

## 多 Lagrange 航行体在量化及通信时延约束下的集结\*

王怀龙<sup>1</sup>, 吴晓锋<sup>2</sup>, 吴泽伟<sup>3</sup>, 陈云<sup>4</sup>

(1. 中国人民解放军 91655 部队, 北京 100036; 2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000;  
3. 海军陆战学院 陆战队系, 广东 广州 510430; 4. 海军工程大学 信息安全系, 湖北 武汉 430033)

**摘要:**针对量化和通信时延约束下多 Lagrange 航行体的集结问题进行了研究, 提出了一种与模型相关的右边不连续控制算法, 设计了一个均匀量化器, 并运用图论、矩阵理论以及实用稳定性理论, 验证控制器的稳定性。研究结果表明: 多航行体可以在量化和通信时延影响的无向通信图下, 实现有误差界的集结。基于 MATLAB 软件进行的数值仿真实验, 证明了算法的有效性。

**关键词:** Lagrange 航行体; 集结; 右边不连续; 通信时延; 量化器

**中图分类号:** TP242.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2017)04-099-06

## Rendezvous for Lagrange vehicles with quantized data exchange and communication delay

WANG Huailong<sup>1</sup>, WU Xiaofeng<sup>2</sup>, WU Zewei<sup>3</sup>, CHEN Yun<sup>4</sup>

(1. The PLA Unit 91655, Beijing 100036, China;  
2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China;  
3. Department of Marine, Navy Marine Academy, Guangzhou 510430, China;  
4. Department of Information Security, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** For the rendezvous problem of the Lagrange vehicles with quantized data exchange and communication delay, a model-dependent and discontinuous right-hand side control algorithm was proposed, and a uniform quantizer was designed. The stability of controller was considered by using the graph, matrix theory, and the practical stability theory. It was shown that the rendezvous with error bound is rigorously proven in an undirected topology via quantized data exchange and communication delay. The numerical example based on MATLAB software also verifies the effectiveness of the algorithms.

**Key words:** the Lagrange vehicles; rendezvous; discontinuous right-hand side; communication delay; quantizer

近年来, 协同控制的研究已经拓展到 Lagrange 系统领域<sup>[1]</sup>。Lagrange 系统具有高度非线性、不确定性和耦合性等特点, 可以用来描述许多实际的机械平台, 如无人水下航行器、无人飞行器、机械手、移动机器人, 等等。这些平台都是当前的研究热点, 并且具有非常重要的实际应用价值。

多 Lagrange 航行体协同的关键问题是如何进行信息交互。在实际应用中, 信息交互是由航行体之间的相互通信来完成的。在 Lagrange 系统的发送端, 传感器首先会对信息进行采样、量化、编码; 然后通过水声通道等, 传送给接收端; 最后, 接收端对收到的数据进行解码, 并依据解码后的信息来实现多 Lagrange 航行体的协同控制。显然,

该过程不可避免地存在量化及通信时延等条件的影

响。当前, 基于量化的多智能体编队协同控制, 主要集中在连续一阶积分<sup>[2-4]</sup>、连续二阶积分<sup>[3-5]</sup>、离散动力学<sup>[6-8]</sup>描述的多智能体。到目前为止, 仍少见考虑量化的 Lagrange 航行体编队的协同控制。另一方面, 较多文献要求每个智能体能够及时地获取近邻航行体的状态信息。然而, 在现实环境中, 由于网络的拥塞和信道质量的影响, 数据在传输过程中不可避免地存在时间延迟。时延导致航行体滞后获取近邻航行体的信息。相比于不考虑时延的同步控制问题<sup>[9-11]</sup>, 利用滞后信息实现多航行体的协同<sup>[12-14]</sup>也是一个具有挑战性的课题。

\* 收稿日期: 2016-03-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202239, 61074012); 中国博士后科学基金资助项目(2012M521890)

作者简介: 王怀龙(1988—), 男, 福建泉州人, 工程师, 博士, E-mail: bjwhl1988@163.com

本文研究了多 Lagrange 航行体在量化和通信时延条件下的集结。集结指的是所有航行体的广义位置趋于相同,广义速度趋于零。

### 1 基础知识和量化器设计

考虑  $n$  个航行体,第  $i$  个航行体的动力学模型由 Lagrange 方程表示为:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i \quad i=1,2,\dots,n \tag{1}$$

式中:  $M_i(q_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$  为惯性矩阵;  $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$  为科氏力和向心力矩阵;  $g_i(q_i) \in \mathbf{R}^p$  为重力约束力;  $\tau_i \in \mathbf{R}^p$  为待设计的控制力或力矩;  $q_i \in \mathbf{R}^p$  和  $\dot{q}_i \in \mathbf{R}^p$  分别为系统的广义位置向量和广义速度向量。

Lagrange 方程满足:  $0 < k_m I_p \leq M_i(q_i) \leq k_M I_p$ ,  $\|C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i\| \leq k_c \|\dot{q}_i\|^2$  和  $\|g_i(q_i)\| \leq k_g$ 。其中,  $I_p \in \mathbf{R}^{p \times p}$  是一个单位矩阵;  $\|\cdot\|$  表示 Euclidean 范数;  $k_m, k_M, k_c$  和  $k_g$  均为已知的正常数。

**假设 1** 航行体  $i$  的速度向量  $\dot{q}_i = (\dot{q}_{i1}, \dot{q}_{i2}, \dots, \dot{q}_{ip}) \in \mathbf{R}^p$  是有界的,  $i=1,2,\dots,n$ , 即  $\dot{q}_{ik} \leq \rho_k$ 。其中,  $\rho_k$  为已知的正常数,  $k=1,2,\dots,p$ ,  $p$  表示向量的维数。

令  $\varepsilon_{ij} \in \mathbf{R}^p$  为航行体  $i$  与  $j$  的期望距离。控制目标为:设计一个分布式控制器  $\tau_i$ , 随着  $t \rightarrow \infty$ , 使得  $q_i(t) - q_j(t) \rightarrow \varepsilon_{ij}$ ,  $\dot{q}_i(t) \rightarrow 0, i=1,2,\dots,n$ , 即  $n$  个航行体实现了集结。

在理想通信下,提出如式(2)所示与模型相关的控制器。

$$\tau_i = -M_i(q_i) \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} [q_i(t) - q_j(t) - \varepsilon_{ij}] + \sum_{j=1}^n b_{ij} [\dot{q}_i(t) - \dot{q}_j(t)] + H_i \dot{q}_i(t) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

式中:  $H_i$  为待定的正定矩阵;  $a_{ij} \geq 0$  和  $b_{ij} \geq 0$ ,  $i, j=1,2,\dots,n$ , 分别表示航行体  $i$  和航行体  $j$  位置信息及速度信息的交互关系, 且如果航行体  $i$  和  $j$  可以进行信息  $q_k(t) (\dot{q}_k(t)), k=i, j$ , 的交互, 则  $a_{ij} > 0 (b_{ij} > 0)$ , 否则  $a_{ij} = 0 (b_{ij} = 0)$ 。假定航行体之间的位置向量拓扑图  $G_A$  和速度向量拓扑图  $G_B$  都是无向的, 即  $a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}, i, j=1,2,\dots,n$ 。  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和  $B = [b_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为邻接矩阵。相应地, Laplacian 矩阵分别为  $L_A = [L_{ij}^A] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L_B = [L_{ij}^B] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。其中,  $L_{ii}^A = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}, L_{ij}^A =$

$$-a_{ij}, L_{ii}^B = \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}, L_{ij}^B = -b_{ij}, i \neq j。$$

考虑如式(3)所示的均匀量化器。

$$U_u(y) = \lfloor (y/\Delta u) + \frac{1}{2} \rfloor \quad y \in \mathbf{R} \tag{3}$$

式中:  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示取最靠近该数值的整数函数;  $\Delta$  和  $u$  分别为量化密度和量化参数。

对于航行体  $j=1, \dots, n$ , 令  $\eta_j = (q_j, \dot{q}_j)^T = (\eta_{j(1)}, \dots, \eta_{j(2p)})^T \in \mathbf{R}^{2p}$ 。其中,  $\eta_{j(k)} = q_{jk}, \eta_{j(p+k)} = \dot{q}_{jk}, k=1,2,\dots,p$ 。对于采样数据  $\eta_{j(k)} (k=1, \dots, 2p)$ , 运用如式(4)所示的编码器  $\Phi_{jk}$ 。

$$\Phi_{jk}: \Omega_{j(k)}(t) = U_u(\eta_{j(k)}(t)) \quad k=1, \dots, 2p \tag{4}$$

式中,  $\Omega_{j(k)}(t)$  表示编码器的输出。

同时, 航行体  $i$  获取邻近航行体  $j$  的信息  $\Omega_{j(k)}(t)$ , 并运用解码器  $\Psi_{jk}$  进行估计。

$$\Psi_{jk}: \bar{\eta}_{j(k)}(t) = \Omega_{j(k)}(t) \Delta u \quad k=1, \dots, 2p \tag{5}$$

式中,  $\bar{\eta}_{j(k)}(t)$  表示解码器的输出。

令  $\bar{\eta}_j^-(t) = \bar{q}_j(t) = [\bar{\eta}_{j(1)}(t), \dots, \bar{\eta}_{j(p)}(t)]^T \in \mathbf{R}^p, \bar{\eta}_j^+(t) = \bar{\dot{q}}_j(t) = [\bar{\eta}_{j(p+1)}(t), \dots, \bar{\eta}_{j(2p)}(t)]^T \in \mathbf{R}^p, \sigma_j^-(t) = q_j(t) - \bar{q}_j(t) \in \mathbf{R}^p, \sigma_j^+(t) = \dot{q}_j(t) - \bar{\dot{q}}_j(t) \in \mathbf{R}^p$ 。那么, 针对固定的通信时延, 式(2)改写为如式(6)所示的量化控制器。

$$\begin{aligned} \tau_i = & -M_i(q_i) \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} [q_i(t-r) - \bar{\eta}_j^-(t-r) - \varepsilon_{ij}] + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n b_{ij} [\dot{q}_i(t-r) - \bar{\eta}_j^+(t-r)] + H_i \dot{q}_i(t) \right\} \\ = & -M_i(q_i) \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} [q_{ei}(t-r) - q_{ej}(t-r)] + \right. \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij} [\dot{q}_i(t-r) - \dot{q}_j(t-r)] + H_i \dot{q}_i(t) + \\ & \left. \sum_{j=1}^n a_{ij} \sigma_j^-(t-r) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \sigma_j^+(t-r) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{6} \end{aligned}$$

令  $q = (q_1^T, \dots, q_n^T)^T \in \mathbf{R}^{np}, \dot{q} = (\dot{q}_1^T, \dots, \dot{q}_n^T)^T \in \mathbf{R}^{np}, q_\varepsilon = (q_{\varepsilon 1}^T, \dots, q_{\varepsilon n}^T)^T \in \mathbf{R}^{np}, q^* = (q_i^T - q_j^T - \varepsilon_{ij})_{i,j=1,\dots,n}^T \in \mathbf{R}^{2np}$ 。由于拓扑图  $G_A$  是无向的, 根据文献 [15] 的研究, 可知  $q_\varepsilon^T (L_A \otimes I_p) q_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \|q_i - q_j - \varepsilon_{ij}\|^2$ 。因此, 定义如下的误差向量:  $e = (e_1^T, e_2^T)^T = (q_\varepsilon^T, \dot{q}^T)^T \in \mathbf{R}^{2np}$ 。

然而, 由于 Lagrange 高度非线性和量化等因素的影响, 误差向量显然无法渐近稳定到零点。因此, 文献 [2] 引入一个实用集结的概念。

**定义** 对于航行体的任意初始状态  $q_i(0), \dot{q}_i(0), i=1,2,\dots,n$ , 若给定一个正常数  $\delta$ , 存在  $T_0 > 0$ , 使得  $\forall t > T_0$  时, 误差向量在区域  $B_\delta$  上

满足:

$$e \in B_\delta = \{e_1, e_2 \mid \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 < \delta^2\} \quad (7)$$

那么,多 Lagrange 航行体完成了实用集结。

令  $M(q) = \text{diag}\{M_1(q_1), \dots, M_n(q_n)\} \in \mathbf{R}^{np \times np}$ ,  $C(q, \dot{q}) = \text{diag}\{C_1(q_1, \dot{q}_1), \dots, C_n(q_n, \dot{q}_n)\} \in \mathbf{R}^{np \times np}$ ,  $g(q) = [g_1^T(q_1), \dots, g_n^T(q_n)]^T \in \mathbf{R}^{np}$ ,  $H = \text{diag}\{H_1, \dots, H_n\} \in \mathbf{R}^{np \times np}$ ,  $\tau = (\tau_1^T, \dots, \tau_n^T)^T \in \mathbf{R}^{np}$ ,  $\sigma^- = (\sigma_1^{-T}, \dots, \sigma_n^{-T})^T \in \mathbf{R}^{np}$ ,  $\sigma^+ = (\sigma_1^{+T}, \dots, \sigma_n^{+T})^T \in \mathbf{R}^{np}$ 。式(6)和式(1)可分别写成如下的矩阵形式:

$$\tau = -M(q)[(L_A \otimes I_p)q_\varepsilon(t-r) + (L_B \otimes I_p)\dot{q}(t-r) + H\dot{q}(t) + (A \otimes I_p)\sigma^-(t-r) + (B \otimes I_p)\sigma^+(t-r)] \quad (8)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (9)$$

## 2 主要结果

根据式(8)和式(9),可得如式(10)所示的误差系统。

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -M^{-1}[C\dot{q} + g(q) - \tau] \end{cases} \quad (10)$$

由于式(8)的右端具有不连续项,易知式(10) $\dot{e}_2$ 的右边也是不连续的。因此,根据文献[16]微分包含的定义,将式(10)改写为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) \in \text{a.e. } K[-M^{-1}\{C\dot{q} + g(q) + M(q)[(L_A \otimes I_p) \cdot q_\varepsilon(t-r) + (L_B \otimes I_p)\dot{q}(t-r) + H\dot{q}(t) + (A \otimes I_p) \cdot \sigma^-(t-r) + (B \otimes I_p)\sigma^+(t-r)]\}] \end{cases} \quad (11)$$

式中, $K[\cdot]$ 为微分包含;“a.e.”表示几乎处处。

根据文献[16]的微分包含性质,误差系统(11)可以改写为:

$$\begin{aligned} \dot{e} \in \text{a.e. } (e_2(t), -M^{-1}[C\dot{q} + g(q)] - [(L_A \otimes I_p)e_1(t-r) + (L_B \otimes I_p)e_2(t-r) + He_2(t)])^T + (0, -(A \otimes I_p) \cdot K[\sigma^-(t-r)] - (B \otimes I_p)K[\sigma^+(t-r)])^T \\ = We(t) + Pe(t-r) + N \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } W = \begin{pmatrix} 0 & I_{np} \\ 0 & -H \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 0 \\ -(L_A \otimes I_p) \\ 0 \\ -(L_B \otimes I_p) \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 0 \\ -(A \otimes I_p)K[\sigma^-(t-r)] \\ 0 \\ -M^{-1}[C\dot{q} + g(q)] - (B \otimes I_p)K[\sigma^+(t-r)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

如果  $e(t)$  是式(12)的 Filippov 值,根据文献[2]可知,存在可测函数  $\gamma_1(t-r) \in K[\sigma^-(t-r)]$  和  $\gamma_2(t-r) \in K[\sigma^+(t-r)]$ 。

因此,误差系统的第三项  $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(A \otimes I_p)\gamma_1(t-r) - M^{-1}[C\dot{q} + g(q)] - (B \otimes I_p)\gamma_2(t-r) \end{pmatrix}$ 。式(12)可以写为:

$$\dot{e} = We(t) + Pe(t-r) + \bar{N} \quad (13)$$

**引理** 误差系统中的微分包含项  $K[\sigma^-(t-r)]$  和  $K[\sigma^+(t-r)]$ ,分别满足:

$$\|K[\sigma^-(t-r)]\| \leq \frac{3}{2}\mu\Delta\sqrt{np} \quad (14)$$

$$\|K[\sigma^+(t-r)]\| \leq \frac{3}{2}\mu\Delta\sqrt{np} \quad (15)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \|K[\sigma^-(t-r)]\| \\ &= \|(K[\sigma_1^-(t-r)], \dots, K[\sigma_n^-(t-r)])^T\| \\ &= \|(K[\sigma_{j(k)}^-(t-r)])_{k=1, \dots, p; j=1, \dots, n}\| \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \{K[\sigma_{j(k)}^-(t-r)]\}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $K[\sigma_{j(k)}^-(t-r)] = K[\eta_{j(k)}(t-r) - \bar{\eta}_{j(k)}(t-r)] = \eta_{j(k)}(t-r) - K\{U_u[\eta_{j(k)}(t-r)]\Delta u\}$ 。

根据文献[17]的推导过程,易得如下的不等式: $0 \leq |K[\sigma_{j(k)}^-(t-r)]| \leq \frac{3}{2}\mu\Delta$ , 将其代入式(16)可得式(14)。同理,可得式(15)。□

**定理** 对于式(13),在控制器(8)的作用下,如果  $G_A$  和  $G_B$  都是无向连接,且存在一个正定矩阵  $H$  和一个正常数  $\theta$ ,使得  $D < 0$ ,那么多 Lagrange 航行体完成了实用集结。其中,

$$D = \begin{pmatrix} W^T + W + r^2 W^T W + \theta I_{2np} & -I_{2np} & r^2 W^T P + I_{2np} + P \\ r^2 P^T W + I_{2np} + P^T & & r^2 P^T P - I_{2np} + \theta I_{2np} \end{pmatrix}$$

证明:

由于通信图  $G_A$  和  $G_B$  都是无向连接,那么  $L_A$  和  $L_B$  为半正定矩阵。

考虑 Lyapunov 函数:

$$V = V_1 + V_2 \quad (17)$$

式中:

$$V_1 = e^T(t)e(t); V_2 = r \int_{t-r}^t [s - (t-r)][\dot{e}^T(s) - \bar{N}^T][\dot{e}(s) - \bar{N}] ds$$

由式(13)易知, $V_1$  和  $V_2$  沿着误差系统的导数分别为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= K[\dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t)] \\ &= e^T(t)(W^T + W + \theta I_{2np})e(t) - \theta e^T(t)e(t) + e^T(t)Pe(t-r) + e^T(t-r)P^T e(t) + 2\bar{N}^T e(t) \\ &= [e^T(t), e^T(t-r)] \begin{pmatrix} W^T + W + \theta I_{2np} & P \\ P^T & \theta I_{2np} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t-r) \end{pmatrix} - \theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \theta \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) + 2\bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{e}(t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= K[r^2 \{ \dot{\mathbf{e}}^T(t) - \bar{\mathbf{N}}^T \} [ \dot{\mathbf{e}}(t) - \bar{\mathbf{N}} ] - r \int_{t-r}^t [ \dot{\mathbf{e}}^T(s) - \bar{\mathbf{N}}^T ] [ \dot{\mathbf{e}}(s) - \bar{\mathbf{N}} ] ds \\ &\leq K[r^2 \{ \dot{\mathbf{e}}^T(t) - \bar{\mathbf{N}}^T \} [ \dot{\mathbf{e}}(t) - \bar{\mathbf{N}} ] - \{ \int_{t-r}^t [ \dot{\mathbf{e}}(s) - \bar{\mathbf{N}} ] ds \}^T \{ \int_{t-r}^t [ \dot{\mathbf{e}}(s) - \bar{\mathbf{N}} ] ds \}] \\ &\leq r^2 [ \mathbf{W} \mathbf{e}(t) + \mathbf{P} \mathbf{e}(t-r) ]^T [ \mathbf{W} \mathbf{e}(t) + \mathbf{P} \mathbf{e}(t-r) ] - [ \int_{t-r}^t \dot{\mathbf{e}}^T(s) ds - \int_{t-r}^t \bar{\mathbf{N}}^T ds ] [ \int_{t-r}^t \dot{\mathbf{e}}(s) ds - \int_{t-r}^t \bar{\mathbf{N}} ds ] \\ &\leq r^2 [ \mathbf{W} \mathbf{e}(t) + \mathbf{P} \mathbf{e}(t-r) ]^T [ \mathbf{W} \mathbf{e}(t) + \mathbf{P} \mathbf{e}(t-r) ] - [ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-r) ]^T [ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-r) ] + 2 [ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-r) ]^T \int_{t-r}^t \bar{\mathbf{N}} ds \\ &= [ \mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-r) ] \begin{pmatrix} r^2 \mathbf{W}^T \mathbf{W} - \mathbf{I}_{2np} & r^2 \mathbf{W}^T \mathbf{P} + \mathbf{I}_{2np} \\ r^2 \mathbf{P}^T \mathbf{W} + \mathbf{I}_{2np} & r^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} - \mathbf{I}_{2np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t-r) \end{pmatrix} + 2 [ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-r) ]^T \int_{t-r}^t \bar{\mathbf{N}} ds \quad (19) \end{aligned}$$

根据文献 [18] 的推导证明, 可知  $\| \mathbf{M}^{-1} \| \leq$

$\frac{1}{k_m}$ , 并易得:

$$\begin{aligned} &\| \bar{\mathbf{N}} \| \\ &\leq \| \mathbf{M}^{-1} [ \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) ] \| + \| (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_p) K [ \boldsymbol{\sigma}^-(t-r) ] \| + \| (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_p) K [ \boldsymbol{\sigma}^+(t-r) ] \| \\ &\leq \frac{1}{k_m} (npk_k \rho_k^2 + k_g) + \frac{3}{2} \mu \Delta \sqrt{np} \lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \frac{3}{2} \mu \Delta \sqrt{np} \lambda_{\max}(\mathbf{B}) = \alpha_1 \quad (20) \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\ &= [ \mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-r) ] \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T + \mathbf{W} + r^2 \mathbf{W}^T \mathbf{W} + \theta \mathbf{I}_{2np} - \mathbf{I}_{2np} \\ r^2 \mathbf{P}^T \mathbf{W} + \mathbf{I}_{2np} + \mathbf{P}^T \\ r^2 \mathbf{W}^T \mathbf{P} + \mathbf{I}_{2np} + \mathbf{P} \\ r^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} - \mathbf{I}_{2np} + \theta \mathbf{I}_{2np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t-r) \end{pmatrix} - \theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \theta \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) + 2\bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{e}(t) + 2 [ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-r) ]^T \int_{t-r}^t \bar{\mathbf{N}} ds \\ &\leq -\theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \theta \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) + 2\alpha_1 \| \mathbf{e}(t) \| + 2\alpha_1 r ( \| \mathbf{e}(t) \| + \| \mathbf{e}(t-r) \| ) \quad (21) \end{aligned}$$

根据定义, 对于给定的误差界  $\delta$ , 如果误差向量  $\mathbf{e}(t)$  和  $\mathbf{e}(t-r)$  都在球体  $B_\delta$  的外部, 也就是说,  $\| \mathbf{e}(t) \| \geq \delta, \| \mathbf{e}(t-r) \| \geq \delta$ , 那么式(13)达到实用稳定性。显然, 式(22)成立。

$$\| \mathbf{e}(t) \| = \frac{\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)}{\| \mathbf{e}(t) \|} \leq \frac{\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)}{\delta} \quad (22)$$

$$\| \mathbf{e}(t-r) \| = \frac{\mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r)}{\| \mathbf{e}(t-r) \|} \leq \frac{\mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r)}{\delta} \quad (23)$$

进一步, 式(21)可改写为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \theta \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) + 2\alpha_1 \cdot \left( \frac{\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)}{\delta} + 2\alpha_1 r \left( \frac{\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)}{\delta} + \frac{\mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r)}{\delta} \right) \right) \\ &\leq \left( -\theta + \frac{2\alpha_1(1+r)}{\delta} \right) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \left( -\theta + \frac{2\alpha_1 r}{\delta} \right) \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) \quad (24) \end{aligned}$$

综上, 对于给定的误差界  $\delta > \frac{2\alpha_1(1+r)}{\theta}$ , 存在一个正常数  $\beta$ , 使得:

$$\dot{V} \leq -\beta [ \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t-r) \mathbf{e}(t-r) ] \quad (25)$$

这意味着, 在区域  $B_\delta$  内, 式(13)达到实用稳定性, 也就是说, 多个航行体完成了实用集结。 □

### 3 数值仿真

通过数值仿真, 分析验证控制算法的有效性。考虑 6 个 3 自由度 (Three Degree Of Freedom, 3-DOF) 的 UUV, 假定 6 个 UUV 之间的广义位置信息和广义速度信息拓扑图是相同的, 如图 1 所示。

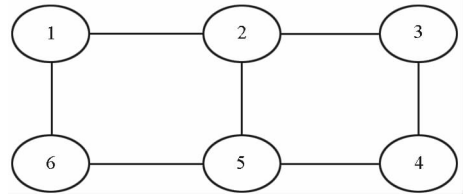


图 1 UUV 的通信拓扑图

Fig. 1 Communication topology of UUV

选取 UUV 的参数和初始状态:

$m = 125, X_u = -62, Y_v = -62, N_r = -30, X_u = -48, Y_v = -48, N_r = -80, (q_{i1}(0), q_{i2}(0), q_{i3}(0)) = (100, 10, 1), (\dot{q}_{i1}(0), \dot{q}_{i2}(0), \dot{q}_{i3}(0)) = (i, 2i, i), i=1, 2, \dots, 6$ 。其中:  $m$  为 UUV 的质量;  $X_u, Y_v, N_r, X_u, Y_v$  和  $N_r$  为水动力系数。

令  $\Delta = 1, \mu = 1, r = 0.4$ , 基于 MATLAB 的线性矩阵不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) 工具箱, 可得正定矩阵  $\mathbf{H}_i = \text{diag} \{ 25, 20, 21.3 \}$ 。图 2~4 分别阐述了 6 个航行体之间的广义位置分量的误差轨迹。可以看出, 最终 6 个航行体的广义位置趋于一定的偏差值。

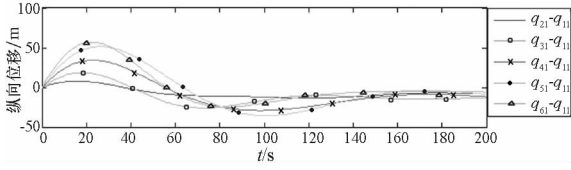


图2 广义位置分量  $q_{i1} (i=1, 2, \dots, 6)$  的误差轨迹

Fig. 2 Error orbits of the generalized coordinates

$$q_{i1} (i=1, 2, \dots, 6)$$

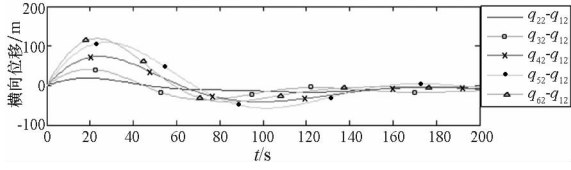


图3 广义位置分量  $q_{i2} (i=1, 2, \dots, 6)$  的误差轨迹

Fig. 3 Error orbits of the generalized coordinates

$$q_{i2} (i=1, 2, \dots, 6)$$

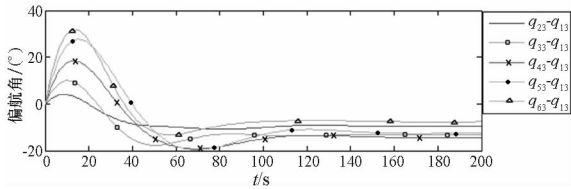


图4 广义位置分量  $q_{i3} (i=1, 2, \dots, 6)$  的误差轨迹

Fig. 4 Error orbits of the generalized coordinates

$$q_{i3} (i=1, 2, \dots, 6)$$

同样地,图5~7分别表示6个航行体的广义速度分量的运动轨迹。可知,最终6个航行体的速度不为零,而是接近于零。综上所述,6个航行体完成了实用集结。

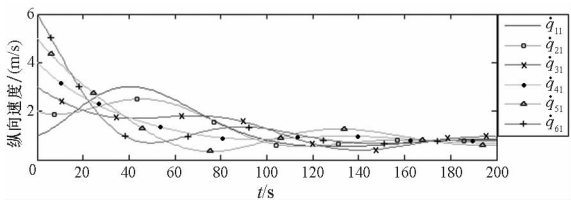


图5 广义速度分量  $\dot{q}_{i1} (i=1, 2, \dots, 6)$  的运动轨迹

Fig. 5 Move orbits of the generalized coordinate

$$\text{derivatives } \dot{q}_{i1} (i=1, 2, \dots, 6)$$

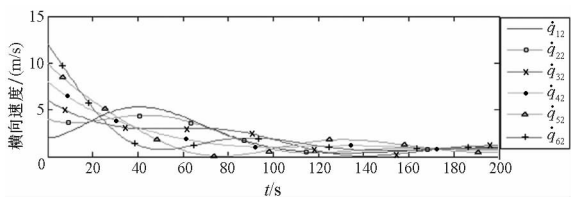


图6 广义速度分量  $\dot{q}_{i2} (i=1, 2, \dots, 6)$  的运动轨迹

Fig. 6 Move orbits of the generalized coordinate

$$\text{derivatives } \dot{q}_{i2} (i=1, 2, \dots, 6)$$

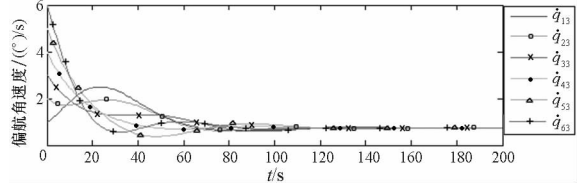


图7 广义速度分量  $\dot{q}_{i3} (i=1, 2, \dots, 6)$  的运动轨迹

Fig. 7 Move orbits of the generalized coordinate

$$\text{derivatives } \dot{q}_{i3} (i=1, 2, \dots, 6)$$

### 4 结论

本文基于实用稳定性理论、图论、矩阵理论等基础知识,设计了一个均匀量化器与模型相关的右边不连续控制器,不仅从理论上实现了多 Lagrange 航行体在量化和通信时延约束下的实用集结,而且通过 MATLAB 的 LMI 工具箱进行数值仿真实验验证。在下一步的研究中,考虑其他通信限制条件,比如丢包、噪声等,或者研究如何对误差值进行估计并优化等都将是一个非常值得研究的课题。

### 参考文献 (References)

- [1] Min H B, Sun F C, Wang S C, et al. Distributed adaptive consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5 (1): 145 - 154.
- [2] Li L, Ho D W C, Lu J Q. A unified approach to practical consensus with quantized data and time delay [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Regular Papers, 2013, 60(10): 2668 - 2678.
- [3] Guo M, Dimarogonas D V. Consensus with quantized relative state measurements [J]. Automatica, 2013, 49(8): 2531 - 2537.
- [4] Xargay E, Choe R, Hovakimyan N, et al. Multi-leader coordination algorithm for networks with switching topology and quantized information [J]. Automatica, 2014, 50(3): 841 - 851.
- [5] Chen W, Li X, Jiao L C. Quantized consensus of second-order continuous-time multi-agent systems with a directed topology via sampled data [J]. Automatica, 2013, 49(7): 2236 - 2242.
- [6] Li T, Xie L H. Distributed coordination of multi-agent systems with quantized-observer based encoding-decoding [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(12): 3023 - 3037.
- [7] You K Y, Xie L H. Network topology and communication data rate for consensus ability of discrete-time multi-agent systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(10): 2262 - 2275.
- [8] Li T, Fu M Y, Xie L H, et al. Distributed consensus with limited communication data rate [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(2): 279 - 292.
- [9] Mei J, Ren W, Chen J, et al. Distributed adaptive coordination for multiple Lagrangian systems under a directed graph without using neighbors' velocity information [J].

- Automatica, 2013, 49(6): 1723 – 1731.
- [10] Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. International Journal of Control, 2009, 82(11): 2137 – 2149.
- [11] Wang H L. Task-space synchronization of networked robotic systems with uncertain kinematics and dynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(12): 3169 – 3174.
- [12] Chung S J, Slotine J J E. Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(3): 686 – 700.
- [13] Abdessameud A, Polushin I G, Tayebi A. Synchronization of Lagrangian systems with irregular delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(1): 187 – 193.
- [14] Liu Y, Wang S C, Min H B, et al. A distributed adaptive consensus algorithm of Euler-Lagrange system with input and communication delays [J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(2): 156 – 162.
- [15] Ren W, Cao Y C. Distributed coordination of multi-agent networks [M]. UK: Springer-Verlag, 2011.
- [16] Bacciotti A, Rosier L. Liapunov functions and stability in control theory [M]. US: Springer-Verlag, 2005.
- [17] 王怀龙, 吴晓锋, 陈云, 等. 量化和噪声约束条件下多 Lagrange 航行体编队的分布式跟踪控制 [J]. 海军工程大学学报, 2016, 28(5): 51 – 56.  
WANG Huailong, WU Xiaofeng, CHEN Yun, et al. Distributed tracking control for Lagrange network systems via quantized data exchange and noises [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2016, 28(5): 51 – 56. (in Chinese)
- [18] 王怀龙, 吴晓锋, 陈云, 等. 多拉格朗日航行体编队在量化及噪声下的集结 [J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2016, 44(8): 46 – 51.  
WANG Huailong, WU Xiaofeng, CHEN Yun, et al. Rendezvous for the Lagrange network systems under quantized data exchange and noise [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2016, 44(8): 46 – 51. (in Chinese)