

平方根无迹卡尔曼滤波仅测角导航的空间交会闭环协方差分析方法*

尤岳^{1,2}, 王华¹, Christophe Paccolat², 李九人³

- (1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;
2. 瑞士联邦理工学院 瑞士空间中心, 瑞士 洛桑 CH-1005;
3. 载人航天总体研究论证中心, 北京 100094)

摘要:针对基于仅测角导航的空间交会问题,开展了采用线性协方差进行闭环控制误差快速分析方法的研究。建立了基于平方根无迹卡尔曼滤波(Square Root Unscented Kalman Filter, SRUKF)的仅测角导航算法并推导了观测敏感矩阵,构建了基于多脉冲 Hill 制导的闭环控制线性协方差分析模型。算例验证结果表明:提出的闭环控制协方差分析结果与 Monte Carlo 打靶结果能够很好地吻合;该方法适用于采用传统扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)的仅测角导航问题,但其迹向位置的估计存在一个与该方向控制误差方差相当的偏心,其误差椭圆的长轴和短轴分别比基于 SRUKF 的估计结果大 24.68% 和 20.56%。此外,由于采用了 QR 分解和 Cholesky 因子更新两种高效的代数运算,基于 SRUKF 的协方差分析模型的计算速度要比基于 EKF 的协方差分析模型的大 10%。

关键词:平方根无迹卡尔曼滤波;仅测角导航;闭环协方差分析;空间交会

中图分类号:V448.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)04-033-07

Closed-loop covariance analysis for orbital rendezvous using square root unscented Kalman filter based on angles-only navigation

YOU Yue^{1,2}, WANG Hua¹, Christophe Paccolat², LI Jiuren³

- (1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Swiss Space Center, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne CH-1005, Switzerland;
3. Manned Space Flight Overall Research and Demonstration Center, Beijing 100094, China)

Abstract: A closed-loop linear covariance analysis method was proposed for orbital rendezvous using AON (angles-only navigation). The SRUKF (square root unscented Kalman filter) based on AON algorithm was constructed and the observation sensitivity matrix was further calculated. The multi-impulsive Hill guidance law was employed to derive the closed-loop linear covariance analysis model. The results of the numerical simulation indicate that the closed-loop linear covariance analysis result fits the 1000 times Monte Carlo shooting well. The covariance analysis method is applicable to the traditional EKF (extended Kalman filter) based on the AON method, but has an estimation bias along downrange, which is equivalent to the variance of trajectory dispersion. The major axis and minor axis of error ellipse achieved with EKF based on covariance respectively are about 24.68% and 20.56% longer than the results from SRUKF based error ellipse. Besides, SRUKF and EKF have the same order computational burden for the state estimation, but the SRUKF is about 10% faster than the EKF due to using two powerful linear algebra techniques, QR decomposition and Cholesky factor updating.

Key words: square root unscented Kalman filter; angles-only navigation; closed-loop covariance analysis; orbital rendezvous

仅测角导航技术为当前正处于概念论证和在轨演示验证阶段的空间碎片主动清理(Active Debris Removal, ADR)、在轨服务、非合作交会、编队飞行等技术提供了一种轻质、节能、经济的天上自主相对导航方法。自 2002 年起,国内外学者开展了大量研究^[1-7],其中以美国 Utah State University 的 Geller 教授团队的工作最为系统。

Chari^[8]以 Orbital Express 任务为背景,分析了采用仅测角导航对近圆轨道目标交会和近距离操作的可行性,在分析相对观测几何对导航精度影响的基础上,提出了改善观测条件的轨道机动策略,通过仿真验证在存在初始估计误差、观测误差和传感器失效的情况下,仅测角导航的精度可以满

* 收稿日期:2016-04-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11572345,11272346);国家部委基金资助项目(2013CB733100)

作者简介:尤岳(1988—),男,山东泗水人,博士研究生,E-mail:yoyue_nudt@126.com;

王华(通信作者),男,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:wanghua@nudt.edu.cn

足实际任务要求。Woffinden 给出了仅测角导航的可观测准则^[9-10], 基于该准则提出了仅测角导航的最优轨道机动策略^[11], 并进一步开展了基于 EKF 的仅测角相对状态和姿态估计研究^[12]。Schmidt 通过数值仿真验证了将 Potter、Carlson 和 UD 因数分解三种平方根 EKF 用于仅测角导航可以获得比传统 EKF 更好的数值稳定性^[13], 改善由于星载计算机字长限制带来的截断误差。2010 年之后, 欧洲学者也加入仅测角导航的研究^[14-16], 并在设备及航天任务技术原型样机研究 (Prototype Research Instruments and Space Mission technology Advancement, PRISMA) 项目中开展了多次仅测角导航在轨试验^[17-21]。然而, 在上述所有实验过程中, 真实的轨道误差都已经通过全球定位系统 (Global Positioning System, GPS) 和射频 (Radio Frequency, RF) 测量已知, 整个实验过程都处于地面的监控之下, 且所有的轨道机动均由地面控制实施, 所以并不是真正意义上的基于仅测角导航的自主交会。

从公开文献来看, 在仅测角导航方法的理论研究和在轨试验中几乎都采用扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 或其衍生算法^[22]。而 EKF 是建立在对非线性动力学模型和观测模型的一阶近似, 误差为零均值高斯白噪声假设的基础上的, 只有在导航估计误差和动力学预报误差较小时才能稳定收敛。但在非合作自主交会任务中, 这些假设将难以满足。另外, 飞行轨迹的实际控制精度与初始状态估计误差、导航误差、控制误差和模型误差之间存在复杂的非线性关系, 寻找一种能够对真实控制精度进行快速准确估计的方法, 服务于轨道设计分析乃至天上自主应用, 是当前仅测角导航领域的现实需求和研究难点。

本文在上述研究成果的基础上, 提出了一种适用于非合作交会任务的平方根无迹卡尔曼滤波 (Square Root Unscented Kalman Filter, SRUKF) 仅测角导航方法。

1 动力学建模

将被交会目标 (空间碎片、合作/非合作航天器等) 称为目标器, 交会过程中不做轨道机动。将主动交会的航天器称为追踪器, 具备姿态确定和轨道机动能力。追踪器带有单个光学/红外相机, 用于获取其与目标器之间的相对角度信息。采用原点位于目标器质心的旋转直角坐标系 LVLH 作为描述相对轨道运动的参考坐标系。假设目标器沿一般椭圆轨道绕地球飞行, 以

Tschauner-Hemper (TH) 方程^[23]描述两者间的相对轨道运动, 它的齐次解即为 Yamanaka-Ankersen 状态转移矩阵^[24]。

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{rr}(t, t_0) & \Phi_{rv}(t, t_0) \\ \Phi_{vr}(t, t_0) & \Phi_{vv}(t, t_0) \end{bmatrix} = \Phi(f) \Phi^{-1}(f_0) \quad (1)$$

式中: $\Phi(f)$ 和 $\Phi^{-1}(f_0)$ 的表达式具体如式 (2) 所示。

$$\Phi^{-1}(f_0) = \frac{1}{\lambda^2} \times \begin{bmatrix} -3s \frac{k+e^2}{k^2} & c-2e & 0 & -s \frac{k+1}{k} & 0 & 0 \\ -3\left(e + \frac{c}{k}\right) & -s & 0 & -\left(c \frac{k+1}{k} + e\right) & 0 & 0 \\ 3k - \lambda^2 & es & 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \hline -3es \frac{k+1}{k^2} & -2+ec & \lambda^2 & -es \frac{k+1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 c & -\lambda^2 s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 s & \lambda^2 c \end{bmatrix}$$

$$\Phi(f) = \begin{bmatrix} s & c & 2-3esI & | & 0 & 0 & 0 \\ s' & c' & -3e\left(s'I + \frac{s}{k^2}\right) & | & 0 & 0 & 0 \\ c\left(1 + \frac{1}{k}\right) & -s\left(1 + \frac{1}{k}\right) & -3k^2I & | & 1 & 0 & 0 \\ \hline -2s & e-2c & -3(1-2esI) & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: 相关表达式简记为 $k = 1 + e \cos f$, $c = k \cos f$, $s = k \sin f$, $I = \int_{f_0}^f \frac{1}{k^2} df = \frac{\mu^2}{h^3} (t - t_0)$, $\lambda = \sqrt{1 - e^2}$ 。

其中, e 为目标器轨道偏心率, f 为真近点角, μ 为地球引力常数, h 为角动量的模。 s' 和 c' 分别为 s 和 c 相对于 f 的一阶导数。

假设追踪器采用离散脉冲进行轨道机动, 则可以得到任意时刻追踪器的相对状态矢量。

$$\mathbf{x}_t = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \delta(t_k) \Delta \mathbf{v}_k \quad (3)$$

式中: \mathbf{x}_0 和 \mathbf{x}_t 分别为初始时刻 t_0 和当前时刻 t 追踪器的相对状态矢量, $\Delta \mathbf{v}_k$ 为机动时刻 t_k 施加的机动脉冲矢量, $\delta(t_k)$ 为 Dirac 函数。

2 基于 SRUKF 的仅测角导航

当采用光学/红外相机作为相对导航测量敏感器时, 追踪器与目标器之间的相对观测几何如图 1 所示。图 1 中, $O_m - x_m y_m z_m$ 为相机测量坐标系, 一般情况下, 相机焦点 O_m 会与追踪器质心 O_c

之间存在一个偏心矢量 \mathbf{r}_{cm} 。 \mathbf{l} 为目标器质心 O_t 与相机焦心 O_m 连线在相机测量坐标系中的投影矢量。基于 \mathbf{l} 可以计算得到两个观测角:方位角 θ 和高低角 ε , 计算公式如式(4)所示。

$$\mathbf{Z}_{CAM} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \arctan(z_m/x_m) \\ \arctan(y_m/\sqrt{x_m^2+z_m^2}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

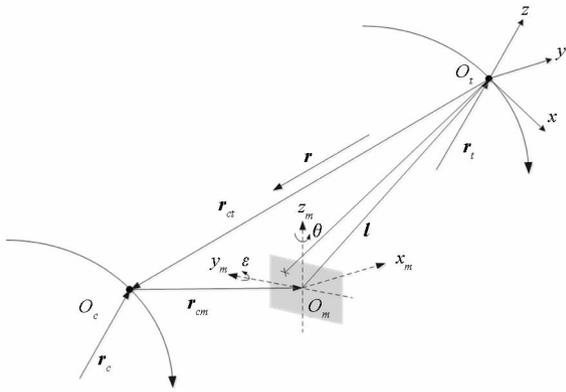


图1 相对观测几何

Fig.1 Relative observation geometry

在任意时刻 t , 由 LVLH 坐标系到相机测量坐标系的转换矩阵 $\mathbf{T}_{LVLH}^{CAM}(t)$ 可以根据追踪器的绝对位置矢量 \mathbf{r}_c 、绝对速度矢量 \mathbf{v}_c 和绝对姿态计算得到, 观测角度可以通过追踪器在目标器 LVLH 坐标系中的相对位置矢量 $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ 求得。

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{x\sqrt{x^2+y^2+z} + z(\rho_t - z)}{x(\rho_t - z) - z\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: ρ_t 为目标器的地心距。

取 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 关于相对状态 \mathbf{x} 的一阶导数, 可以得到观测敏感矩阵

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, 矩阵元素的具体表达式为:

$$h_{11} = \frac{x(\rho_t - z)}{\sqrt{x^2 + y^2} [x^2 + y^2 + (\rho_t - z)^2]} - \frac{z}{x^2 + z^2}$$

$$h_{21} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + z^2} (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$h_{12} = \frac{y(\rho_t - z)}{\sqrt{x^2 + y^2} [x^2 + y^2 + (\rho_t - z)^2]}$$

$$h_{22} = \frac{-(x^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + z^2} (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$h_{13} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} [x^2 + y^2 + (\rho_t - z)^2]} - \frac{x}{x^2 + z^2}$$

$$h_{23} = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + z^2} (x^2 + y^2 + z^2)}$$

基于 SRUKF 的滤波流程如图 2 所示, 包括 Sigma 点采样、状态预测和测量更新三个环节, 具体公式见相应小节。

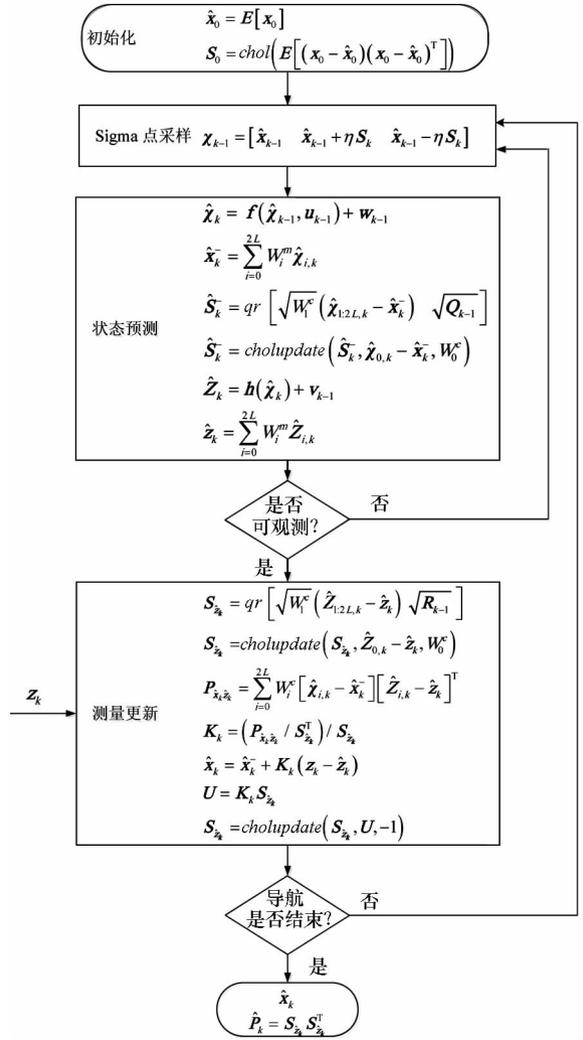


图2 SRUKF 滤波流程图

Fig.2 Filtering flow diagram of SRUKF

2.1 Sigma 点采样

SRUKF 通过构造一组确定的加权样本点, 对每个样本点进行无损非线性变换来逼近状态随机变量, 不需要计算雅可比矩阵和对非线性观测模型线性化, 对任何非线性系统都可以精确到二阶 (Taylor 展开), 性能优于 EKF 及其衍生算法^[25-27]。

采用对称采样策略, Sigma 点的总个数为 $n = 2L + 1$ 个, L 为待估计变量的维数, 对于本研究问题 $L = 6$ 。Sigma 点的求解过程如下。

1) Sigma 点权值

$$\begin{cases} W_0^m = \lambda / (\lambda + L) \\ W_0^c = \lambda / (\lambda + L) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^m = W_i^c = 1 / [2(L + \lambda)], i = 1, \dots, 2L \end{cases} \quad (7)$$

式中: W_i^m 为均值加权值; W_i^c 为协方差加权值; α 为常数, 表征 Sigma 点相对于 $\hat{\mathbf{x}}$ 的散布范围, 通常取 $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$; β 用来描述随机变量 x 分布的先验信息, 对于高斯分布取 $\beta = 2$ 最优; $\lambda = L(\alpha^2 - 1)$ 。

2) 迭代初值

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0] \\ \mathbf{S}_0 = \text{chol}\{\mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]\} \end{cases} \quad (8)$$

式中: \mathbf{S}_0 为初始协方差矩阵的 Cholesky 因子, \mathbf{S}_0 为下三角阵, $\mathbf{S}_0 \mathbf{S}_0^T = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$ 。

3) Sigma 点采样

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \eta \mathbf{S}_k \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \eta \mathbf{S}_k] \quad (9)$$

式中: $\eta = \sqrt{(L + \lambda)}$ 。此外, 式(9)中的矢量与矩阵线性求和操作, 表示矢量与矩阵中的每一列相加。

2.2 状态预测

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\chi}}_k = f(\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k} \\ \hat{\mathbf{S}}_k^- = \text{qr}[\sqrt{W_1^c}(\hat{\boldsymbol{\chi}}_{1:2L,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}}] \\ \hat{\mathbf{S}}_k^- = \text{cholupdate}\{\hat{\mathbf{S}}_k^-, \hat{\boldsymbol{\chi}}_{0,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-, W_0^c\} \\ \hat{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\chi}}_k) + \mathbf{v}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{z}}_k = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \hat{\mathbf{Z}}_{i,k} \end{cases} \quad (10)$$

式中: “ $\text{qr}\{\cdot\}$ ”代表 QR 分解, “ $\text{cholupdate}\{\cdot\}$ ”代表 Cholesky 因子更新, 两者结合实现对协方差矩阵 Cholesky 因子 $\hat{\mathbf{S}}_k^-$ 的预报。 \mathbf{v}_{k-1} 为观测噪声, $f(\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ 为系统非线性动力学模型, 即式(3)。 \mathbf{w}_{k-1} 假设为零均值高斯白噪声, 表示由于摄动和模型近似所产生的随机扰动, 可知 $\mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T] = \mathbf{Q}_{k-1} \delta(t - \tau)$, \mathbf{Q}_{k-1} 即为系统 t_{k-1} 时刻的过程噪声矩阵, 具体如式(11)所示。

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \left(\frac{T^3}{3}\right) & 0 & 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) & 0 & -2\sigma_w^2 \omega \left(\frac{T^3}{3}\right) \\ 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^3}{3}\right) & 0 & 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^3}{3}\right) & 2\sigma_w^2 \omega \left(\frac{T^3}{3}\right) & 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) \\ \hline \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) & 0 & 2\sigma_w^2 \omega \left(\frac{T^3}{3}\right) & \sigma_w^2 T + 4\sigma_w^2 \omega^2 \left(\frac{T^3}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) & 0 & 0 & \sigma_w^2 T & 0 \\ -2\sigma_w^2 \omega \left(\frac{T^3}{3}\right) & 0 & \sigma_w^2 \left(\frac{T^2}{2}\right) & 0 & 0 & \sigma_w^2 T + 4\sigma_w^2 \omega^2 \left(\frac{T^3}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: σ_w 为过程噪声标准差, 数量级为 10^{-4} ; T 为状态预测时间步长。

2.3 测量更新

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{z_k} = \text{qr}[\sqrt{W_1^c}(\hat{\mathbf{Z}}_{1:2L,k} - \hat{\mathbf{z}}_k) \quad \sqrt{\mathbf{R}_{k-1}}] \\ \mathbf{S}_{z_k} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}_{z_k}, \hat{\mathbf{Z}}_{0,k} - \hat{\mathbf{z}}_k, W_0^c\} \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c [\hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\hat{\mathbf{Z}}_{i,k} - \hat{\mathbf{z}}_k]^T \\ \mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} / \mathbf{S}_{z_k}^T) / \mathbf{S}_{z_k} \\ \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (z_k - \hat{\mathbf{z}}_k) \\ \mathbf{U} = \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{z_k} \\ \mathbf{S}_{z_k} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}_{z_k}, \mathbf{U}, -1\} \end{cases} \quad (12)$$

式中: \mathbf{R}_{k-1} 为测量噪声协方差阵, \mathbf{K}_k 为卡尔曼增

3 闭环控制线性协方差分析

在开环线性协方差预报的基础上增加了测量更新和控制修正两个环节, 构建了可用于实际飞行轨迹散布快速分析的闭环控制线性协方差解析模型。定义真实相对状态与标称相对状态之间的偏差为控制偏差, 即 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, 其协方差为 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}[\delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^T]$; 导航相对状态与真实相对状态之间的偏差为导航偏差, 即 $\delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, 其协方差为 $\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{E}[\delta \hat{\mathbf{x}} \delta \hat{\mathbf{x}}^T]$, 两个误差一起组成扩展偏差向量

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

扩展偏差向量的初始协方差为:

$$\mathbf{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \hat{\mathbf{P}}_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.1 偏差预报

扩展偏差向量及其协方差的预报模型为:

$$\mathbf{X}_k^- = \mathbf{\Psi}_{k|k-1} \mathbf{X}_{k-1}^+ \quad (15)$$

$$\mathbf{\Omega}_{k|k-1} = \mathbf{\Psi}_{k|k-1} \mathbf{\Omega}_{k-1}^+ \mathbf{\Psi}_{k|k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_{k-1}^T \quad (16)$$

式中, $\mathbf{\Psi}_{k|k-1}$ 为扩展状态转移矩阵。

$$\mathbf{\Psi}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1}) & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

\mathbf{W}_{k-1} 的表达式为

$$\mathbf{W}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.2 测量更新

测量更新前后扩展偏差向量及其协方差阵为:

$$\mathbf{X}_k^- = \mathbf{X}_{k|k-1}^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{k|k-1}^-) \quad (19)$$

$$\mathbf{\Omega}_k^- = \mathbf{C}_k \mathbf{\Omega}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{E}_k \mathbf{R}_k \mathbf{E}_k^T \quad (20)$$

式中:滤波增益 \mathbf{K}_k 的计算公式见式(12); \mathbf{Z}_k 为 t_k 时刻的观测矢量;观测敏感矩阵 \mathbf{H}_k 的计算公式见式(6); \mathbf{C}_k 和 \mathbf{E}_k 的计算公式见式(21)。

$$\begin{cases} \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k & \mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

3.3 控制修正

采用多脉冲 Hill 制导率计算交会机动脉冲,假设机动时间序列为 $\mathbf{T} = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_f]^T$,每个机动时刻的脉冲矢量都是基于当前时刻 t_k 的导航相对状态 $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{\mathbf{r}}_k \ \hat{\mathbf{v}}_k]^T$ 和终端瞄准的相对状态 $\bar{\mathbf{x}}_f = [\bar{\mathbf{r}}_f \ \bar{\mathbf{v}}_f]^T$ 计算得到,即

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}_k = \mathbf{\Phi}_{rr}^{-1}(t_f, t_k) [\bar{\mathbf{r}}_f - \mathbf{\Phi}_{rr}(t_f, t_k) \hat{\mathbf{r}}_k] - \hat{\mathbf{v}}_k \quad (22)$$

为了获得较高的终端相对速度控制精度,最后一次控制脉冲在终端时刻施加,即

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}_f = -\hat{\mathbf{v}}_f \quad (23)$$

控制修正前后扩展偏差向量及其协方差为:

$$\mathbf{X}_k^+ = (\mathbf{D}_{\Delta \hat{\mathbf{v}}_k} \Delta \hat{\mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} + \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} + \mathbf{I}) \mathbf{X}_k^- \quad (24)$$

$$\mathbf{\Omega}_k^+ = \mathbf{M}_k \mathbf{\Omega}_k^- \mathbf{M}_k^T + \mathbf{N}_k \mathbf{P}_k^{\delta v} \mathbf{N}_k^T \quad (25)$$

式中: $\mathbf{P}_k^{\delta v}$ 为控制执行误差, \mathbf{M}_k 和 \mathbf{N}_k 的具体表达式分别为:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} + \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{D}_{\Delta \hat{\mathbf{v}}_k} \Delta \hat{\mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{D}_{\Delta \hat{\mathbf{v}}_k} \Delta \hat{\mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} + \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} + \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (27)$$

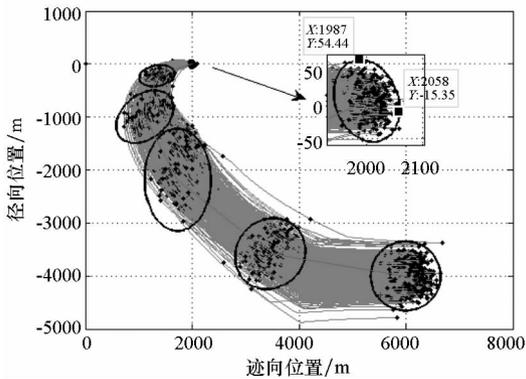
式中: $\mathbf{D}_{\Delta \hat{\mathbf{v}}_k} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Delta \hat{\mathbf{v}}_k}$, $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_k^-}$, $\Delta \hat{\mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{x}}_k^-} = \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_k^-}$ 。

4 仿真算例分析

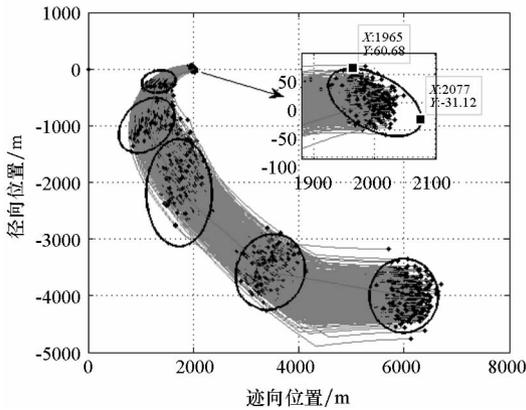
本节给出追踪器采用 SRUKF 仅测角导航方法和多脉冲 Hill 制导率进行交会时,对所提闭环控制协方差分析模型进行验证的仿真算例。选择瑞士空间中心的 SwissCube 小卫星作为目标器,初始轨道参数为其在 2016 年 3 月 19 日 03:56:42(UTC) 的实测 TLE 数据,即 $a_0 = 7\ 086\ 121.337\ 0\ \text{m}$, $e_0 = 0.000\ 7$, $i_0 = 1.717\ 6\ \text{rad}$, $\Omega_0 = 5.042\ 3\ \text{rad}$, $\omega_0 = 5.974\ 5\ \text{rad}$, $f_0 = 0.310\ 75\ \text{rad}$ 。初始时刻追踪器位于目标器前方 6 km、下方 4 km 的共椭圆接近轨道,即 $\mathbf{x}_0 = [6000\ \text{m}, 0\ \text{m}, -4000\ \text{m}, -6.350\ 7\ \text{m/s}, 0\ \text{m/s}, 0\ \text{m/s}]^T$,终端瞄准点为目标器正前方 2 km 相对位置保持点,即 $\mathbf{x}_f = [2000\ \text{m}, 0\ \text{m}, 0\ \text{m}, 0\ \text{m/s}, 0\ \text{m/s}, 0\ \text{m/s}]^T$ 。总交会时长为 2000 s,4 次交会脉冲的机动时间序列 $\mathbf{T} = [280.6\ \text{s}, 752.7\ \text{s}, 1414.8\ \text{s}, 2000\ \text{s}]$ 。假设所有的随机误差均为零均值高斯白噪声,光学相机观测噪声的标准差 $\sigma_\varepsilon = \sigma_\theta = 0.001\ \text{rad}$,观测频率为 1 Hz。取初始时刻的实际控制协方差 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}[(648.9\ \text{m})^2, (648.9\ \text{m})^2, (648.9\ \text{m})^2, (0.194\ 4\ \text{m/s})^2, (0.194\ 4\ \text{m/s})^2, (0.194\ 4\ \text{m/s})^2]$,导航协方差 $\hat{\mathbf{P}}_0 = \text{diag}[(1800\ \text{m})^2, (1200\ \text{m})^2, (1200\ \text{m})^2, (1.8\ \text{m/s})^2, (1.2\ \text{m/s})^2, (1.2\ \text{m/s})^2]$,整个交会过程均处于持续光照之下。

图 3 是轨道面内相对运动轨迹的 1000 次 Monte Carlo 打靶仿真结果,图中黑色实线椭圆代表根据协方差计算得到的 3σ 位置误差椭圆,黑点为对应时刻追踪器的实际相对位置,灰色细线代表每次打靶得到的实际飞行轨迹。由图 3(a) 可以看出,每次打靶仿真的相对运动轨迹均能很好地处于其 3σ 误差椭圆内,这验证了所建立的基于 SRUKF 的闭环控制协方差分析模型的正确性。不同位置误差椭圆的偏心率均比较大,而且误差椭圆的长轴始终指向目标器,这说明追踪器相对位置估计在两航天器视线方向具有很大的不确定性。导致这种现象的原因是追踪器缺乏对目

标器的距离观测信息。由图 3(b)可知,协方差分析方法同样适用于采用 EKF 的导航方式,但估计结果是有偏的且相对保守。从轨道面内终端位置的打靶统计结果来看,采用 SRUKF 和 EKF 的均值分别为 $[2000.304 \text{ m}, 0.031 \text{ m}]^T$ 和 $[1978.37 \text{ m}, 0.204 \text{ m}]^T$,即基于 EKF 的协方差估计结果与打靶均值在迹向存在 21.930 4 m 的偏心,说明基于 SRUKF 的协方差分析方法比基于 EKF 的协方差分析方法无偏性更好;从轨道面内终端位置的 3σ 误差椭圆来看,基于 SRUKF 的误差椭圆要比基于 EKF 的误差椭圆分别在迹向和径向减小了 24.68% 和 20.56%。



(a) SRUKF



(b) EKF

图 3 1000 次 Monte Carlo 打靶仿真

Fig. 3 1000 times Monte Carlo shooting

此外,由于采用了 QR 分解和 Cholesky 因子更新两种高效的代数运算方法,基于 SRUKF 的协方差分析模型要比基于 EKF 的协方差分析模型在计算速度上快 10%。

5 结论

本文针对采用仅测角导航的非合作目标交会问题,开展了闭环控制误差快速分析方法的研究。在分析传统 EKF 仅测角导航方法不足的基础上,提出了基于 SRUKF 的仅测角导航算法,基于多脉

冲 Hill 制导率推导了闭环控制线性协方差分析模型。采用 1000 次 Monte Carlo 仿真对所提出的仅测角导航方法和闭环控制协方差分析方法进行仿真验证。实验结果表明:所提出的闭环控制协方差分析方法合理可行,相比采用传统 EKF 的协方差分析方法,基于 SRUKF 的协方差终端分析精度更高,计算更快,具有较强的工程应用价值。

另外,在此基础上改善 SRUKF Sigma 点采样数目,进一步提高计算效率,构建星上自主导航制导与控制算法,是下一步需要开展的工作。

参考文献 (References)

- [1] 任仙海, 杨乐平, 朱彦伟. 空间非合作目标贴近扫描观测的制导方法研究[J]. 国防科技大学学报, 2010, 32(6): 71-75.
REN Xianhai, YANG Leping, ZHU Yanwei. A new method of guidance for proximity scanning inspection of non-cooperative space target[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2010, 32(6): 71-75. (in Chinese)
- [2] Li J R, Li H Y, Tang G J, et al. Research on the strategy of angles-only relative navigation for autonomous rendezvous[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(7): 1865-1872.
- [3] 李九人, 李海阳, 唐国金. 仅测角导航的自主交会闭环控制偏差分析[J]. 宇航学报, 2012, 33(6): 705-712.
LI Jiuren, LI Haiyang, TANG Guojin. Analysis of closed-loop control covariance for autonomous orbital rendezvous using angles-only relative navigation[J]. Journal of Astronautics, 2012, 33(6): 705-712. (in Chinese)
- [4] Mijolla L D, Cavrois B, Profizi A, et al. Covariance analysis tool for far non-cooperative rendezvous[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2013.
- [5] LeGrand K A, Kyle J D, Henry J P. Bearings-only initial relative orbit determination[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(9): 1699-1713.
- [6] Geller D K, Perez A. Initial relative orbit determination for close-in proximity operations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(9): 1833-1841.
- [7] Klein I, Gelle D. Zero Δv solution to the angles-only range observability problem during orbital proximity operations[M]//Advances in Estimation, Navigation, and Spacecraft Control. Germany: Springer, 2015: 351-369.
- [8] Chari R J. Autonomous orbital rendezvous using angles-only navigation[D]. US: Master Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [9] Woffinden D C, Geller D K. Observability criteria for angles-only navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(3): 1194-1208.
- [10] Woffinden D C. Angles-only navigation for autonomous orbital rendezvous[D]. US: Utah State University, 2008.
- [11] Woffinden D C, Geller D K. Optimal orbital rendezvous maneuvering for angles-only navigation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(4): 1382-1387.
- [12] Woffinden D C, Geller D K. Relative angles-only navigation and pose estimation for autonomous orbital rendezvous[J].

- Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(5): 1455 – 1469.
- [13] Schmidt J K. Analysis of square-root Kalman filters for angles-only orbital navigation and the effects of sensor accuracy on state observability [D]. US: Utah State University, 2010.
- [14] Grzymisch J, Fichter W. Observability criteria and unobservable maneuvers for in-orbit bearings-only navigation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(4): 1250 – 1259.
- [15] Esmiller B, Jacqueland C, Eckel H A, et al. Space debris removal by ground-based lasers; main conclusions of the European project CLEANSPACE [J]. Applied Optics, 2014, 53(31): 145 – 154.
- [16] Tombasco J, Axelrad P. Along-track separation uncertainty modeling given space-based optical observations [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(3): 732 – 739.
- [17] Noteborn R, Bodin P, Larsson R. Flight results from the PRISMA optical line of sight based autonomous rendezvous experiment [C] // Proceedings of 4th International Conference on Spacecraft Formation Flying Missions & Technologies, 2011.
- [18] Bodin P, Noteborn R, Larsson R, et al. The prisma formation flying demonstrator; overview and conclusions from the nominal mission [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2012(144): 441 – 460.
- [19] Delpech M, Berges J C, Karlsson T, et al. Results of PRISMA/FFIORD extended mission and applicability to future formation flying and active debris removal missions [J]. International Journal of Space Science and Engineering, 2013, 1(4): 382 – 409.
- [20] Gaias G, D'Amico S, Ardaens J S. Angles-only navigation to a noncooperative satellite using relative orbital elements [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(2): 439 – 451.
- [21] D'Amico S, Ardaens J S, Gaias G, et al. Noncooperative rendezvous using angles-only optical navigation; system design and flight results [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(6): 1576 – 1595.
- [22] Schmidt J, Geller D, Chavez F. Viability of angles-only navigation for orbital rendezvous operation [C] // Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2010.
- [23] Alfriend K T, Vadali S R, Gurfil P, et al. Spacecraft formation flying; dynamics, control and navigation [M] // Spacecraft Formation Flying; Dynamics, Control and Navigation. US: Butterworth-Heinemann, 2009: 105 – 110.
- [24] Yamanaka K, Ankersen F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1): 60 – 66.
- [25] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C] // Proceedings of the IEEE American Control Conference, 1995, 3: 1628 – 1632.
- [26] Julier S, Uhlmann J. A new method for the nonlinear transformation of means and co variances in filters and estimator [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477 – 478.
- [27] 李丹, 刘建业, 熊智, 等. 基于最小偏度采样的卫星自主导航 SRUKF 算法 [J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(1): 54 – 58.
- LI Dan, LIU Jianye, XIONG Zhi, et al. Square root unscented Kalman filter for satellite autonomous navigation system based on minimal skew simplex transformation [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(1): 54 – 58. (in Chinese)