

基于对偶四元数的航天器六自由度相对运动输入有界控制*

陈晨¹, 吴锦杰², 王小雨³, 李东旭⁴, 郑伟⁵

(1. 吉林大学仪器科学与电气工程学院, 吉林 长春 130061; 2. 中国人民解放军78009部队, 四川 成都 610000; 3. 中国电子科技集团第二十九研究所, 四川 成都 610036; 4. 空军航空大学飞行基础训练基地, 吉林 长春 130022; 5. 中国人民解放军61251部队, 河北 秦皇岛 066000)

摘要:利用对偶四元数的理论来分析航天器六自由度的相对运动,设计了一种考虑输入有界的姿轨一体化控制器。在介绍对偶数和对偶四元数的基础上推导六自由度相对运动的姿轨耦合模型;利用双曲正切函数绝对值小于1的特性来显式地构造有界控制器,分别设计两个相互耦合的自适应调节律来动态地改变控制器的输出,并基于李雅普诺夫稳定性理论严格证明了闭环系统的全局渐近稳定性;利用数学仿真实验来验证该控制器和控制力满足给定的约束条件,能够实现航天器六自由度相对运动的精确稳定控制,并且对模型参数不确定性和外界扰动具有鲁棒性。与其他方法相比,由该控制器计算得到的控制力矩器的收敛速度更快,输出的控制力矩和控制力的最大幅值更小,且消耗的能量也更少。

关键词:输入有界;耦合的自适应调节律;李雅普诺夫稳定性理论;航天器六自由度相对运动;对偶四元数
中图分类号:V448.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)04-006-09

Control for 6-DOF relative motion of spacecraft with input saturation constraint using dual quaternion

CHEN Chen¹, WU Jinjie², WANG Xiaoyu³, LI Dongxu⁴, ZHENG Wei⁵

(1. College of Instrumentation & Electrical Engineering, Jilin University, Changchun 130061, China;

2. The PLA Unit 78009, Chengdu 610000, China; 3. Southwest China Research Institute of Electronic Equipment, Chengdu 610036, China; 4. Basic Flight Training Base, Air Force Aviation University, Changchun 130022, China; 5. The PLA Unit 61251, Qinhuangdao 066000, China)

Abstract: The dual quaternion was used to investigate the 6-DOF (six degree-of-freedom) relative motion of spacecraft, and an integrated controller of attitude and orbit with input saturation constraint was designed. Firstly, the dual number and dual quaternion followed by the derivation of 6-DOF relative motion of attitude and orbit coupled model were introduced. Then, an explicitly bounded controller was proposed by using the property that the absolute value of hyperbolic tangent function was less than 1. Two coupled adaptive regulators were respectively designed to adjust the outputs of the controller dynamically. Thirdly, it is proved by a rigorous theoretical analysis that the closed-loop system is globally and asymptotically stable. Finally, numerical simulation experiment is implemented to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed controller. Experimental results show that both the obtained control torque and control force satisfy the given constraints, the 6-DOF relative motion of spacecraft can be controlled accurately and the method is robust to parameter uncertainties and external disturbance. Compared with other methods, the proposed method has the following advantages: the convergence rate is faster, the max magnitude of output control torque and control force are both smaller, and the consumed energy is less.

Key words: input saturation constraint; coupled adaptive regulators; theory of Lyapunov stability; six degree-of-freedom relative motion of spacecraft; dual quaternion

随着航天技术的突飞猛进,该领域的研究和应用已经从过去单颗航天器的在轨运行向两个及两个以上的航天器实现相对运动控制的方向发展,如航天器的编队飞行、交会对接等,这类复杂的航天任务要求对航天器的控制更快、更准且鲁

棒性更高。六自由度(six Degree-Of-Freedom, 6-DOF)相对运动包含了相对姿态运动和相对轨道运动,传统的处理方法是分别建模和分别控制。然而,由于这两种运动之间存在耦合特性,传统方法一般不能得到较好的结果。因此,需要研究航

* 收稿日期:2016-03-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61403160);第55批中国博士后面上基金资助项目(2014M551194);吉林省科技厅资助项目(20150414052GH,20140520118JH)

作者简介:陈晨(1983—),男,吉林长春人,副教授,博士,Email:cchen@jlu.edu.cn;
吴锦杰(通信作者),男,助理工程师,博士,Email:wujinjie746@163.com

天器姿态和轨道一体化建模和控制的新方法。

文献[1]基于非线性轨道动力学方程和修正罗德里斯参数建立了六自由度的相对运动模型;文献[2]结合相对轨道动力学模型和姿态动力学模型建立了姿轨一体化模型;文献[3]利用姿态欧拉角和相对位置矢量来建立编队飞行卫星线性化的六自由度相对运动模型,设计了自适应学习的协同控制器;文献[4]推导了航天器六自由度相对运动的总模型,比较了三种不同方法的控制性能。尽管它们分析了相对运动的姿轨耦合特性,但姿态和轨道分别考虑,这种描述方式的不统一不利于解决本质问题,不能称为真正意义上的姿轨一体化建模。为此,有学者^[5-6]基于旋量理论和对偶惯性算子来研究刚体的一般性运动。文献[7-8]推导了用单位对偶四元数表示的刚体转动和平动的动力学模型,并指出单位对偶四元数是单位四元数的自然扩展,能够同时表示旋转和平移;文献[9-12]则在对偶四元数的框架下推导了刚性航天器的相对运动模型,并设计了不同的控制算法。虽然利用这种新的模型和新的算法能够得到较为满意的控制效果,但是没有考虑到控制输入受限的情况。

在实际工程应用中,当系统的控制输入出现饱和时,控制器的输出将与被控对象的输入不一致,这样会降低闭环系统的性能,甚至引起整个系统的不稳定,从而导致航天任务的失败。因此,研究考虑输入有界的控制具有重要意义。国内外学者对这个问题进行了研究,并提出了不同的方法。在姿态控制方面,文献[13]提出了基于变结构控制的鲁棒容错控制器来解决挠性卫星推力器故障和控制输入饱和和受限的姿态控制问题;文献[14]设计了一种简易的饱和和比例微分(Proportional Differential, PD)控制器;文献[15]提出了带有指令滤波的自适应控制器来处理姿态控制中的输入受限、模型不确定性和外部扰动。在相对运动控制方面,文献[16]基于自适应 L_2 增益干扰抑制来设计满足输入有界约束的控制器;文献[17]将鲁棒控制与自适应控制结合起来,设计了能够显式解决输入饱和的控制器;文献[18]在传统的PD控制中增加了抗饱和控制和智能积分器,提高了所允许的饱和度以及抗扰动的能力;文献[19]使用了抗饱和策略和回溯法来设计鲁棒自适应的姿轨组合控制器;文献[20]综合了自适应方法和变结构控制,设计了考虑输入饱和的自适应变结构控制器。文献[18-20]的分析和推导均是基于对偶四元数的姿轨一体化模型。

1 系统模型

1.1 对偶数和对偶四元数

对偶数^[7-8]表示为 $\hat{z} = a + \varepsilon b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), a 和 b 分别为它的实部和对偶部, ε 为对偶因子。共轭对偶数表示为 $\hat{z}^* = a - \varepsilon b$, 当实部和对偶部均为向量时则为对偶向量 $\hat{z} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{b}$ 。

对偶四元数是元素为对偶数的四元数^[7-8], 它表示为 $\hat{q} = [\hat{q}_0 \ \hat{\mathbf{q}}_v]$, \hat{q}_0 和 $\hat{\mathbf{q}}_v$ 分别为对偶数和对偶向量。它也可以表示成元素为对偶数的四元数 $\hat{q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}'$, \mathbf{q} 和 \mathbf{q}' 均为四元数。对偶四元数的运算准则与四元数类似^[7-8], 如式(1)所示。

$$\begin{cases} \hat{q}^* = [\hat{q}_0 - \hat{\mathbf{q}}_v] \\ \hat{q} + \hat{p} = [\mathbf{q} \ \mathbf{q}'] + [\mathbf{p} \ \mathbf{p}'] \\ \lambda \hat{q} = [\lambda \hat{q}_0 \ \lambda \hat{\mathbf{q}}_v] \\ \hat{q} \circ \hat{p} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p} + \varepsilon (\mathbf{q}' \circ \mathbf{p} + \mathbf{q} \circ \mathbf{p}') \\ \|\hat{q}\|^2 = \hat{q} \circ \hat{q}^* \\ \hat{q}^{-1} = \hat{q}^* / \|\hat{q}\|^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中,“ \circ ”表示对偶四元数的乘法, \hat{q}^* 为共轭对偶四元数, $\|\hat{q}\|$ 为对偶四元数的范数, \hat{q}^{-1} 为对偶四元数的逆。

1.2 相对运动的姿轨耦合模型

如图1所示,取地心赤道惯性系为 $O_I - X_I Y_I Z_I$,主星和伴星轨道系分别为 $O_l - x_{l0} y_{l0} z_{l0}$ 和 $O_f - x_{f0} y_{f0} z_{f0}$ (原点位于星体质心, Y 轴由地心指向星体质心, Z 轴沿着轨道面的负法线方向, X 轴由右手法则得到),主星和伴星本体系分别为 $O_b - x_{b0} y_{b0} z_{b0}$ 和 $O_b - x_{fb} y_{fb} z_{fb}$,坐标轴固连在星体本体上,均沿着惯量主轴的三个方向。

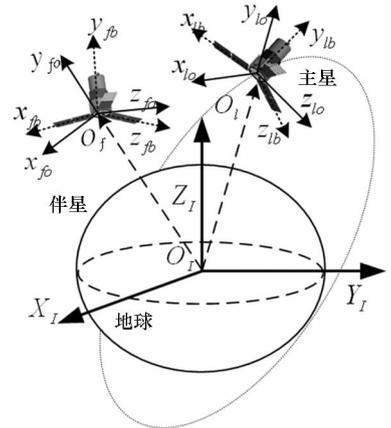


图1 六自由度相对运动的参考坐标系

Fig.1 Coordinate frames for 6-DOF relative motion

由旋量^[21]的理论,主星和伴星相对于地心赤道惯性系的运动包含了旋转和平移,因此可以用

对偶四元数表示为:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_{fb} = \mathbf{q}_{fb} + \varepsilon \frac{1}{2} \mathbf{q}_{fb} \circ \mathbf{P}_f^{fb} \\ \hat{\mathbf{q}}_{lb} = \mathbf{q}_{lb} + \varepsilon \frac{1}{2} \mathbf{q}_{lb} \circ \mathbf{P}_l^{lb} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\hat{\mathbf{q}}_{fb}$ 和 $\hat{\mathbf{q}}_{lb}$ 、 \mathbf{q}_{fb} 和 \mathbf{q}_{lb} 、 \mathbf{P}_f^{fb} 和 \mathbf{P}_l^{lb} 分别为伴星和主星的对偶四元数、四元数和位置矢量。

伴星相对于主星的一般性运动可以用伴星与主星的对偶四元数之积 $\hat{\mathbf{q}}_{fl} = \hat{\mathbf{q}}_{lb}^* \circ \hat{\mathbf{q}}_{fb}$ 来描述, 对它求微分得到:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{fl} &= \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{lb}^* \circ \hat{\mathbf{q}}_{fb} + \hat{\mathbf{q}}_{lb}^* \circ \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{fb} \\ &= -\frac{1}{2} \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{lb}^* \circ \hat{\mathbf{q}}_{fb} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{lb}^* \circ \hat{\mathbf{q}}_{fb} \circ \hat{\omega}_f^{fb} \\ &= -\frac{1}{2} \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{fl} \circ \hat{\omega}_f^{fb} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{fl} \circ (\hat{\omega}_f^{fb} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{fl} \circ \hat{\omega}_f^{fb} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\hat{\omega}_l^{lb}$ 和 $\hat{\omega}_f^{fb}$ 分别为主星和伴星的速度旋量, $\hat{\omega}_f^{fb}$ 为伴星相对于主星的速度旋量。刚体的对偶惯性算子 $\hat{M}^{[5]}$ 可以表示为对偶质量算子 \hat{m} 和对偶惯量算子 \hat{J} 之和, 即:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \hat{m} + \hat{J} = m \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{J} \\ &= \begin{bmatrix} m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{xx} & \varepsilon J_{xy} & \varepsilon J_{xz} \\ \varepsilon J_{xy} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{yy} & \varepsilon J_{yz} \\ \varepsilon J_{xz} & \varepsilon J_{yz} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, m 和 \mathbf{J} 分别为刚体的质量和转动惯量, $\frac{d}{d\varepsilon}$ 为对偶算子。由动量矩定理, 计算对偶动量 $\hat{h} = \hat{M}\hat{\omega}$ 的导数有:

$$\hat{F} = \dot{\hat{h}} = \hat{M} \dot{\hat{\omega}} + \hat{\omega} \times \hat{M}\hat{\omega} \quad (5)$$

其中, $\hat{F} = \mathbf{F} + \varepsilon \mathbf{T}$ 为作用在刚体质心上的对偶力, 它包括力 $\mathbf{F} \in \mathbf{R}$ 和力矩 $\mathbf{T} \in \mathbf{R}$ 。

对 $\hat{\omega}_f^{fb} = \hat{\omega}_f^{fb} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl}$ 左右两边求时间的导数, 代入式(3)得到:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} &= \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{fl} \\ &= \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} + \frac{1}{2} \hat{\omega}_f^{fb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} - \\ &\quad \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} \circ \hat{\omega}_f^{fb} \\ &= \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} + \frac{1}{2} (\hat{\omega}_f^{fb} \circ \hat{\omega}_l^{lb} - \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\omega}_f^{fb}) \\ &= \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} - \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} + \hat{\omega}_f^{fb} \times \hat{\omega}_l^{lb} \end{aligned} \quad (6)$$

由式(5)和式(6)整理得到用对偶四元数表示的伴星相对于主星的动力学方程^[20]为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_f^{fb} &= \hat{M}_f^{-1} \hat{F}^{fb} - \hat{M}_f^{-1} (\hat{\omega}_f^{fb} \times \hat{M}_f \hat{\omega}_f^{fb}) - \\ &\quad \hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl} + \hat{\omega}_f^{fb} \times (\hat{\mathbf{q}}_{fl}^* \circ \hat{\omega}_l^{lb} \circ \hat{\mathbf{q}}_{fl}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, \hat{M}_f 为伴星的对偶惯性算子, \hat{F}^{fb} 为对偶力在伴星本体系的分量。

利用对偶数的理论, 将式(7)展开为实数部分和对偶部分, 分别对应相对姿态运动和相对轨道运动, 如式(8)和式(9)所示。

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_f^{fb} &= -\mathbf{J}_f^{-1} [(\omega_f^{fb} + \mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb}) \times \mathbf{J}_f (\omega_f^{fb} + \mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb})] - \\ &\quad \mathbf{C}_{lb}^{fb} \dot{\omega}_l^{lb} + (\dot{\omega}_f^{fb}) \times \mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb} + \mathbf{J}_f^{-1} (\mathbf{T}_u^{fb} + \mathbf{T}_d^{fb}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_f^{fb} &= \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{P}}_f^{fb} + \omega_f^{fb} \times \mathbf{P}_f^{fb}) \\ &= -2\mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb} \times \dot{\mathbf{P}}_f^{fb} - \mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb} \times (\mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb} \times \mathbf{P}_f^{fb}) - \\ &\quad \mathbf{C}_{lb}^{fb} \dot{\omega}_l^{lb} \times \mathbf{P}_f^{fb} + \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_f^{fb}\|^3} \mathbf{C}_{lb}^{fb} \mathbf{P}_l^{lb} - \omega_f^{fb} \times \dot{\mathbf{P}}_f^{fb} - \\ &\quad \omega_f^{fb} \times (\omega_f^{fb} \times \mathbf{P}_f^{fb}) - 2\mathbf{C}_{lb}^{fb} \omega_l^{lb} \times (\omega_f^{fb} \times \mathbf{P}_f^{fb}) - \\ &\quad \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_f^{fb}\|^3} \mathbf{P}_f^{fb} + \frac{\mathbf{F}_u^{fb}}{m_f} + \frac{\mathbf{F}_d^{fb}}{m_f} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, ω_f^{fb} 、 \mathbf{V}_f^{fb} 和 \mathbf{P}_f^{fb} 分别为相对角速度、相对速度和相对位置, \mathbf{J}_f 和 m_f 分别为伴星的转动惯量和质量, ω_l^{lb} 为主星的角速度, \mathbf{C}_{lb}^{fb} 为主星本体系到伴星本体系的方向余弦阵, \mathbf{T}_u^{fb} 和 \mathbf{T}_d^{fb} 分别为控制力矩和扰动力矩, \mathbf{P}_l^{lb} 和 \mathbf{P}_f^{fb} 分别为主星和伴星的位置矢量, μ 为地球引力常数, \mathbf{F}_u^{fb} 和 \mathbf{F}_d^{fb} 分别为伴星的控制力和扰动力。从式(8)和式(9)可以看出, 相对轨道运动中包含了相对姿态运动中的 \mathbf{C}_{lb}^{fb} 和 ω_f^{fb} , 而相对姿态运动中的 \mathbf{T}_d^{fb} 则与 \mathbf{P}_f^{fb} 有关, 因此相对姿态运动和相对轨道运动是相互耦合的。

2 航天器相对运动输入有界控制

2.1 问题表述与分析

航天器携带的控制器件受自身的物理特性约束, 输出的力矩和力一般是有限的, 只能接近于一个最大值。假定伴星本体系三个惯量主轴方向上的控制力矩 $\mathbf{T}_{u,i}^{fb}$ 和控制力 $\mathbf{F}_{u,i}^{fb}$ 的绝对值均小于一个最大值, 即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_u^{fb} = (\mathbf{F}_u^{fb} + \varepsilon \mathbf{T}_u^{fb}) \in \{ | \mathbf{T}_{u,i}^{fb} | \leq \mathbf{T}_m^{fb}, | \mathbf{F}_{u,i}^{fb} | \leq \mathbf{F}_m^{fb} \} \\ i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\hat{\mathbf{F}}_u^{fb}$ 为控制力的对偶表示形式(参见式(5)), \mathbf{T}_u^{fb} 和 \mathbf{F}_u^{fb} 分别为控制力矩和控制力的矢量表示形式, \mathbf{T}_m^{fb} 和 \mathbf{F}_m^{fb} 分别为控制力矩和控制力的最大值。在这个约束条件下, 控制目标可以表

述为:对于相对运动的姿轨耦合模型,考虑模型参数不确定性和外界干扰的影响,设计一个满足式(10)的控制器 $\hat{\mathbf{F}}_u^{fb}$,使得系统的相对状态变量 $(\mathbf{q}_\eta)_v$ (误差四元数 \mathbf{q}_η 的矢量部分)、 $\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb}$ 、 \mathbf{P}_η^{fb} 和 \mathbf{V}_η^{fb} 均能够收敛到 $\mathbf{0}$,即:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} [(\mathbf{q}_\eta(t))_v] = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}_\eta^{fb}(t) = \mathbf{0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\eta^{fb}(t) = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\eta^{fb}(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (11)$$

2.2 自适应的鲁棒控制器设计

在设计控制器之前,先给出两个合理的假设。

假设1 伴星在三个惯量主轴方向上所受到的外部扰动力矩 $T_{d,i}^{fb}$ ($i=1,2,3$) 和扰动力 $\mathbf{F}_{d,i}^{fb}$ ($i=1,2,3$) 是有界的,且满足如下条件:

$$\mathbf{T}_d^{fb}(t) \in \left\{ \sum_{i=1}^3 |T_{d,i}^{fb}| \leq \hat{\mathbf{T}}_d < \mathbf{T}_m^{fb} \right\} \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_d^{fb}(t) \in \left\{ \sum_{i=1}^3 |\mathbf{F}_{d,i}^{fb}| \leq \hat{\mathbf{F}}_d < \mathbf{F}_m^{fb} \right\} \quad (13)$$

其中, $\hat{\mathbf{T}}_d$ 和 $\hat{\mathbf{F}}_d$ 分别为扰动力矩和扰动力绝对值之和的最大值,且它们分别小于伴星的控制力矩和控制力的最大值 \mathbf{T}_m^{fb} 和 \mathbf{F}_m^{fb} 。

假设2 伴星的最大控制力矩 \mathbf{T}_m^{fb} 和最大控制力 \mathbf{F}_m^{fb} 能够控制其姿态和轨道的运动,并且克服扰动力矩和扰动力的影响,即:

$$\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max} \geq \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{F}}_{d,i}^{fb})_{\max} \geq \mathbf{0} \quad (15)$$

其中, $\tilde{\mathbf{T}}_d^{fb} = \zeta_r + \mathbf{T}_d^{fb}$, $\zeta_r = -(\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb}) \times \mathbf{J}_f(\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb}) - \mathbf{J}_f(\mathbf{C}_{lb}^{fb} \dot{\boldsymbol{\omega}}_l^{fb})$, $\tilde{\mathbf{F}}_d^{fb} = m_f \zeta_t + \mathbf{F}_d^{fb}$, $\zeta_t = -\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb} \times (\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb} \times \mathbf{P}_\eta^{fb}) - \mathbf{C}_{lb}^{fb} \dot{\boldsymbol{\omega}}_l^{fb} \times \mathbf{P}_\eta^{fb} + \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_\eta^{fb}\|^3} \mathbf{C}_{lb}^{fb} \mathbf{P}_\eta^{fb} - \boldsymbol{\omega}_\eta^{fb} \times (\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb} \times \mathbf{P}_\eta^{fb}) - \frac{\mu}{\|\mathbf{P}_\eta^{fb}\|^3} \mathbf{P}_\eta^{fb}$ 。

根据上述两个假设,为实现式(11)所示的控制目标,给出如下定理。

定理 对于基于对偶四元数的相对运动姿轨耦合模型,在假设1和假设2的条件下,设计一种自适应的鲁棒控制器为:

$$\hat{\mathbf{F}}_u^{fb} = -\mathbf{F}_m^{fb} \tanh\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_t}{\delta_t^2 + \eta_t}\right) - \varepsilon \mathbf{T}_m^{fb} \tanh\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_r}{\delta_r^2 + \eta_r}\right) \quad (16)$$

其中, $\boldsymbol{\varphi}_t = \mathbf{V}_\eta^{fb} + \lambda_t^2 \mathbf{P}_\eta^{fb}$, $\boldsymbol{\varphi}_r = \boldsymbol{\omega}_\eta^{fb} + \lambda_r^2 (\mathbf{q}_\eta)_v$, η_t 和 η_r 均为大于0的常数, λ_t, δ_t 和 λ_r, δ_r 分别为平动部分和转动部分的自适应调节律,则:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{-\lambda_r}{4[1 - (\mathbf{q}_\eta)_s] + k_r} \cdot \left\{ \mathbf{T}_m^{fb} (\mathbf{q}_\eta)_v^T \left[\tanh\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_r}{\delta_r^2 + \eta_r}\right) + \tanh\left(\frac{\lambda_r^2 (\mathbf{q}_\eta)_v}{\delta_r^2 + \eta_r}\right) \right] + \alpha_r [(\mathbf{q}_\eta)^T (\mathbf{q}_\eta)_v + \beta_r] \right\} \quad (17)$$

$$\frac{d(\delta_r^2)}{dt} = \varepsilon_r \left\{ -6u \mathbf{T}_m^{fb} (\delta_r^2 + \eta_r) + \lambda_r^2 \alpha_r [(\mathbf{q}_\eta)^T (\mathbf{q}_\eta)_v + \beta_r] - \lambda_r^2 (\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb})^T (\mathbf{q}_\eta)_v \right\} \quad (18)$$

$$\dot{\lambda}_t = \frac{-\lambda_t}{(\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \mathbf{P}_\eta^{fb} + k_t} \cdot \left\{ \mathbf{F}_m^{fb} (\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \left[\tanh\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_t}{\delta_t^2 + \eta_t}\right) + \tanh\left(\frac{\lambda_t^2 (\mathbf{P}_\eta^{fb})}{\delta_t^2 + \eta_t}\right) \right] + \alpha_t [(\mathbf{V}_\eta^{fb})^T \mathbf{V}_\eta^{fb} + \beta_t] \right\} \quad (19)$$

$$\frac{d(\delta_t^2)}{dt} = \varepsilon_t \left\{ -6u \mathbf{F}_m^{fb} (\delta_t^2 + \eta_t) + \lambda_t^2 \alpha_t [(\mathbf{V}_\eta^{fb})^T \mathbf{V}_\eta^{fb} + \beta_t] - \lambda_t^2 (\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \mathbf{V}_\eta^{fb} \right\} \quad (20)$$

其中, $\alpha_r, \beta_r, k_r, \varepsilon_r, \alpha_t, \beta_t, k_t, \varepsilon_t$ 和 u 均是大于0的常数, u 的最小值为 $\underline{u} = x[1 - \tanh(x)]$, 这里的 x 满足方程 $e^{-2x} + 1 - 2x = 0$ 。

那么,由该控制器计算得到的控制力矩和控制力分别满足式(12)和式(13)中的约束条件,且整个闭环系统在该控制器的作用下能够达到式(11)所示的控制目标。

证明:整个过程分两步——判断控制力和控制力矩是否满足约束条件;分析闭环系统的稳定性。

1) 输入有界特性分析

根据双曲正切函数的定义有 $\tanh(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$, 那么可以得到 $|\tanh(\cdot)| < 1$ 。显然,式(16)所示控制器计算得到的控制力矩和控制力分别满足式(12)~(13)中的约束条件。

2) 系统稳定性分析

选取李雅普诺夫函数 \hat{V} 为:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= V_t(\mathbf{V}_\eta^{fb}, \mathbf{P}_\eta^{fb}, \lambda_t, \delta_t) + \varepsilon V_r(\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb}, \mathbf{q}_\eta, \lambda_r, \delta_r) \\ &= \left[\frac{1}{2} m_f (\mathbf{V}_\eta^{fb})^T \mathbf{V}_\eta^{fb} + \frac{1}{2} \lambda_t^2 (\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \mathbf{P}_\eta^{fb} + \frac{k_t}{2} \lambda_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_t} \delta_t^2 \right] + \\ &\quad \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb})^T \mathbf{J}_f \boldsymbol{\omega}_\eta^{fb} + 2\lambda_r^2 [1 - (\mathbf{q}_\eta)_s] + \frac{k_r}{2} \lambda_r^2 + \frac{1}{\varepsilon_r} \delta_r^2 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $(\mathbf{q}_\eta)_s$ 为 \mathbf{q}_η 的标量部分。显然有 $V_t \geq 0$ 和 $V_r \geq 0$ 成立。

对式(21)左右两边求时间的导数,并依据

式(9),得到 \dot{V}_t 和 \dot{V}_r 分别为:

$$\dot{V}_t = m_f (\mathbf{V}_\eta^{fb})^T \dot{\mathbf{V}}_\eta^{fb} + \lambda_t \dot{\lambda}_t (\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \mathbf{P}_\eta^{fb} + \lambda_t^2 (\mathbf{P}_\eta^{fb})^T \mathbf{V}_\eta^{fb} + k_t \lambda_t \dot{\lambda}_t + \frac{1}{\varepsilon_t} \frac{d(\delta_t^2)}{dt} \quad (22)$$

$$\dot{V}_r = (\boldsymbol{\omega}_\eta^{fb})^T \mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}}_\eta^{fb} + \lambda_r \dot{\lambda}_r \left\{ 4[1 - (\mathbf{q}_\eta)_s] + k_r \right\} + \lambda_r^2 (\mathbf{q}_\eta)_v^T \boldsymbol{\omega}_\eta^{fb} + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{d(\delta_r^2)}{dt} \quad (23)$$

首先,对于 \dot{V}_r , 由式(8)、 $(\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T (\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^\times = \mathbf{0}$ 和 $(\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T [(\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb})^\times \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_f (\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb})] \boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb} = \mathbf{0}$ 可以得到:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T \mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\beta}^{fb} &= -(\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T [(\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb})^\times \mathbf{J}_f (\mathbf{C}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_l^{fb}) + \\ &\quad \mathbf{J}_f (\mathbf{C}_{lb}^{fb} \dot{\boldsymbol{\omega}}_l^{fb})] + (\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T (\mathbf{T}_u^{fb} + \mathbf{T}_d^{fb}) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T (\boldsymbol{\zeta}^r + \mathbf{T}_u^{fb} + \mathbf{T}_d^{fb}) \end{aligned} \quad (24)$$

将式(24)和式(17)~(18)代入式(23),并根据假设2中的等式,整理得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= (\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb})^T (\boldsymbol{\zeta}^r + \mathbf{T}_u^{fb} + \mathbf{T}_d^{fb}) - \lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v^T \mathbf{T}_m^{fb} \cdot \\ &\quad \left[\tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_r}{\delta_r^2 + \eta_r} + \tanh \frac{\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v}{\delta_r^2 + \eta_r} \right] - \\ &\quad 6u \mathbf{T}_m^{fb} (\delta_r^2 + \eta_r) \\ &= \boldsymbol{\varphi}_r^T \left(\tilde{\mathbf{T}}_d^{fb} - \mathbf{T}_m^{fb} \tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_r}{\delta_r^2 + \eta_r} \right) - \lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v^T \cdot \\ &\quad \left[\tilde{\mathbf{T}}_d^{fb} + \mathbf{T}_m^{fb} \tanh \frac{\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v}{\delta_r^2 + \eta_r} \right] - 6u \mathbf{T}_m^{fb} (\delta_r^2 + \eta_r) \end{aligned} \quad (25)$$

利用双曲正切函数的特殊性质 $0 \leq |x| (1 - \tanh |x/y|) \leq u |y|$, 对式(25)作进一步分析有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r1} &= \boldsymbol{\varphi}_r^T \left(\tilde{\mathbf{T}}_d^{fb} - \mathbf{T}_m^{fb} \tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_r}{\delta_r^2 + \eta_r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\varphi}_{r,i} \left(\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb} - \mathbf{T}_m^{fb} \tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_{r,i}}{\delta_r^2 + \eta_r} \right) \\ &\leq \|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max} - \mathbf{T}_m^{fb} \sum_{i=1}^3 |\boldsymbol{\varphi}_{r,i}| \tanh \frac{|\boldsymbol{\varphi}_{r,i}|}{\delta_r^2 + \eta_r} \\ &= \|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max} - \mathbf{T}_m^{fb} \sum_{i=1}^3 |\boldsymbol{\varphi}_{r,i}| \tanh \frac{|\boldsymbol{\varphi}_{r,i}|}{\delta_r^2 + \eta_r} + \\ &\quad \mathbf{T}_m^{fb} \left(\sum_{i=1}^3 |\boldsymbol{\varphi}_{r,i}| - \|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 \right) \\ &= -\|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] + \\ &\quad \mathbf{T}_m^{fb} \sum_{i=1}^3 |\boldsymbol{\varphi}_{r,i}| \left(1 - \tanh \frac{|\boldsymbol{\varphi}_{r,i}|}{\delta_r^2 + \eta_r} \right) \\ &\leq -\|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] + 3u \mathbf{T}_m^{fb} (\delta_r^2 + \eta_r) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r2} &= -\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v^T \left[\tilde{\mathbf{T}}_d^{fb} + \mathbf{T}_m^{fb} \tanh \frac{\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v}{\delta_r^2 + \eta_r} \right] \\ &\leq \|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max} - \mathbf{T}_m^{fb} \sum_{i=1}^3 |\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v|_i \left[\tanh \frac{[\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v]_i}{\delta_r^2 + \eta_r} \right] + \\ &\quad \mathbf{T}_m^{fb} \left(\sum_{i=1}^3 |\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v|_i - \|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 \right) \\ &= -\|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] + \\ &\quad \mathbf{T}_m^{fb} \sum_{i=1}^3 \left\{ |\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v|_i \left(1 - \tanh \frac{[\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v]_i}{\delta_r^2 + \eta_r} \right) \right\} \\ &\leq -\|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] + 3u \mathbf{T}_m^{fb} (\delta_r^2 + \eta_r) \end{aligned} \quad (27)$$

将式(26)~(27)代入式(25),并且由式(14)得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &\leq -\|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] - \\ &\quad \|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] \\ &\leq -[\|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 + \|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1] [\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}] \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

从式(28)可以判断 $\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb}$ 、 \mathbf{q}_{β} 、 λ_r 、 δ_r 是一致有界的。对式(28)积分有:

$$\begin{aligned} &-\frac{V_r(\infty) - V_r(0)}{\mathbf{T}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{T}}_{d,i}^{fb})_{\max}} \\ &\geq \int_0^{\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_r\|_1 dt + \int_0^{\infty} \|\lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1 dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \|\boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb}\|_1 dt \end{aligned} \quad (29)$$

由 Barbalat 引理^[22]可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}_{\beta}^{fb} = \mathbf{0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_r^2 (\mathbf{q}_{\beta})_v = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30)$$

由式(17),对其左右两边乘以 λ_r , 并利用 $|\tanh(x)| \leq 1$ 的特性有:

$$\lambda_r \dot{\lambda}_r \geq \frac{-2\lambda_r^2 \mathbf{T}_m^{fb} \|(\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1}{4[1 - (\mathbf{q}_{\beta})_s] + k_r} - \lambda_r^2 \alpha_r [(\mathbf{q}_{\beta})^T (\mathbf{q}_{\beta})_v + \beta_r] \quad (31)$$

对式(31)左右两边从 0 到 ∞ 积分得到:

$$\begin{cases} \lambda_r^2(\infty) \geq \lambda_r^2(0) - 2 \int_0^{\infty} \lambda_r^2 \rho_r dt \\ \rho_r = \frac{2\mathbf{T}_m^{fb} \|(\mathbf{q}_{\beta})_v\|_1}{4[1 - (\mathbf{q}_{\beta})_s] + k_r} + \alpha_r [\boldsymbol{\varphi}_r^T \boldsymbol{\varphi}_r + \beta_r] > 0 \end{cases} \quad (32)$$

因此,存在一个 $\underline{\lambda}_r > 0$, 使得 $\lambda_r(t) \geq \underline{\lambda}_r$ 成立。那么,可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{q}_{\beta})_v = \mathbf{0}$ 。转动部分的稳定性证毕。

同样地,对于 \dot{V}_t 。由式(9)、 $(\mathbf{V}_{\beta}^{fb})^T (\mathbf{V}_{\beta}^{fb})^\times = \mathbf{0}$ 和 $(\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^\times = \mathbf{0}$ 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= (\mathbf{V}_{\beta}^{fb})^T [m_f \boldsymbol{\zeta}_t + \mathbf{F}_u^{fb} + \mathbf{F}_d^{fb}] + \\ &\quad \lambda_t \dot{\lambda}_t [(\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \mathbf{P}_{\beta}^{fb} + k_t] + \lambda_t^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \mathbf{V}_{\beta}^{fb} + \frac{1}{\varepsilon_t} \frac{d(\delta_t^2)}{dt} \end{aligned} \quad (33)$$

再将式(19)~(20)代入式(33),采用与式(25)类似的分析方法得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= (\mathbf{V}_{\beta}^{fb})^T (\mathbf{F}_u^{fb} + \tilde{\mathbf{F}}_d^{fb}) - \lambda_t^2 \mathbf{F}_m^{fb} (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \cdot \\ &\quad \left[\tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_t}{\delta_t^2 + \eta_t} + \tanh \frac{\lambda_t^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})}{\delta_t^2 + \eta_t} \right] - 6\mu \mathbf{F}_m^{fb} (\delta_t^2 + \eta_t) \\ &= \boldsymbol{\varphi}_t^T \left(\tilde{\mathbf{F}}_d^{fb} - \mathbf{F}_m^{fb} \tanh \frac{\boldsymbol{\varphi}_t}{\delta_t^2 + \eta_t} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \left[\tilde{\mathbf{F}}_d^{fb} + \tanh \frac{\lambda_r^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})}{\delta_i^2 + \eta_i} \right] - 6\mu \mathbf{F}_m^{fb} (\delta_i^2 + \eta_i) \\ & \leq - \|\boldsymbol{\varphi}_i\|_1 \left[\mathbf{F}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{F}}_{d,i}^{fb}) \right] - \|\lambda_i^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T\|_1 \left[\mathbf{F}_m^{fb} - \right. \\ & \quad \left. (\tilde{\mathbf{F}}_{d,i}^{fb})_{\max} \right] \\ & \leq - \left[\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_1 + \|\lambda_i^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T\|_1 \right] \left[\mathbf{F}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{F}}_{d,i}^{fb})_{\max} \right] \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

从式(34)可以判断 $\mathbf{V}_{\beta}^{fb}, \mathbf{P}_{\beta}^{fb}, \lambda_i, \delta_i$ 是一致有界的。对式(34)积分有:

$$\begin{aligned} & \frac{V_i(\infty) - V_i(0)}{\mathbf{F}_m^{fb} - (\tilde{\mathbf{F}}_d^{fb})_{\max}} \\ & \geq \int_0^\infty \|\boldsymbol{\varphi}_i\|_1 dt + \int_0^\infty \|\lambda_i^2 (\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T\|_1 dt \\ & \geq \int_0^\infty \|\mathbf{V}_{\beta}^{fb}\|_1 dt \end{aligned} \quad (35)$$

根据 Barbalat 引理^[22] 有:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{\beta}^{fb} = \mathbf{0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i^2 \mathbf{P}_{\beta}^{fb} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (36)$$

根据式(19)有:

$$\lambda_i \dot{\lambda}_i = \frac{-2\lambda_r^2 \mathbf{F}_m^{fb} \|\mathbf{P}_{\beta}^{fb}\|_1}{(\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \mathbf{P}_{\beta}^{fb} + k_i} - \lambda_r^2 \alpha_i [\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i + \beta_i] \quad (37)$$

对式(37)左右两边从0到 ∞ 积分得到:

$$\begin{cases} \lambda_i^2(\infty) \geq \lambda_i^2(0) - 2 \int_0^\infty \lambda_i^2 \rho_i dt \\ \rho_i = \frac{2\mathbf{F}_m^{fb} \|\mathbf{P}_{\beta}^{fb}\|_1}{(\mathbf{P}_{\beta}^{fb})^T \mathbf{P}_{\beta}^{fb} + k_i} + \alpha_i [\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i + \beta_i] > 0 \end{cases} \quad (38)$$

因此,存在 $\underline{\lambda}_i > 0$, 使得 $\lambda_i(t) \geq \underline{\lambda}_i$ 成立。那么有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\beta}^{fb} = \mathbf{0}$ 。□

备注1 式(16)所示的控制器与 \mathbf{J}_f 和 m_f 无关,而且在定理的证明过程中, \dot{V}_r 和 \dot{V}_i 包含了 \mathbf{J}_f 、 m_f 和外界扰动,因此该控制器对模型参数的不确定性和外界扰动具有鲁棒性。

备注2 最大控制力矩 \mathbf{T}_m^{fb} 和最大控制力 \mathbf{F}_m^{fb} 是控制器的两个重要参数,它可以反映控制器的执行能力,并且会影响系统的收敛速率。在式(28)和式(34)中, \dot{V}_r 和 \dot{V}_i 分别是 \mathbf{T}_m^{fb} 和 \mathbf{F}_m^{fb} 的函数。如果最大控制力矩和最大控制力的取值较大,一方面可以加快系统的收敛速率,另一方面能够抵抗较大的外界干扰。

备注3 自适应调节律 λ_r, δ_i 和 λ_r, δ_r 是相互关联、相互耦合的,由于它们是双正切函数的自变量,因此初始值的选取必须适当,不能使得双正切函数的初值太大和太小。

备注4 由式(16), η_r 和 η_i 的主要作用是避免当自适应律 δ_r 和 δ_i 趋近于0时而出现奇异,因此 η_r 和 η_i 的取值必须较小。如果 η_r 和 η_i 的取值

偏大,会得到较小的双曲正切函数值,那么控制器的输出值也较小,可能会使得系统的收敛速度较慢。

备注5 由式(17)~(20), $\alpha_r, \beta_r, \alpha_i, \beta_i, k_r, k_i, \varepsilon_r, \varepsilon_i$ 的主要作用是避免出现自适应律 λ_r, δ_r 和 λ_i, δ_i 先于系统的状态变量趋近于0的情况。由于 α_r, β_r 和 α_i, β_i 位于分子的位置,它们的取值不能过大,而 k_r 和 k_i 位于分母的位置,它们的取值则不能过小。同样地, ε_r 和 ε_i 的取值不能过大。

备注6 在开始控制器设计前,给出了两个假设条件,从工程经验判断这两个假设条件是可以成立的;另外,在控制器的设计中引入了较多的参数,参数值的选择很重要,按照备注3~5给出的经验方法来取值,就能够得到较好的控制性能。因此,该控制器具有较好的普适性。

3 仿真实验与分析

为了验证本文提出的控制器是有效的和可行的,利用数值仿真(仿真步长为0.01 s,仿真时长为500 s)来进行实验验证,并且对其控制性能进行分析。假定主星运行在椭圆轨道上,它的轨道参数如表1所示。

表1 主星的轨道参数

Tab. 1 Orbital parameters for the leader spacecraft

半长轴 / km	偏心率	轨道倾角 / (°)	近地点角距 / (°)	升交点赤经 / (°)	真近点角 / (°)
6998.24	0.001	97.034 6	50	256.566	0

取伴星的最大控制力矩和最大控制力分别为 $\mathbf{T}_m^{fb} = 0.05 \text{ N} \cdot \text{m}$ 和 $\mathbf{F}_m^{fb} = 10 \text{ N}$, 它的转动惯量和质量为:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} 30 & 1 & 0.4 \\ 1 & 24 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 28 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\ m_f = 100 \text{ kg} \end{cases} \quad (39)$$

它在轨飞行中受到的扰动力主要为 \mathbf{J}_2 (取值0.001 082 6) 摄动力,假定其受到的扰动力矩为:

$$\mathbf{T}_u^{fb}(t) = 10^{-4} \begin{bmatrix} 5 \sin\left(\frac{\pi t}{100}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) + 2 \\ -4 \sin\left(\frac{\pi t}{80}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right) - 1 \\ 3 \sin\left(\frac{\pi t}{60}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{35}\right) + 3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

伴星与主星之间的相对位置和相对姿态的初始值如表 2 所示。

表 2 初始相对值

Tab.2 Initial relative value

相对位置 /m	相对姿态 / 相对速度 / (°)	相对速度 / m · s ⁻¹	相对姿态角速度 / (°) · s ⁻¹
[- 102.81, 152.27, 109.35] ^T	[- 24.83, - 27.53, 40.79] ^T	[- 1.23, - 0.35, - 0.02] ^T	[- 0.087, - 0.063, 0.055] ^T

本文控制器的参数取值为： $\lambda_r(0) = 0.72$, $\delta_r^2(0) = 0.4$, $\eta_r = 10^{-5}$, $\alpha_r = 0.065$, $\beta_r = 10^{-3}$, $\varepsilon_r = 0.12$, $k_r = 0.2$, $\lambda_i(0) = 0.31$, $\delta_i^2(0) = 5$, $\eta_i = 10^{-5}$, $\alpha_i = 0.001$, $\beta_i = 0.01$, $\varepsilon_i = 4 \times 10^{-4}$, $k_i = 10^5$, $u = 0.2785$ 。

由本文设计的控制器得到的数值仿真结果如图 2 ~ 7 中的上图和图 8、图 9 所示。图 2 和图 3 中的上图分别为误差四元数和相对姿态角速度的时间变化曲线,从图中可以得知转动部分的收敛时间约为 118 s;图 4 和图 5 中的上图分别为相对位置和相对速度的时间变化曲线,从图中可以得知平动部分的收敛时间约为 210 s;图 6 和图 7 中的上图分别为控制力矩和控制力的时间变化曲线,从图中可以看出,整个控制过程中的控制力矩和控制力的变化范围均满足给定的约束值;图 8 和图 9 分别为转动部分和平动部分对应的自适应调节律的时间变化曲线,从图中可以看出它们渐近地均趋向于一个大于 0 的常数。

因此,本文设计的控制器不需要预先知道航天器的转动惯量和质量大小,只依靠相互耦合的自适应调节律来动态地改变双正切函数的输出,即可得到有界的控制力矩和控制力,从而使得相对姿态运动和相对轨道运动均渐近地收敛到 0,并且能够克服外界扰动的影响,具有较好的鲁棒性。

为了体现本文方法较其他方法在控制性能上的优势,将本文的方法与文献[17]中的方法进行比较。用 $\Delta\omega$ 和 Δv 来衡量转动部分和平动部分的能量消耗。

$$\Delta\omega = \int_0^t \|\mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{T}(t)\| dt \quad (41)$$

$$\Delta v = \int_0^t \left\| \frac{1}{m_f} \mathbf{F}(t) \right\| dt \quad (42)$$

同样采用表 2 中的初始相对值,文献[17]中

的控制器的参数取值为： $\lambda_r(0) = 0.28$, $\beta_r = 0.02$, $\alpha_r = 20$, $\lambda_i(0) = 0.132$, $\beta_i = 2$, $\alpha_i = 5000$ 。

图 2 ~ 7 中的下图给出了由文献[17]的方法得到的数学仿真结果。图 2 和图 3 中的下图分别为文献[17]的方法所得到的误差四元数和相对姿态角速度的时间变化曲线,从图中可以得知转动部分的收敛时间约为 125 s。图 4 和图 5 中的下图分别为文献[17]的方法所得到的相对位置和相对速度的时间变化曲线,从图中可以得知平动部分的收敛时间约为 215 s。将图 2 ~ 5 中的上图和下图进行对比可以发现,本文方法在收敛速度上比文献[17]的方法要快。图 6 和图 7 中的下图分别为文献[17]的方法得到的控制力矩和控制力的时间变化曲线,通过与图 6 和图 7 中的上图进行比较可以发现,本文方法所对应的控制力矩和控制力的最大幅值均小于文献[17]的方法。图 10 为两种方法所对应的转动部分和平动部分的能量消耗比较。从图中可以看出,本文方法在转动部分和平动部分的控制过程中所消耗的能量均小于文献[17]的方法。

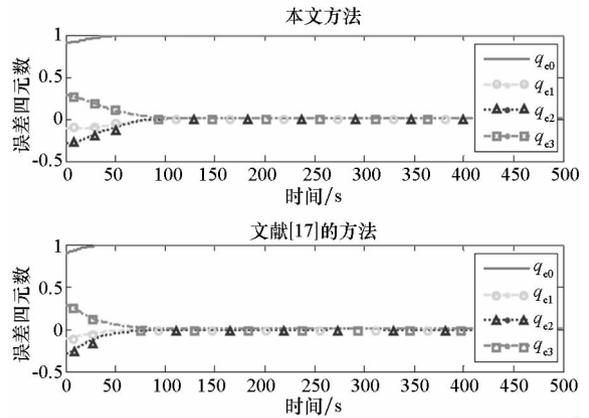


图 2 误差四元数
Fig.2 Error quaternion

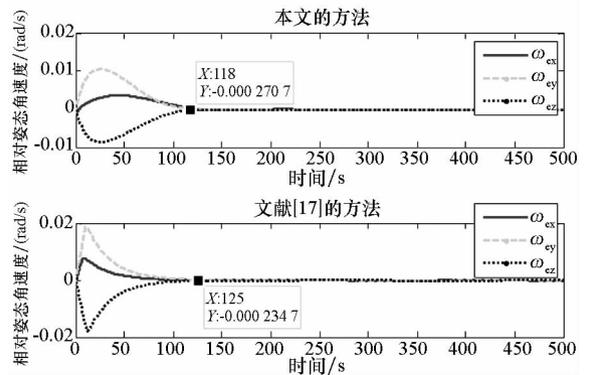


图 3 相对姿态角速度
Fig.3 Relative attitude angular velocity

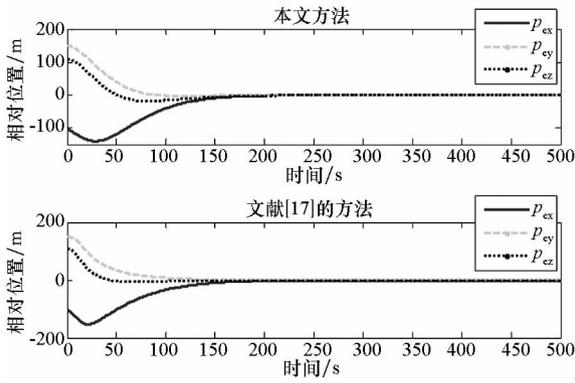


图4 相对位置
Fig.4 Relative position

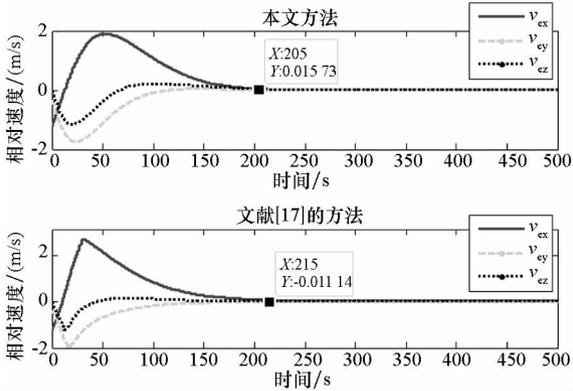


图5 相对速度
Fig.5 Relative velocity

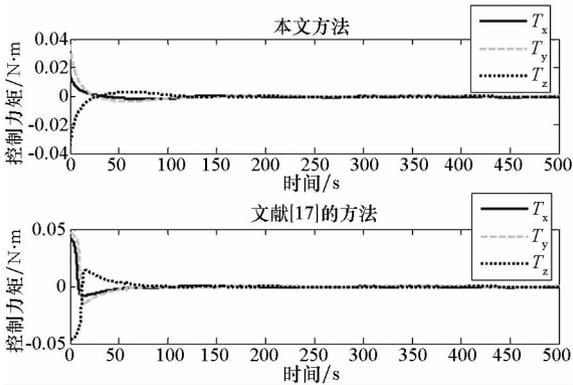


图6 控制力矩
Fig.6 Control torque

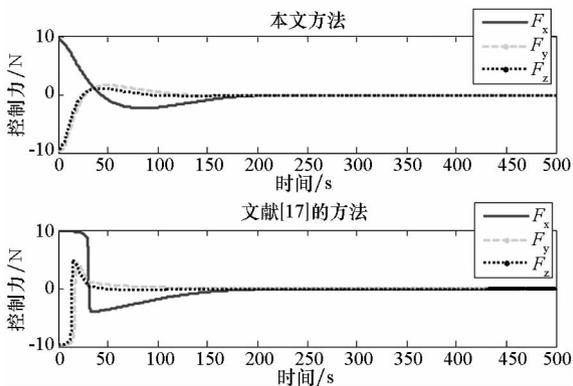


图7 控制力
Fig.7 Control force

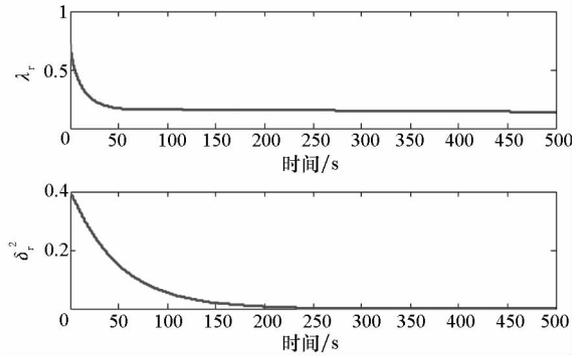


图8 本文方法得到的转动部分的自适应调节律
Fig.8 Adaptive regulation law of rotational part obtained by the proposed method

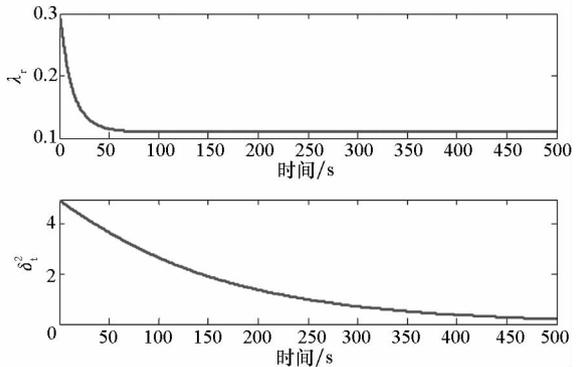


图9 本文方法得到的平动部分的自适应调节律
Fig.9 Adaptive regulation law of translational part obtained by the proposed method

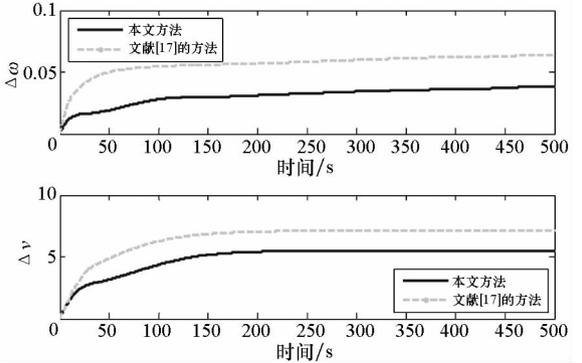


图10 两种方法的转动部分和平动部分控制的能量消耗比较
Fig.10 Comparison of fuel consumption for the control of rotational part and translational part between two methods

4 结论

本文使用对偶数和其对偶四元数来建模航天器的六自由度相对运动,分析和研究了考虑输入有界条件下的姿轨一体化控制问题,构造了基于双曲正切函数的有界控制器,设计了相互耦合的自适应调节律来动态地调整控制器的输出,基于李

雅普诺夫稳定性理论严格证明了闭环系统是全局渐近稳定的,并进行了数值仿真实验和性能比较分析。结果表明,本文方法在解决输入有界问题的同时,能够实现相对姿态运动和相对轨道运动的精确控制,且对模型参数不确定性和外界扰动具有较强的鲁棒性。与其他方法相比,本文控制器在收敛速度和能量消耗上具有优势,且输出的控制力矩和控制力的最大幅值更小。

参考文献 (References)

- [1] 铁钰嘉,岳晓奎,曹静. 基于航天器姿轨耦合模型的非线性前馈控制[J]. 中国空间科学技术, 2010, 30(6): 11-16.
TIE Yujia, YUE Xiaokui, CAO Jing. Nonlinear feed forward control on attitude and orbital coupling model for spacecraft[J]. Chinese Space Science and Technology, 2010, 30(6): 11-16. (in Chinese)
- [2] 廖飞,季海波,解永春. 追踪器本体坐标系下航天器姿轨一体化控制律设计[J]. 控制与决策, 2015, 30(9): 1679-1684.
LIAO Fei, JI Haibo, XIE Yongchun. Integrated orbit and attitude control for spacecraft in body fixed coordinate of chaser[J]. Control and Decision, 2015, 30(9): 1679-1684. (in Chinese)
- [3] Shan J J. Six-degree-of-freedom synchronized adaptive learning control for spacecraft formation flying [J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(10): 930-949.
- [4] Kristiansen R, Nicklasson P J, Gravdahl J T. Spacecraft coordination control in 6DOF: integrator backstepping vs passivity-based control [J]. Automatica, 2008, 44(11): 2896-2901.
- [5] Brodsky V, Shoham M. Dual numbers representation of rigid body dynamics[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(5): 693-718.
- [6] Pennock G R, Oncu B A. Application of screw theory to rigid body dynamics [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1992, 114(2): 262-269.
- [7] Wang X K, Yu C B. Feedback linearization regulator with coupled attitude and translation dynamics based on unit dual quaternion [C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2010: 2380-2384.
- [8] Wang X K, Han D P, Yu C B, et al. The geometric structure of unit dual quaternion with application in kinematic control[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 389(2): 1352-1364.
- [9] Wang J Y, Liang H Z, Sun Z W, et al. Relative motion coupled control based on dual quaternion [J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 25(1): 102-113.
- [10] Zhang F, Duan G R. Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion [C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA 2011-6396, 2011.
- [11] 吴锦杰,刘昆,韩大鹏,等. 基于对偶四元数的卫星主从式编队姿轨跟踪的优化控制[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1069-1078.
- [12] WU Jinjie, LIU Kun, HAN Dapeng, et al. Optimized tracking-control for attitude and orbit of satellite formation flying using dual quaternion [J]. Control Theory & Application, 2013, 30(9): 1069-1078. (in Chinese)
吴锦杰,刘昆,韩大鹏,等. 欠驱动航天器相对运动的姿轨耦合控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(6): 969-978.
WU Jinjie, LIU Kun, HAN Dapeng, et al. Coupled attitude and orbit control for relative motion of underactuated spacecraft[J]. Control and Decision, 2014, 29(6): 969-978. (in Chinese)
- [13] 霍星,胡庆雷,肖冰,等. 带有饱和和受限的挠性卫星变结构姿态容错控制[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1063-1068.
HUO Xing, HU Qinglei, XIAO Bing, et al. Variable-structure fault-tolerant attitude control for flexible satellite with input saturation[J]. Control Theory & Application, 2011, 28(9): 1063-1068. (in Chinese)
- [14] Su Y X, Zheng C H. Globally asymptotic stabilization of spacecraft with simple saturated proportional-derivative control[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(6): 1932-1936.
- [15] Zheng Z, Song S M. Autonomous attitude coordinated control for spacecraft formation with input constraint, model uncertainties, and external disturbances[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(3): 602-612.
- [16] 吕跃勇,胡庆雷,马广富,等. 带有控制受限的卫星编队飞行六自由度自适应协同控制[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 321-328.
LYU Yueyong, HU Qinglei, MA Guangfu, et al. Adaptive synchronized control with 6 degrees of freedom and bounded input for satellite formation flight [J]. Control Theory & Application, 2011, 28(3): 321-328. (in Chinese)
- [17] 吴锦杰,刘昆,韩大鹏. 考虑输入饱和的航天器相对运动鲁棒自适应控制[J]. 航空学报, 2013, 34(4): 890-901.
WU Jinjie, LIU Kun, HAN Dapeng. Robust adaptive control for relative motion of spacecraft under input saturation [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(4): 890-901. (in Chinese)
- [18] WU J J, LIU K, Gao Y D, et al. Coordinated control of relative position and attitude for spacecraft with actuator saturation[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2012.
- [19] Zhang F, Duan G R. Robust adaptive integrated translation and rotation control of a rigid spacecraft with control saturation and actuator misalignment [J]. Acta Astronautica, 2013, 86(3): 167-187.
- [20] WU J J, LIU K, HAN D P. Adaptive sliding mode control for six-DOF relative motion of spacecraft with input constraint[J]. Acta Astronautica, 2013, 87(2): 64-76.
- [21] 黄真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
HUANG Zhen, KONG Lingfu, FANG Yuefa. Parallel robot mechanism theory deals with the control[M]. Beijing: China Machine Press, 1997. (in Chinese)
- [22] Khalil H K. Nonlinear systems [M]. US: Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996: 113-120.