

磁场环境下黏弹性基体中非局部纳米梁动力学特性分析*

张大鹏, 雷勇军, 申志彬

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:根据非局部 Euler 梁理论建立了外部磁场影响下的黏弹性基体上纳米梁的动力学问题分析模型。通过引入 Kelvin 黏弹性地基模型和洛伦兹力,得到了纳米梁的振动控制方程。基于 Kelvin-Voigt 黏弹性模型,给出了黏弹性基体上纳米梁在磁场影响下的固有频率解析解,并就多种典型情况进行了分析。在一般情况下,利用传递函数方法对振动控制方程进行求解,得到了纳米梁固有频率及相应振型的封闭解。以某单壁碳纳米管为例,计算得到了多种边界条件下纳米梁的前三阶固有频率,并详细分析了非局部参数、磁场强度、长细比、阻尼系数及边界条件等因素对纳米梁振动特性的影响情况。结果表明,文中所建的动力学分析模型对研究磁场作用下纳米梁在黏弹性基体上的动力学特性问题准确有效。

关键词:动力学特性;黏弹性基体;磁场;非局部纳米梁;传递函数方法

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2017)05-061-07

Dynamic analysis of nonlocal nanobeams resting on viscoelastic foundation subjected to a magnetic field

ZHANG Dapeng, LEI Yongjun, SHEN Zhibin

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Based on nonlocal Euler-Bernoulli beam theory, the dynamic characteristics analysis model for nanobeams resting on viscoelastic foundation and subjected to a magnetic field was built. The Kelvin viscoelastic foundation model and the Lorentz magnetic force were introduced to derive the governing equations of the system. The new general analytical expressions for the complex natural frequencies of the nanobeams were obtained on the basis of the Kelvin-Voigt model and some typical special cases were also discussed. Then the governing equations of motion were solved by using the transfer function method to obtain the natural frequencies and corresponding mode shapes in closed form for the nanobeams with arbitrary boundary condition. Considering a single-walled carbon nanotube as a numerical example, the first three natural frequencies under various boundary conditions were obtained, and a detailed parametric study was conducted to examine the effect of nonlocal parameter, the strength of the magnetic field, the aspect ratio, the damping parameter and the boundary conditions on the vibration characteristics of nanobeams. The results demonstrate the efficiency of the proposed model for dynamic characteristics analysis of the nanobeams resting on viscoelastic foundation under a magnetic field.

Key words: dynamic characteristics; viscoelastic foundation; magnetic field; nonlocal nanobeams; transfer function method

碳纳米管^[1]、氮化硼纳米管^[2]等纳米梁结构以其优异的力学性能在纳米传感器^[3]、纳米复合材料^[4]及纳机电系统等领域中得到了广泛应用。根据磁场对纳米梁动力学特性的影响规律,可以通过施加外部磁场在一定程度上调控纳米梁的动力学特性,从而推进碳纳米管、氮化硼纳米管等纳米梁在纳米传感器及纳机电系统领域的开发和利用。因此,对磁场中纳米梁结构的动力学特性进行研究具有重要意义,目前已成为许多学者研究的焦点^[5-7]。

实验研究^[8]表明碳纳米管等纳米材料存在明显的尺度效应。经典连续介质力学因无尺度相关性而无法准确描述纳米材料的力学行为^[9]。非局部理论的提出^[10]较好地弥补了经典连续介质力学理论在纳米尺度下的不足,在纳米材料力学问题研究中得到了广泛应用。非局部理论认为,一点处的应力状态不仅与该点的应变状态有关,还与整个域内其他点的应变状态也都有关系。基于非局部 Euler 梁理论和非局部 Timoshenko 梁理论,Lei 和 Adhikari 等^[11-12]建立了外加阻尼影

* 收稿日期:2016-05-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272348,11302254)

作者简介:张大鹏(1989—),男,河南新乡人,博士研究生,E-mail: zhangdapenghit@126.com;

雷勇军(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: leiyy108@nudt.edu.cn

响下的黏弹性纳米梁的振动控制方程,并利用传递函数法得到了纳米梁固有频率的封闭解。Wang 和 Deng 等^[13]根据非局部 Timoshenko 梁模型研究了磁场及热力场下输流碳纳米管在 Pasternak 弹性基体中的动力学问题,并分析了非局部参数、磁场及热力场对振动特性的影响。Güven^[14]利用该模型提出了一种理论方法用以计算单壁碳纳米管在初始应力和外部磁场影响下的频率响应。Kiani^[15]利用非局部 Rayleigh 梁、Timoshenko 梁及其他高阶梁模型对弹性基体中单壁碳纳米管在纵向磁场影响下的传播特性进行了分析。同时,Kiani^[16]还研究了纵向变化磁场对弹性基体中双壁碳纳米管振动特性的影响情况。Wang 和 Dong 等^[17]通过建立弹性基体中碳纳米管在磁场影响下的振动控制方程分析了碳纳米管的动力学特性。根据非局部 Euler 梁理论,Narendar 等^[18]研究了纵向磁场对 Pasternak 弹性基体中单壁碳纳米管波传播的影响情况。

就目前而言,在研究基体上纳米梁的动力学问题中所涉及的基体大都等效为 Winkler 弹性模型或 Pasternak 弹性模型。然而,实际工程中涉及的多数基体(如纳米复合材料中的聚合物基体^[19]、生物纳米传感器所处的生物体组织^[20]等)都表现出典型的黏弹性特性,采用传统的弹性模型无法准确描述其黏弹性特性。目前,针对非局部纳米梁在黏弹性基体上动力学特性问题的研究还很少,而其在外部磁场影响下的研究工作更是鲜有报道。为此,本文建立了一种研究黏弹性基体上非局部纳米梁在磁场影响下的动力学特性分析模型,可为相关问题研究提供有益参考。

1 动力学控制方程

1.1 麦克斯韦关系式

根据麦克斯韦关系式^[21]有

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\eta \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{e} = -\eta \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) \quad (4)$$

其中, \mathbf{J} 为电流密度, \mathbf{h} 为磁场扰动向量, \mathbf{e} 为电场强度向量, η 和 \mathbf{H} 分别为磁导率和磁场强度, $\mathbf{U} = (u, v, w)$ 为位移向量。本文仅考虑纳米梁受纵向磁场影响,即 $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$,则有

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H})$$

$$= -H_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i} + H_x \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j} + H_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h}$$

$$= H_x \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} - H_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + H_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \quad (6)$$

磁场引起的洛伦兹力可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \eta (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \\ &= \eta \left[0 \mathbf{i} + H_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

针对一维纳米梁的振动问题,有 $w = w(x, t)$,则可得由纵向磁场引起的洛伦兹力 q 为

$$q = \int_A f_z dz = \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

式中, A 为纳米梁的横截面积。

1.2 纳米梁振动控制方程

取其根置于黏弹性基体上的非局部纳米梁为研究对象,梁受外部纵向磁场作用影响,其简化力学模型如图 1 所示。基于广义 Maxwell 黏弹性模型^[6],本文将该纳米梁等效为非局部黏弹性 Euler 梁模型^[12, 22]进行分析。同时,利用非黏性阻尼的 Kelvin 黏弹性地基模型^[23]模拟基体的力学特性。根据非局部黏弹性理论^[10, 24],得到系统的动力学平衡方程为

$$\begin{aligned} E_\infty I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \int_0^t \sum_{m=1}^N E_m I e^{\frac{-t-\tau}{\tau_m}} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \tau} d\tau + \\ [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \left[k w(x, t) + C_0 \int_0^t \mu_0 e^{-\mu_0(t-\tau)} \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau \right] - \\ [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] q = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式中: E_∞ 和 E_m 为材料杨氏模量^[12]; $\tau_m = \eta_m / E_m$ 为松弛时间, η_m 为阻尼系数; I 为横截面积 A 对 y 轴的惯性矩; ρ 为纳米梁质量密度; w 为横向变形; $e_0 a$ 为非局部参数; τ 和 t 为时间; k 和 C_0 分别表示基体的刚度系数和阻尼系数; μ_0 为黏性系数

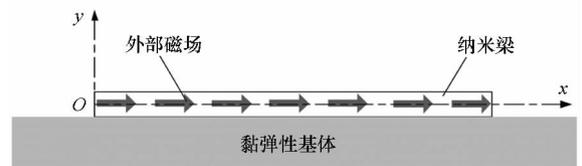


图 1 外部磁场影响下的某黏弹性基体上纳米梁
Fig. 1 Nanobeam resting on viscoelastic foundation subjected to an externally applied magnetic field

(当 $\mu_0 \rightarrow \infty$ 时,基体阻尼为黏性阻尼); q 为磁场引起的洛伦兹力。

为求得纳米梁的固有频率,令振动控制方程式(9)的解形如 $w = W(x) e^{i\omega t}$,其中 ω 和 $W(x)$ 分别表示纳米梁的复固有频率及对应的振型。将其代入振动方程式(9),可得

$$c^2 \left(1 + i\omega \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{E_\infty} \frac{\tau_m}{1 + i\omega\tau_m} \right) \frac{d^4 \bar{W}}{d\bar{x}^4} + \alpha^2 \xi \frac{d^4 \bar{W}}{d\bar{x}^4} - \xi \frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2} + \left[\omega^2 - \left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) \right] \alpha^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2} + \left[\left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) - \omega^2 \right] \bar{W} = 0 \quad (10)$$

式中, $k^* = k/\rho A$, $\zeta_0 = C_0/\rho A$, $\xi = \eta H_x^2/\rho L^2$, $c = \sqrt{EI/\rho A}/L^2$, $\alpha = e_0 a/L$, $\bar{x} = x/L$, $\bar{W} = W/L$ (其中 L 为纳米梁的长度)。由式(10)可以看出,简化后的振动控制方程为 \bar{W} 的四阶常系数微分方程,其系数是关于复固有频率 ω 的函数。对于四阶常系数微分方程式(10),方程解的形式可写成四项形如 $\bar{W} = \bar{W}_n e^{-i\beta x}$ 之和,则有

$$c^2 \left(1 + i\omega \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{E_\infty} \frac{\tau_m}{1 + i\omega\tau_m} \right) \beta^4 + \alpha^2 \xi \beta^4 + \xi \beta^2 - \left[\omega^2 - \left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) \right] \alpha^2 \beta^2 + \left[\left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) - \omega^2 \right] = 0 \quad (11)$$

当纳米梁两端施加典型边界条件(如简支、固支等)时,可确定频率参数 β 的取值。此时,振动控制方程式(11)可化为关于 ω 的 $N+2$ 次常系数多项式,从而可确定纳米梁的固有频率。

1.3 边界条件

为求解振动控制方程的解,首先需要确定纳米梁的边界条件。下面给出了纳米梁的三种典型边界条件。

1) 自由边界条件

$$Q(x, t) = M(x, t) = 0 \quad (x=0 \text{ 或 } L) \quad (12)$$

2) 简支边界条件

$$w(x, t) = M(x, t) = 0 \quad (x=0 \text{ 或 } L) \quad (13)$$

3) 固支边界条件

$$w(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (x=0 \text{ 或 } L) \quad (14)$$

其中, $M(x, t)$ 和 $Q(x, t)$ 为纳米梁的弯矩和剪力,具体表达式分别为

$$M(x, t) = \rho AL^3 \left\{ c^2 \left(1 + i\omega \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{E_\infty} \frac{\tau_m}{1 + i\omega\tau_m} \right) \frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2} + \alpha^2 \xi \frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2} + \alpha^2 \left[\omega^2 - \left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) \right] \bar{W} \right\}$$

$$i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \left. \right] \bar{W} \quad (15)$$

$$Q(x, t) = \rho AL^2 \left\{ c^2 \left(1 + i\omega \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{E_\infty} \frac{\tau_m}{1 + i\omega\tau_m} \right) \frac{d^3 \bar{W}}{d\bar{x}^3} + \alpha^2 \xi \frac{d^3 \bar{W}}{d\bar{x}^3} + \alpha^2 \left[\omega^2 - \left(k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0} \right) \right] \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}} \right\} \quad (16)$$

2 问题求解

2.1 特定条件下解析解

假设黏弹性基体的阻尼为黏性阻尼(即 $\mu_0 \rightarrow \infty$),并将广义 Maxwell 黏弹性模型简化为 Kelvin-Voigt 模型(取 $N = 1, E_1 \rightarrow \infty$),则振动控制方程式(11)可化为

$$-(1 + \alpha^2 \beta^2) \omega^2 + [c^2 \beta^4 \tau_d + \zeta_0 (1 + \alpha^2 \beta^2)] i\omega + c^2 \beta^4 + (\xi \beta^2 + k^*) (1 + \alpha^2 \beta^2) = 0 \quad (17)$$

式中, $\tau_d = \eta_1/E_\infty$ 。求解关于 ω 的二次方程式(17)即可得到该特定条件下纳米梁的复固有频率解析解

$$\omega_n = \left[\frac{\zeta_0}{2} + \frac{c^2 \beta^4}{2(1 + \alpha^2 \beta^2)} \tau_d \right] i \pm \sqrt{- \left[\frac{\zeta_0}{2} + \frac{c^2 \beta^4}{2(1 + \alpha^2 \beta^2)} \tau_d \right]^2 + \left[\frac{c^2 \beta^4}{1 + \alpha^2 \beta^2} + \xi \beta^2 + k^* \right]} \quad (18)$$

式中,虚部和实部分别表征了系统的阻尼比和阻尼频率。同时,通过式(18)可以得到令系统为非往复振动(即实部为 0)的松弛时间 τ_d 的临界值为

$$(\tau_d)_{\text{crit}} = \frac{1 + \alpha^2 \beta^2}{c^2 \beta^4} \left(2 \sqrt{\frac{c^2 \beta^4}{1 + \alpha^2 \beta^2} + \xi \beta^2 + k^*} - \zeta_0 \right) \quad (19)$$

根据特定的物理意义,解析式(18)为多种典型情况的一般表达式,下面仅就几种简单情况进行讨论:

1) 当非局部纳米梁简化为经典弹性 Euler 梁时, $\alpha = \tau_d = 0$,则有

$$\omega_n = \frac{\zeta_0}{2} i \pm \sqrt{- \left(\frac{\zeta_0}{2} \right)^2 + c^2 \beta^4 + \xi \beta^2 + k^*} \quad (20)$$

与熟知的 Euler 梁经典解 $\omega_n = c\beta^2$ 相比,考虑了黏弹性基体和外部磁场的影响。

2) 当不考虑外部磁场及黏弹性基体影响,且纳米梁为非局部弹性梁时, $\tau_d = k^* = \zeta_0 = \xi = 0$,则固有频率为

$$\omega_n = c\beta^2 \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha^2 \beta^2}} \quad (21)$$

该解与文献[25]中给出的固有频率表达式一致。

3) 当 $\xi = 0$, 即不考虑外部磁场对纳米梁的影响时, 固有频率则可写为

$$\omega_n = \left[\frac{\zeta_0}{2} + \frac{c^2 \beta^4}{2(1 + \alpha^2 \beta^2)} \tau_d \right] i \pm \sqrt{- \left[\frac{\zeta_0}{2} + \frac{c^2 \beta^4}{2(1 + \alpha^2 \beta^2)} \tau_d \right]^2 + \left[\frac{c^2 \beta^4}{1 + \alpha^2 \beta^2} + k^* \right]} \quad (22)$$

该解在文献[22]中已给出。

上述为针对某特定条件给出纳米梁固有频率的解析解。对于一般情况, 振动控制方程(10)可利用传递函数法^[26]进行求解。

2.2 传递函数法求解

为了得到振动控制方程的解, 首先定义状态向量

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \omega) = \left[\bar{W}, \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}}, \frac{d^2\bar{W}}{d\bar{x}^2}, \frac{d^3\bar{W}}{d\bar{x}^3} \right]^T \quad (23)$$

利用状态向量(23), 可将式(10)写为状态方程形式

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \omega)}{d\bar{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\omega) \boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \omega) \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega^2 - A_2}{c^2 A_1 + \alpha^2 \xi} & 0 & \frac{\xi - \alpha^2(\omega^2 - A_2)}{c^2 A_1 + \alpha^2 \xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中,

$$A_1 = 1 + i\omega \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{E_\infty} \frac{\tau_m}{1 + i\omega\tau_m}$$

$$A_2 = k^* + i\omega\zeta_0 \frac{\mu_0}{i\omega + \mu_0}$$

状态方程(24)的解可写为

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \omega) = e^{\bar{x}\boldsymbol{\Phi}(\omega)} \boldsymbol{\eta}(0, \omega) \quad (26)$$

取 $\bar{x} = 1$, 则式(26)可改为

$$\boldsymbol{\eta}(1, \omega) = e^{\boldsymbol{\Phi}(\omega)} \boldsymbol{\eta}(0, \omega) \quad (27)$$

同理, 利用状态向量(23), 纳米管的边界条件可写为

$$\mathbf{M}(\omega) \boldsymbol{\eta}(0, \omega) + \mathbf{N}(\omega) \boldsymbol{\eta}(1, \omega) = \mathbf{0} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{M}(\omega)$ 和 $\mathbf{N}(\omega)$ 分别为纳米梁左右两端的边界条件选择矩阵^[26]。将式(27)代入式(28)可得

$$[\mathbf{M}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) e^{\boldsymbol{\Phi}(\omega)}] \boldsymbol{\eta}(0, \omega) = \mathbf{0} \quad (29)$$

则, 求解如式(30)所示的特征方程即可得到纳米梁的固有频率。

$$\det[\mathbf{M}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) e^{\boldsymbol{\Phi}(\omega)}] = 0 \quad (30)$$

且固有频率 ω_j 对应的模态振型为

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{x}, \omega_j) = e^{\bar{x}\boldsymbol{\Phi}(\omega_j)} \boldsymbol{\eta}(0, \omega_j) \quad (31)$$

3 算例分析

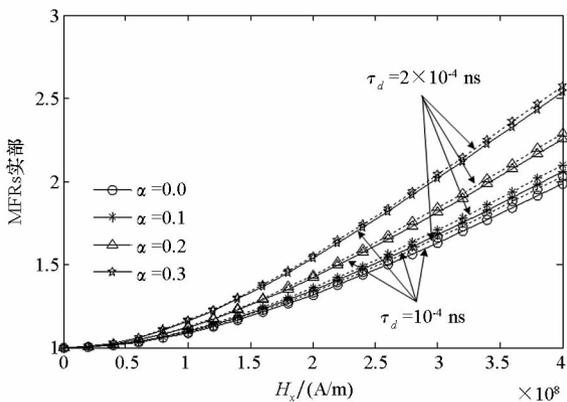
为了验证本文所建模型及求解方法的正确性, 首先利用文献[27]中已有结果与本文计算结果进行对比, 如表 1 所示。算例中涉及的基本参数与文献[27]一致: 碳纳米管直径 $d = 0.678 \text{ nm}$, 弹性模型 $E = 5.5 \text{ TPa}$, 质量密度 $\rho = 2.3 \text{ g/cm}^3$, 等效壁厚 $\delta = 0.066 \text{ nm}$, 长细比 $L/d = 10$ 。同时不考虑黏弹性基体和外部磁场影响, 即 $k^* = \zeta_0 = H_x = \tau_d = 0$ 。从表中可以看出, 利用传递函数法得到的纳米梁在各边界条件下的前三阶频率参数 β 与文献[27]中相应结果吻合较好, 验证了本文所建模型及求解方法的正确性。同时还可以看出, 纳米梁各阶固有频率随着边界连接刚度的增大而明显增大。另外, 表 1 中还给出了黏弹性基体上纳米梁在受外部磁场影响下的前三阶频率参数。经分析可知, 考虑系统的阻尼特性后的固有频率出现虚部(即阻尼比), 且黏弹性基体和磁场对纳米梁的动力学特性具有较大影响。下面针对非局部参数、黏弹性基体和磁场等的具体影响特性作进一步分析。

在分析外部磁场对纳米梁振动特性影响时, 定义纳米梁的频率比(Magnetic Frequency Ratios, MFRs)为 ω/ω_{H_0} , 其中 ω_{H_0} 表示纳米梁在无外加磁场情况下的阻尼频率值。图 2 给出了纳米梁在不同非局部参数 α 和松弛时间 τ_d 下频率比 MFRs 随磁场强度 H_x 的变化情况。本算例中使用的纳米梁及黏弹性基体的材料参数同上算例, 且仅以简支边界条件下纳米梁为例进行分析。从图 2(a)可以看出, 纳米梁的频率比 MFRs 实部随着磁场强度 H_x 的增大而明显增大, 且其值均大于 1, 即施加外部磁场可明显提高黏弹性基体上纳米梁的结构刚度。同时, 增大非局部参数 α 时, 纳米梁阻尼频率受外部磁场的影响也随之明显增大, 而松弛时间 τ_d 对纳米梁阻尼频率的影响则很小。从图 2(b)可以看出, 纳米梁频率比 MFRs 虚部不受外部磁场的影响, 该变化情况与纳米梁复固有频率解析表达式(18)相符, 即外部磁场仅影响式(18)的实部, 虚部与其无关。另外, 纳米梁频率比 MFRs 虚部(即阻尼比)随着松弛时间 τ_d 的增大而明显增大, 随着非局部参数 α 的增大而逐渐减小。

表1 纳米梁在不同边界条件和非局部参数 α 下的前三阶频率参数 β

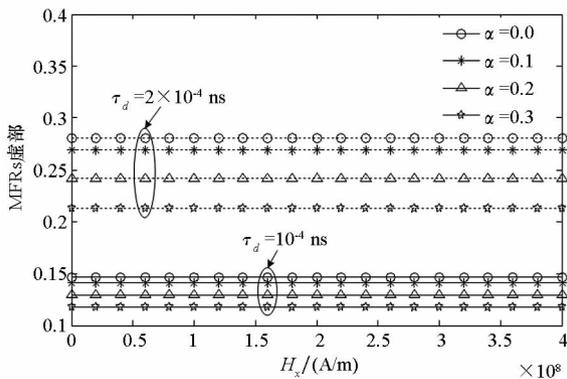
Fig. 1 The first three frequency parameters β for the nanobeams with various boundary conditions and nonlocal parameters α

边界条件	无基体及磁场影响下纳米梁 ($k^* = \zeta_0 = H_x = \tau_d = 0$)						有外部磁场影响下的黏弹性基体上纳米梁 ($k^* = 10^5, \zeta_0 = 100, H_x = 10^8, \tau_d = 10^{-4}$)					
	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$
	本文解	文献 [27]	本文解	文献 [27]	本文解	文献 [27]						
简支梁	3.141 6	3.141 6	3.068 5	3.068 5	2.680 0	2.680 0	3.280 1 + 0.220 0i	3.217 5 + 0.206 8i	2.898 8 + 0.147 7i			
	6.283 2	6.283 2	5.781 7	5.781 7	4.301 3	4.301 3	6.139 8 + 1.641 8i	5.736 1 + 1.264 8i	4.485 4 + 0.510 6i			
	9.424 8	9.424 8	8.040 0	8.040 0	5.442 2	5.442 2	8.608 4 + 8.608 4i	7.212 0 + 3.724 6i	5.585 3 + 1.023 5i			
悬臂梁	1.875 1	1.875 1	1.879 2	1.879 2	1.891 9	1.915 4	1.875 9 + 0.093 9i	1.895 1 + 0.093 3i	2.057 8 + 0.088 6i			
	4.694 1	4.694 1	4.547 5	4.547 5	3.766 5	3.766 5	4.743 2 + 0.676 2i	4.540 9 + 0.582 7i	3.768 0 + 0.302 6i			
	7.854 8	7.854 8	7.145 9	7.145 9	5.298 8	5.298 8	7.128 6 + 3.434 0i	6.670 6 + 2.275 1i	5.077 5 + 0.752 0i			
固支梁	4.730 0	4.730 0	4.593 5	4.594 5	3.907 1	3.918 4	4.776 5 + 0.691 7i	4.570 0 + 0.594 6i	3.785 8 + 0.306 8i			
	7.852 5	7.853 2	7.145 4	7.140 2	5.191 7	5.196 3	7.128 0 + 3.431 5i	6.669 8 + 2.273 9i	5.077 0 + 0.751 8i			
	10.996 0	10.996 0	9.258 0	9.258 3	6.266 2	6.231 7	12.844 0 + 12.844 0i	7.228 0 + 7.228 0i	6.028 0 + 1.323 5i			



(a) MFRs 实部

(a) Real part of MFRs



(b) MFRs 虚部

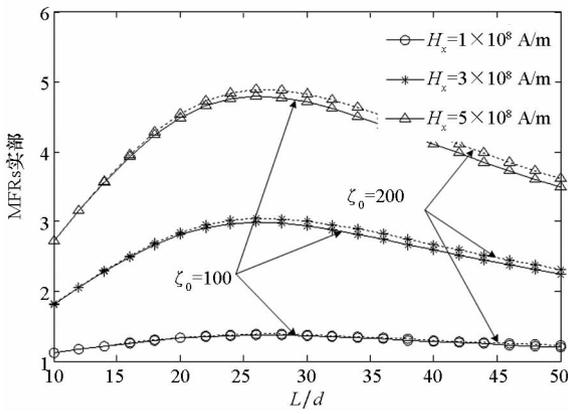
(b) Imaginary part of MFRs

图2 不同非局部参数 α 和松弛时间 τ_d 下磁场强度 H_x 对频率比 MFRs 的影响情况

Fig. 2 Effect of the strength of magnetic field H_x on the frequency ratios MFRs for various values of nonlocal parameter α and relaxation time τ_d

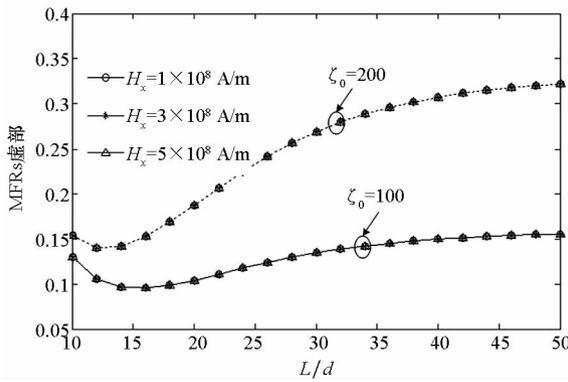
不同磁场强度及基体阻尼下纳米梁长细比 L/d 对频率比 MFRs 的影响情况如图 3 所示。从图 3(a) 中可知, 纳米梁频率比 MFRs 的实部先随着长细比 L/d 的增大逐渐增大, 而后又逐渐减小, 在长细比 $L/d = 26$ 时达到最大值。固有频率的解析表达式 (18) 可以对该变化趋势进行解释, 根据式 (18) 可知, 阻尼频率随参数 c 的变化趋势与图 3(a) 一致, 而由参数 c 的定义可知, 参数 c^2 与长细比的平方 $(L/d)^2$ 近似成反比, 即改变长细比 L/d 后引起参数 c 的变化从而间接影响了阻尼频率的变化趋势。同时, 增大磁场强度可以明显增大频率比 MFRs 的实部, 而基体阻尼的变化则对其影响很小。图 3(b) 给出了长细比 L/d 对频率比 MFRs 虚部的影响情况。从图中可以看出, 纳米梁阻尼比随着长细比 L/d 的增大先减小后增大, 即存在某个确定的长细比 L/d 使得频率比 MFRs 虚部最小。该变化规律同样可从固有频率解析表达式 (18) 中看出, 改变长细比 L/d 可直接影响式 (18) 中参数 c 的取值, 从而间接影响了式 (18) 中虚部的变化规律。另外, 减小基体阻尼可以大幅度地减小纳米梁的阻尼比。由于频率比 MFRs 虚部为固有频率虚部与阻尼频率的比值, 因此 MFRs 虚部的变化趋势与阻尼频率具有一定的相关性。在实际工程应用中, 可以首先利用本文所建模型得到系统阻尼频率和阻尼比随长细比的变化曲线, 然后根据具体的工程需要, 确定满足实际工程要求的最优长细比。

为了分析边界条件对纳米梁振动特性的影响



(a) MFRs 实部

(a) Real part of MFRs



(b) MFRs 虚部

(b) Imaginary part of MFRs

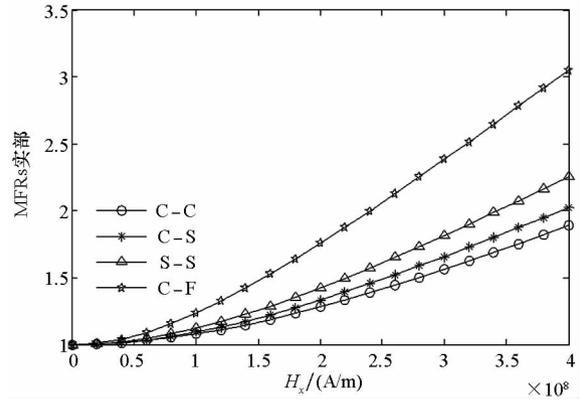
图 3 不同磁场强度 H_x 和基体阻尼参数 ζ_0 下长细比 L/d 对频率比 MFRs 的影响情况

Fig. 3 Effect of aspect ratio L/d on the frequency ratios MFRs for various values of the strength of magnetic field H_x and damping parameter of the foundation ζ_0

情况,图 4 给出了固支-固支(C-C)、固支-简支(C-S)、简支-简支(S-S)和悬臂(C-F)条件下纳米梁频率比 MFRs 随 H_x 的变化曲线。由图 4(a)可知,随着磁场强度 H_x 的增大,各边界条件下纳米梁阻尼频率均明显增大,且幅度从大到小按 C-F、S-S、C-S、C-C 排序,这说明减小纳米梁的边界连接刚度可以明显提高阻尼频率对磁场强度的敏感度。频率比 MFRs 虚部变化情况如图 4(b)所示,同样可以看出虚部与磁场强度 H_x 的变化无关,仅随边界连接刚度的增大而逐渐增大。

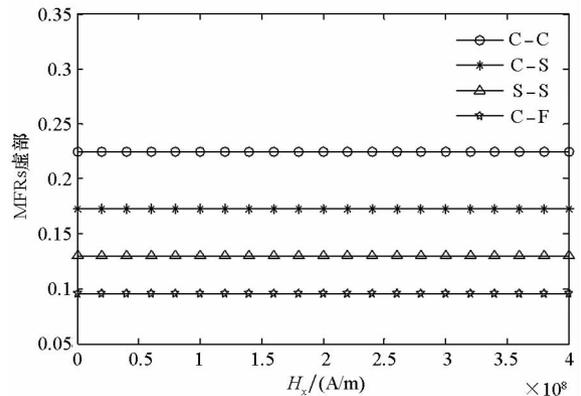
4 结论

基于非局部 Euler 梁模型,建立了黏弹性基体上纳米梁在磁场影响下的动力学分析模型。通过引入非局部理论、Kelvin 黏弹性地基模型及洛伦兹力,首先建立了系统的振动控制方程,然后利



(a) MFRs 实部

(a) Real part of MFRs



(b) MFRs 虚部

(b) Imaginary part of MFRs

图 4 不同边界条件下磁场强度 H_x 对频率比 MFRs 的影响情况

Fig. 4 Effect of the strength of magnetic field H_x on the frequency ratios MFRs for different boundary conditions

用传递函数法对该方程进行了求解。同时本文还得到了特定条件下纳米梁固有频率的解析解,并对多种典型情况作了分析。通过与文献中已有结果对比,验证了本文所建模型的正确性,并在此基础上分析了非局部参数、磁场强度、长细比、阻尼系数及边界条件等影响因素的动力学特性。主要结论包括:

1) 外部磁场可大幅度提高纳米梁的阻尼频率,当磁场强度 H_x 由 0 增大到 4×10^8 A/m 时,各非局部参数下纳米梁的阻尼频率均增大了 100% 以上,且增大幅度随着非局部参数的增大而明显增大,但系统的阻尼比不受磁场变化影响。

2) 存在一个最优长细比 L/d 使得纳米梁阻尼频率对外部磁场的敏感度最高。此外,存在确定的长细比 L/d 使得系统的阻尼比最小。

3) 边界条件对纳米梁振动特性有较大影响,减小纳米梁的边界连接刚度可以明显提高阻尼频率对磁场强度的敏感度。

参考文献 (References)

- [1] Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon [J]. *Nature*, 1991, 354: 56–58.
- [2] Blase X, Rubio A, Louie S G, et al. Stability and band gap constancy of boron nitride nanotubes [J]. *Europhysics Letters*, 1994, 28(5): 335–340.
- [3] Shen Z B, Li X F, Sheng L P, et al. Transverse vibration of nanotube-based micro-mass sensor via nonlocal Timoshenko beam theory [J]. *Computational Materials Science*, 2012, 53(1): 340–346.
- [4] Yas M H, Samadi N. Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation [J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, 98: 119–128.
- [5] Murmu T, McCarthy M A, Adhikari S. Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field; a nonlocal elasticity approach [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(23): 5069–5086.
- [6] Wang H, Dong K, Men F, et al. Influences of longitudinal magnetic field on wave propagation in carbon nanotubes embedded in elastic matrix [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(4): 878–889.
- [7] Narendar S, Gupta S S, Gopalakrishnan S. Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(9): 4529–4538.
- [8] Poncharal P, Wang Z L, Ugarte D, et al. Electrostatic deflections and electro-mechanical resonances of carbon nanotubes [J]. *Science*, 1999, 283(5407): 1513–1516.
- [9] 申志彬. 基于非局部弹性理论的微纳米质量传感器振动特性研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2012.
- SHEN Zhibin. Vibration characteristics of micro/nano mass sensor via nonlocal elasticity theory [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012. (in Chinese)
- [10] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solution of screw dislocation and surface waves [J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9): 4703–4710.
- [11] Lei Y, Adhikari S, Friswell M I. Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2013, 66/67: 1–13.
- [12] Lei Y, Murmu T, Adhikari S, et al. Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2013, 42: 125–136.
- [13] Wang B, Deng Z C, Ouyang H J, et al. Wave characteristics of single-walled fluid-conveying carbon nanotubes subjected to multi-physical fields [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2013, 52: 97–105.
- [14] Güven U. Transverse vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial stress under magnetic field [J]. *Composite Structures*, 2014, 114: 92–98.
- [15] Kiani K. Transverse wave propagation in elastically confined single-walled carbon nanotubes subjected to longitudinal magnetic fields using nonlocal elasticity models [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2012, 45: 86–96.
- [16] Kiani K. Longitudinally varying magnetic field influenced transverse vibration of embedded double-walled carbon nanotubes [J]. *International Journal of Mechanical Science*, 2014, 87: 179–199.
- [17] Wang H, Dong K, Men F, et al. Influences of longitudinal magnetic field on wave propagation in carbon nanotubes embedded in elastic matrix [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(4): 878–889.
- [18] Narendar S, Gupta S S, Gopalakrishnan S. Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(9): 4529–4538.
- [19] Kazemi-Lari M A, Fazelzadeh S A, Ghavanloo E. Non-conservative instability of cantilever carbon nanotubes resting on viscoelastic foundation [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2012, 44(7/8): 1623–1630.
- [20] Soltani P, Taherian M M, Farshidianfar A. Vibration and instability of a viscous-fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in a visco-elastic medium [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, 43(42): 425401.
- [21] Arani A G, Amir S, Dashti P, et al. Flow-induced vibration of double bonded visco-CNTs under magnetic fields considering surface effect [J]. *Composite Materials Science*, 2014, 86: 144–154.
- [22] 张大鹏, 雷勇军. 黏弹性基底上阻尼碳纳米管的动力学特性 [J]. *国防科技大学学报*, 2015, 37(6): 141–149.
- ZHANG Dapeng, LEI Yongjun. Dynamic characteristics of damped carbon nanotubes on viscoelastic foundation [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2015, 37(6): 141–149. (in Chinese)
- [23] Friswell M I, Adhikari S, Lei Y. Vibration analysis of beams with non-local foundations using the finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 71(11): 1365–1386.
- [24] Arash B, Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes [J]. *Computational Materials Science*, 2012, 51(1): 303–313.
- [25] Lu P, Lee H P, Lu C, et al. Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model [J]. *Journal of Applied Physics*, 2006, 99(7): 073510.
- [26] Yang B, Tan C A. Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59(4): 1009–1014.
- [27] Wang C M, Zhang Y Y, He X Q. Vibration of nonlocal Timoshenko beams [J]. *Nanotechnology*, 2007, 18(10): 105401.