cos n\theta + b_n^I \sin n\theta) e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [A_n^I(k_z) \cos n\theta + \right. \\ &\quad \left. B_n^I(k_z) \sin n\theta] e^{-j\omega t} e^{jk_z z} dk_z \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

圆柱壳法向速度的振动功率可表示为:

$$E_v^T = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} E_v(n, k_z) dk_z \quad (4)$$

式中, $E_v(n, k_z)$ 为振动分量 (n, k_z) 的法向速度振动功率谱,其表达式为:

$$E_v(n, k_z) = \begin{cases} \rho c w^2 [|A_n^R(k_z)|^2 + |A_n^I(k_z)|^2], & n=0 \\ \frac{\rho c w^2}{2} [|A_n^R(k_z)|^2 + |A_n^I(k_z)|^2 + |B_n^R(k_z)|^2 + |B_n^I(k_z)|^2], & n \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中, a 为圆柱半径, ρ 为密度, c 为声速, w 为圆频率。

采用式(5)绘制出结构法向速度振动功率随着结构轴向波数的变化曲线,根据该曲线的最大值提取出结构主振型分量(n, k_z),进而获得结构主振型分量的振动波长 $\lambda_z = 2\pi/k_z$ 。模型的法向速度振动功率谱($n=0, 1, \dots, 9$)如图2所示,从图2(a)可以看出,当 $n=2, k_z \times 12L/\pi = 34.01$ 时,结构在 100 Hz 时的主振型分量,对应的结构轴向波长为 4.03 m。分析圆柱壳周向方向上结构波的传播特

性,可以得到 $n=2$ 时,周向上的结构波长为 $2\pi a/n = 1.99$ m。采用相同的方法即可获得其他频率下结构的主振型分量,计算结果见表1。值得一提的是,图2中振动能量级大 3 dB,意味着携带的能量将增大一倍左右。对于图2(a)~(c)而言,主振型分量显然高出其他振动分量 3 dB 以上。对于图2(d)而言,在主振型分量左边有两个其他振动模式下携带能量最多的振动分量(与主振型分量相比,振动能量要小 2 dB 左右),且这两个振动分量对应的结构弯曲波波长比主振型分量的弯曲波波长小,换言之,只要单元尺度能够描述主振型分量的波动特性,那么结构单元尺度便能描述这两个其他振动模式下携带能量最多的振动分量。因此,为了便于工程应用,500 Hz 时仍然可以采用主振型分量的弯曲波波长作为单元划分的参考。

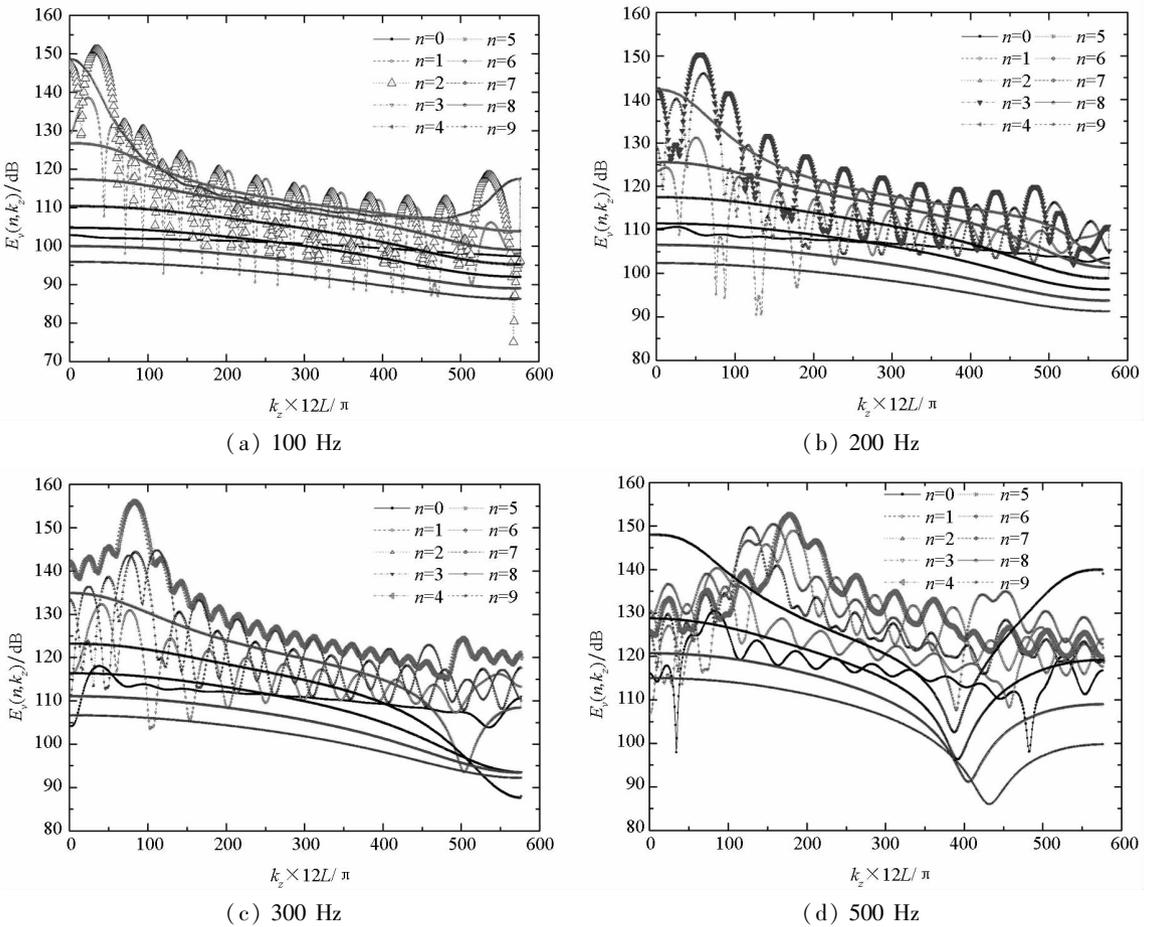


图2 模型法向速度振动功率谱

Fig. 2 Normal velocity vibration power wavenumber spectrums of the model

表1 结构主振型分量

Tab. 1 Main vibration mode

频率/Hz	n	λ_z/m	$(2\pi a/n)/m$	λ/m
100	2	4.03	1.99	14.5
200	3	2.45	1.33	7.25
300	4	1.67	1.00	4.83
500	4	0.77	1.00	2.9

图3为加肋圆柱壳模型的振型图,从图中可以看出,100 Hz 时模型的周向振动模式主要为 $n=2$, 200 Hz 时模型的周向振动模式主要为 $n=3$, 300 Hz、500 Hz 模型的周向振动模式主要为 $n=4$, 与波数谱分析结论一致;随着激励频率的增高,模型表面肋骨间的板格振动更加明显。

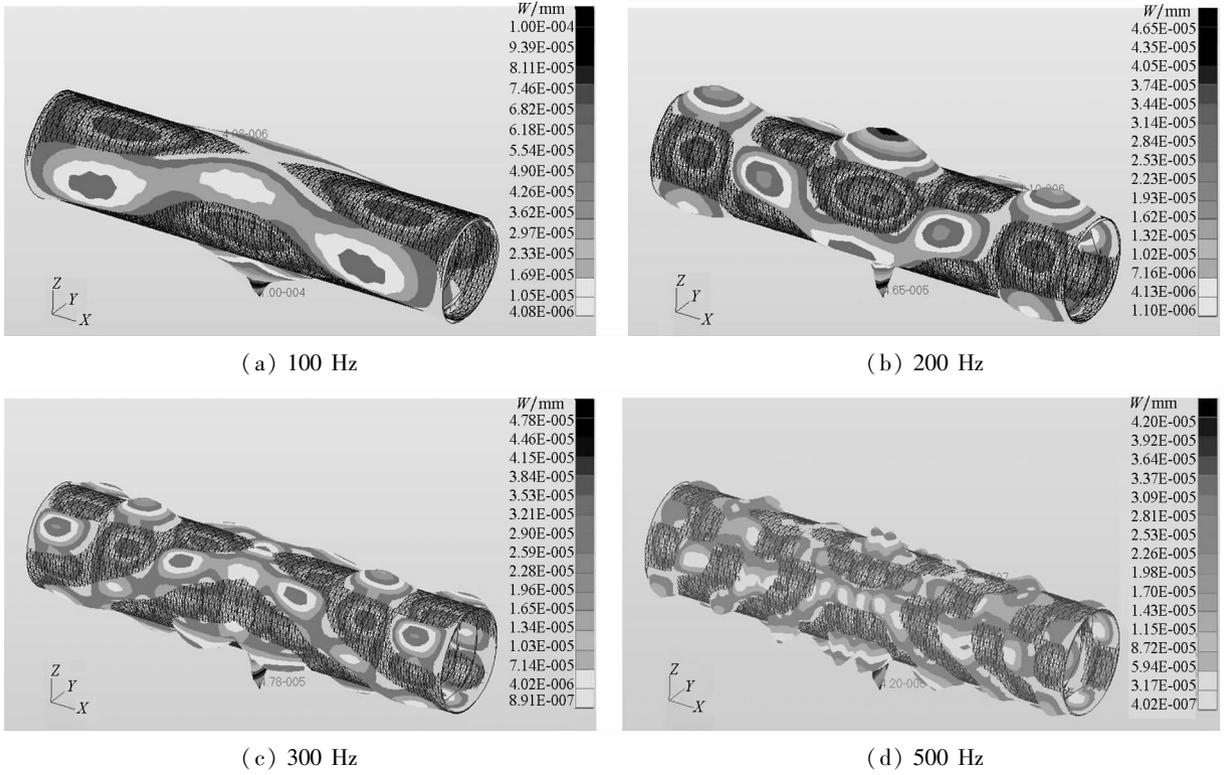


图 3 加肋圆柱壳模型的振型

Fig. 3 Vibration shape of the cylindrical shell mode

3 数值分析

由于加肋圆柱壳的振动与声辐射缺乏理论解,文中将逐步加密结构湿表面上的网格,观察 FE - IE 算法的计算结果是否趋于稳定,并与 FE - BE 程序^[14]计算结果进行对比。为了保证参与对照的 FE - BE 算法的计算精度,加肋圆柱壳的每档肋骨间距仍然采用 6 个有限元单元进行划分,周向采用 48 个有限元单元进行划分。根据第 2 节波数谱的计算结果,设计计算工况如表 2 所示,其中 L_z 为湿表面的有限元单元尺度, $N_z = \lambda_z / L_z$ 为一个主振型波长内的有限元单元数量, L_A 为人工边界的单元尺度。100 Hz 时, $L_A = 2.416$ m; 200 Hz 时, $L_A = 1.208$ m; 300 Hz 时, $L_A = 0.805$ m; 500 Hz 时, $L_A = 0.48$ m。

表 2 计算工况

Tab. 2 Computational cases

频率/Hz	N_z	L_z /m
100	101, 68, 34, 17	0.04, 0.059, 0.119, 0.238
200	61, 42, 21, 10	0.04, 0.059, 0.119, 0.238
300	42, 28, 14, 7	0.04, 0.059, 0.119, 0.238
500	19, 13, 6, 3	0.04, 0.059, 0.119, 0.238

图 4 ~ 7 为各工况下辐射声压级的 FE - IE 算法计算值对比,从图中可以看出:

1) 激励频率为 100 Hz 时,随着结构湿表面上有限元单元尺度的减小,FE - IE 算法的计算结果趋于稳定,且与 FE - BE 算法的计算结果吻合良好。结构湿表面上有限元单元尺度为 $L_z = 0.238$ m 时(一个肋骨间距一个有限元单元),虽然保证了一个主振型波长内 17 个有限元单元,但是 FE - IE 算法的计算结果与 FE - BE 算法的计算误差仍然较大;

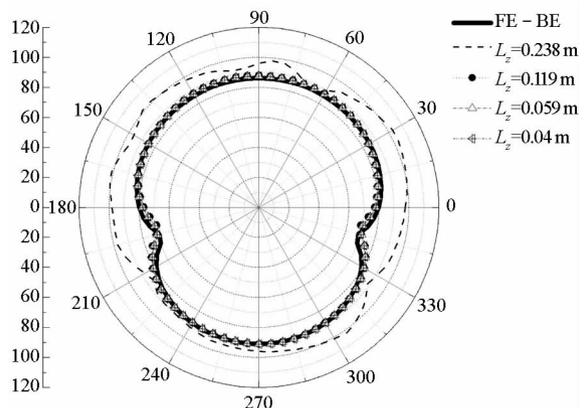


图 4 加肋圆柱壳在 100 Hz 时的声压级
Fig. 4 Numerical sound pressure level of the ring stiffened cylindrical shell at 100 Hz

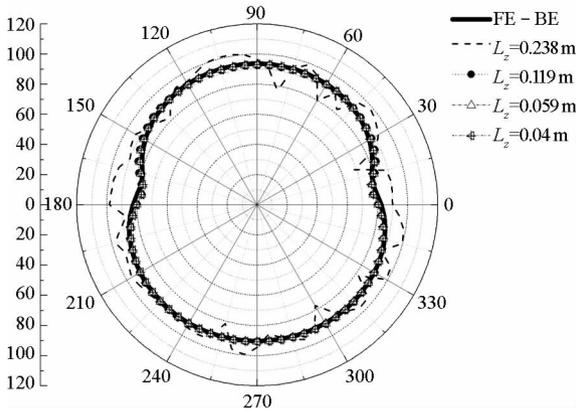


图 5 加肋圆柱壳在 200 Hz 时的声压级
Fig.5 Numerical sound pressure level of the ring stiffened cylindrical shell at 200 Hz

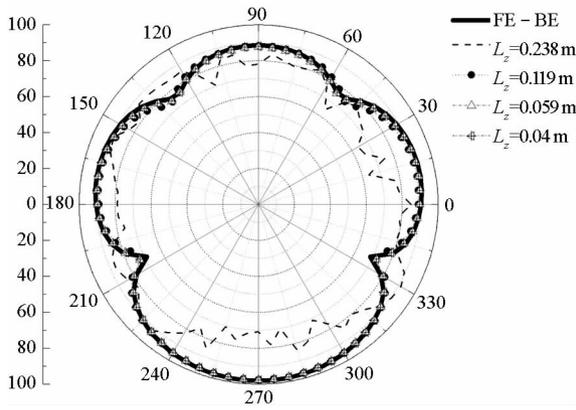


图 6 加肋圆柱壳在 300 Hz 时的声压级
Fig.6 Numerical sound pressure level of the ring stiffened cylindrical shell at 300 Hz

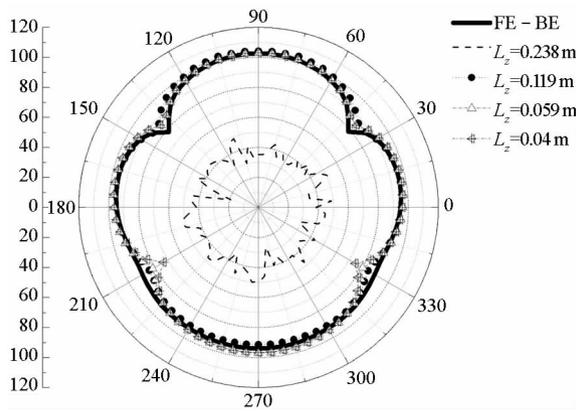


图 7 加肋圆柱壳在 500 Hz 时的声压级
Fig.7 Numerical sound pressure level of the ring stiffened cylindrical shell at 500 Hz

2) 激励频率为 200 Hz 时,随着结构湿表面单元尺度的减小,FE - IE 算法的计算结果趋于稳定,且与 FE - BE 算法的计算结果吻合良好。结构湿表面上有限元单元尺度为 $L_z = 0.238$ m 时(一个肋骨间距一个有限元单元),虽然保证了一

个主振型波长内 10 个有限元单元,但是 FE - IE 算法的计算结果与 FE - BE 算法的计算误差仍然较大;

3) 激励频率为 300 Hz 时,随着结构湿表面上有限元单元尺度的减小,FE - IE 算法的计算结果趋于稳定,且与 FE - BE 算法的计算结果吻合良好。结构湿表面上有限元单元尺度为 $L_z = 0.238$ m 时(一个肋骨间距一个有限元单元),虽然保证了一个主振型波长内 7 个有限元单元,但是 FE - IE 算法的计算结果与 FE - BE 算法的计算误差仍然较大;

4) 激励频率为 500 Hz 时,随着结构湿表面上有限元单元尺度的减小,FE - IE 算法的计算结果趋于稳定,但与 FE - BE 算法的计算结果有一定的差别。结构湿表面上有限元单元尺度为 $L_z = 0.238$ m 时,一个主振型波长内只有大约 3 个有限元单元,此时 FE - IE 算法的计算结果与湿表面网格加密后的计算结果差别非常大。而结构湿表面上有限元单元尺度为 $L_z = 0.119$ m 时,保证了一个肋骨间距 2 个有限元单元,一个主振型波长内大约有 6 个有限元单元,此时 FE - IE 算法的计算结果与湿表面网格加密后 FE - IE 算法的计算结果吻合良好。500 Hz 时湿表面网格加密后 FE - IE 算法的计算结果与 FE - BE 算法的计算结果有一定差别的原因是此时近场效应对 FE - IE 算法的影响更为明显,此时人工边界应该选取在距离结构湿表面更远的位置或者采用更小的有限元单元尺度划分人工边界。

总的来说,对于加肋结构而言,在保证一个肋骨间距至少 2 个有限元单元的前提下,将结构主振型弯曲波长作为 FE - IE 算法中结构湿表面网格尺度划分的参考标准是可行的,即保证一个主振型分量波长内至少有 6 个有限元单元。值得注意的是,此时结构湿表面上有限元单元尺度能够描述结构的几何特性和结构中携带能量最大的振动分量,进而保证了 FE - IE 算法的计算精度。若将结构湿表面上的有限元单元尺度进一步减小或者增大,都会导致对应的计算成本的增加或计算精度的损失。

为了进一步应用 FE - IE 算法的网格划分原则,本节将计算 50 ~ 500 Hz 时外域声场中的 $A(0\text{ m}, 0\text{ m}, 100\text{ m})$ 点的辐射声压级。为了保证计算精度,加肋圆柱壳每个肋骨间距采用 2 个有限元单元进行划分($L_z = 0.119$ m),人工边界为一个长 10 m,半径为 5 m 的圆柱面,人工边界的单元尺度为 0.48 m(500 Hz 时保证一个声波波长内

有 6 个单元)。A 点的辐射声压级传递函数频响曲线如图 8 所示,从图中可以看出,激励频率较低时,FE - IE 算法的辐射声压级传递函数频响曲线与 FE - BE 算法的频响曲线吻合良好;激励频率较高时,FE - IE 算法的辐射声压级传递函数频响曲线与 FE - BE 算法的频响曲线变化趋势一致。

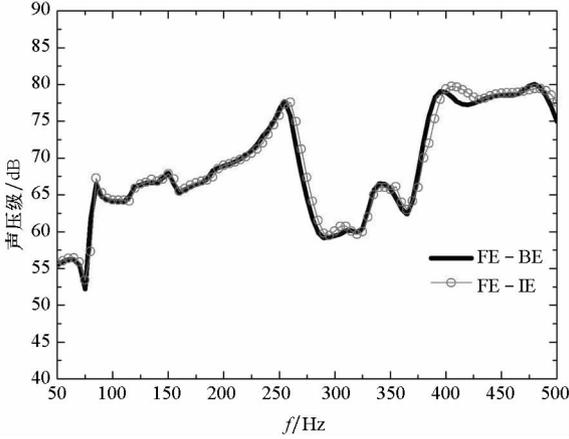


图 8 结构声学传递函数的 FE - IE 计算值
Fig. 8 Sound transfer function obtained by the FE - IE method

4 结论

本文以加肋圆柱壳为研究对象,重点采用波数谱方法分离结构的主振型分量,根据主振型分量的弯曲波波长提出 FE - IE 算法中结构湿表面的网格尺度划分原则,并采用 FE - IE 算法验证了该原则的有效性,计算结果表明,对文中算例而言,在保证一个肋骨间距至少 2 个有限元单元的前提下,将结构主振型弯曲波长作为 FE - IE 算法中结构湿表面网格尺度划分的参考标准是可行的,即保证一个主振型分量波长内至少有 6 个有限元单元。所得结论对于 FE - IE 算法的有限元模型的网格划分以及控制内域流体有限元数量具有十分重要的参考意义。

参考文献 (References)

[1] Astley R J, Hamilton J A. Numerical studies of conjugated infinite elements for acoustical radiation [J]. *Journal of Computational Acoustics*, 2000, 8(1): 1 - 24.
 [2] Burnett D S. A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, 96(5): 2798 - 2816.
 [3] Astley R J, Eversman W. Wave envelope and infinite element schemes for fan noise radiation from turbofan inlets [J]. *AIAA Journal*, 2012, 22(12): 1719 - 1726.
 [4] Burnett D S, Holford R L. An ellipsoidal acoustic infinite element [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

Engineering, 1998, 164(1/2): 49 - 76.
 [5] Shirron J J, Babuska I. A comparison of approximate boundary conditions and infinite element methods for exterior Helmholtz problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 164(1/2): 121 - 139.
 [6] Cremers L, Fyfe K R, Coyette J P. A variable order infinite acoustic wave envelope element [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 171(4): 483 - 508.
 [7] Dreyer D, Petersen S, VonEstorff O. On the efficiency of exterior acoustics simulations using improved infinite elements [C]//*Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA, 2004: 3778 - 3791.*
 [8] 吴国荣. 声辐射问题的一种新的无限元方法[J]. *船舶力学*, 2009, 13(4): 641 - 645.
 WU Guorong. A new infinite element method for acoustical radiation problems [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2009, 13(4): 641 - 645. (in Chinese)
 [9] 杨瑞梁, 范晓伟. 使用有限元和无限元耦合求解声辐射问题[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(2): 1007 - 1009.
 YANG Ruiliang, FAN Xiaowei. Finite/infinite element method for the acoustic radiating problem [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 1007 - 1009. (in Chinese)
 [10] 梁波. 弹性储液圆柱壳的动力特性分析[J]. *国防科技大学学报*, 1990, 12(2): 30 - 35.
 LIANG Bo. The dynamic characteristics analysis of flexible liquid storage cylinder [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 1990, 12(2): 30 - 35. (in Chinese)
 [11] 汤渭霖, 何兵蓉. 水中有限长加肋圆柱壳体振动与声辐射近似解析解[J]. *声学学报*, 2001, 26(1): 1 - 5.
 TANG Weilin, HE Bingrong. Approximate analytic solution of vibration and sound radiation from stiffened finite cylindrical shells in water [J]. *Acta Acustica*, 2001, 26(1): 1 - 5. (in Chinese)
 [12] Fahy F J, Gardonio P. *Sound and structural vibration* [M]. Academic Press, Oxford: Elsevier, 2007.
 [13] 宗福开. 波传播问题中有限元分析的频散特性及离散化准则[J]. *爆炸与冲击*, 1984(4): 18 - 25.
 ZONG Fukai. Frequency dispersion characteristic and discretization of the finite element analysis in wave propagation problems [J]. *Explosion and Shock Waves*, 1984(4): 18 - 25. (in Chinese)
 [14] Zhou Q, Joseph P F. A numerical method for the calculation of dynamic response and acoustic radiation from an underwater structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 283(3/4/5): 853 - 873.
 [15] Zhou Q, Zhang W, Joseph P F. A new method for determining acoustic added mass and damping coefficients of fluid-structure interaction [C]//*Proceedings of the 8th International Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures*, 2001: 1185 - 1195.
 [16] 谭路, 纪刚, 张纬康, 等. 采用波数域方法分析细长柱壳的振动与声辐射特性[J]. *海军工程大学学报*, 2013, 25(3): 66 - 71.
 TAN Lu, JI Gang, ZHANG Weikang, et al. Slender cylindrical vibration and radiation by use of wave-number domain approach [J]. *Journal of Naval University of Engineering*, 2013, 25(3): 66 - 71. (in Chinese)