

高精度分数时延滤波器设计的边界拟合 Remez 算法*

吴桐^{1,2}, 闫毅¹, 王春梅¹, 姚秀娟¹, 陈鼎¹

(1. 中国科学院国家空间科学中心, 北京 100190; 2. 中国科学院大学, 北京 100010)

摘要:在卫星星间测距模拟信号仿真及实际测试中,为提高测距模拟信号精度和系统可用带宽,提出基于边界拟合 Remez 算法的高精度分数时延滤波器的设计算法。该算法利用 Farrow 结构的多项式近似思想,采用多项式拟合 Remez 算法设计滤波器的冲激响应边界系数,通过多相分解实现分数时延滤波器组。该算法改善了当设计的滤波器阶数较高时冲激响应边界的不连续现象,进而降低了群时延误差,提高了精度。仿真结果表明,该算法设计的滤波器的分数时延精度得到了提高,同时系统可用带宽提高近一倍,实现时需使用的乘法器数目也有明显降低。

关键词:测距信号;分数时延滤波器组;Remez 算法;群时延误差;边界拟合算法

中图分类号:TN911 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2017)05-122-06

High-accuracy fractional delay filter design based on Remez algorithm with boundary fitting

WU Tong^{1,2}, YAN Yi¹, WANG Chunmei¹, YAO Xiujuan¹, CHEN Ding¹

(1. National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100010, China)

Abstract: In order to improve the ranging accuracy between satellites and increase the available bandwidth of systems in the simulation and tests, a design algorithm for high-accuracy fractional delay filter based on the boundary fitting Remez algorithm was proposed. The proposed algorithm used the polynomial approximation thought of Farrow structure to fit the impulse response boundary coefficients of the filter designed by Remez algorithm, and achieved fractional delay filters through the polyphase decomposition. The proposed algorithm achieved continuous impulse response boundary when high-order filters was used, while the group delay error was reduced and the accuracy was improved. The simulation results show that the proposed algorithm improves the accuracy of fractional delay filters a little, doubles the available bandwidth and reduces the number of multipliers need to be used.

Key words: ranging signal; fractional delay filters; Remez algorithm; group delay error; boundary fitting algorithm

分数时延在卫星导航模拟^[1]、雷达^[2]、通信^[3]等领域有着广泛的应用。在卫星星间测距信号模拟中,分数时延是模拟高分辨率伪码多普勒信号的关键技术。通常可以使用有限冲激响应(Finite Impulse Response, FIR)或无限冲激响应(Infinite Impulse Response, IIR)两种结构实现分数时延^[4-5],FIR 滤波器结构以其线性相位和较高的稳定性而得到了更多的关注。

分数时延滤波器的设计有多种方法^[6-7],目前研究较多的主要是多相结构多速率采样法和 Farrow 结构多速率采样法。Farrow 结构多速率采样法的优点是占用的存储资源少、改变分数时延需实时更新的参数少,不足是系统带宽小、占用的

乘法器资源较多^[3];多相结构多速率采样法的优点和不足正好与 Farrow 结构多速率采样法的相反。由于通常现场可编程门阵列(Field-Programmable Gate Array, FPGA)芯片的存储资源丰富而乘法器资源较为紧张,因此实现分数时延滤波器时多采用多相结构多速率采样法。

多相结构多速率采样法的核心是设计可供多相分解的高阶滤波器,设计高阶滤波器的方法较多,主要有窗函数法、最小二乘法、插值法、Remez 算法等,其中 Remez 算法拥有灵活的迭代设计方法,能够取得较高的分数时延精度,因此本文采用 Remez 算法作为设计的基本算法。

目前在多相结构多速率采样法的分数时延滤

* 收稿日期:2016-05-04

基金项目:国防科工局民用航天专业技术研究资助项目(Y46601C82S)

作者简介:吴桐(1990—),男,陕西渭南人,博士研究生,E-mail:wutong963852@163.com;

陈鼎(通信作者),男,研究员,博士,博士生导师,E-mail:ding@nssc.ac.cn

波器设计中,通常一次设计只做到采样周期的几十分之一^[8],因为较多的多相分解会导致分数时延滤波器组的一致性变差、群时延误差增大等问题^[3]。针对这些问题,本文采用 Remez 算法进行分数时延滤波器设计,同时利用 Farrow 结构的多项式拟合思想^[9],对 Remez 算法设计的高阶滤波器进行边界拟合,从而在较多的多相分解下仍具有较好一致性和较低群时延误差的分数时延滤波器组,最终降低群时延误差,提高分数时延的精度。

1 基于多相结构的分数时延滤波器组设计算法

采用多相结构多速率采样法设计的 $1/M$ 分数时延滤波器组具有如图 1 所示的结构,其分数时延性能的优劣取决于其中 $H_0(z), \dots, H_{M-1}(z)$ 这 M 个滤波器的设计。根据滤波器的多相分解理论,这 M 个滤波器可以通过分解一个高阶的低通滤波器而得到,因此多相结构多速率采样法设计分数时延滤波器组的实质就是设计满足分解要求的高阶低通滤波器。

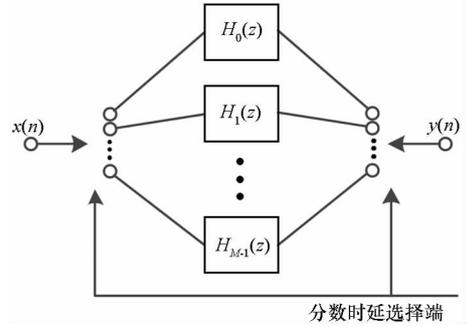
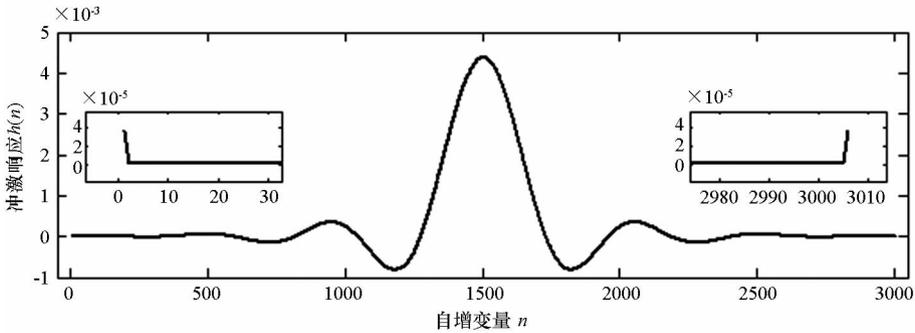
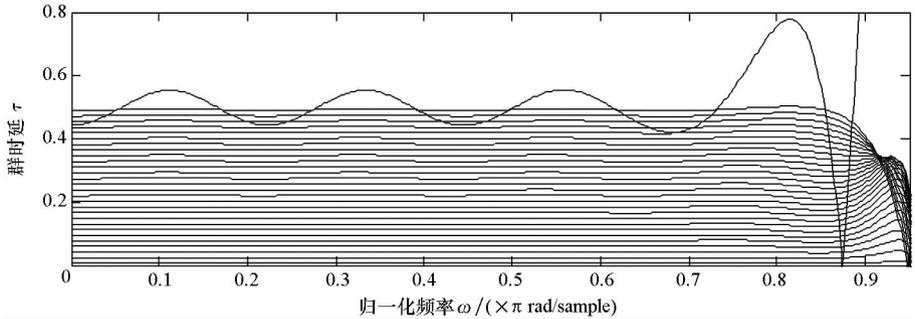


图 1 分数时延滤波器组的实现结构
Fig.1 Structure of fractional delay filters

使用 Remez 算法设计的低通滤波器满足最大误差最小准则^[10],具有很高的灵活性,其最大特点是在确定滤波器阶数 N 、通带截止频率 ω_p 、阻带截止频率 ω_s 的情况下,可以设计出通带和阻带都等波纹的滤波器。然而当 M 增大到一定程度时,Remez 算法设计出的滤波器的冲激响应边界会出现不连续点^[6],如图 2 (a)所示,这就导致了多相分解后的分数时延滤波器组群时延误差增加,如图 2(b)所示。



(a) 滤波器冲激响应
(a) Impulse response of the filter



(b) 多相分解后的群时延曲线
(b) Group delay after polyphase decomposition

图 2 Remez 算法设计的低通滤波器响应

Fig.2 Response of the low pass filter designed by Remez algorithm

出现不连续点的原因,从 Remez 算法设计滤波器的物理意义上说,是为了满足最佳一致逼近准则,从而实现滤波器的通带区间和阻带区间的

误差函数均匀、一致且最小,即保证了滤波器频率响应的通带和阻带等波纹^[11]。其主要设计过程是利用切比雪夫交错点定理从频域上进行设计,

所有参数均使用 Remez 算法迭代求解,设计求解完成后做傅里叶逆变换从而得到滤波器冲激响应^[11]。因此用该方法设计完成的滤波器其时域状态在整个设计过程中都是不关心的,而多相分解恰恰是从滤波器时域的冲激响应出发进行设计,故被分解滤波器的时域形状会影响分数时延滤波器组的误差性能。

2 边界拟合 Remez 算法

理想的分数时延滤波器组的系统函数为:

$$H_d(\omega, r) = e^{-j\omega r} = e^{-j\omega(D + \frac{r}{M-1})} \quad (1)$$

式中: D 为整数倍时延; r 表示第 r 个分数时延滤波器, $r \leq M-1, r \in \mathbf{N}$; ω 为归一化角频率。

设使用 Remez 算法设计出的高阶低通滤波器的系统函数为:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (2)$$

式中, N 为滤波器阶数, $h(n)$ 为滤波器冲激响应, n 为公式中的自增变量。

对上述高阶滤波器使用 M 相的多相分解,可以得到:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{r=0}^{M-1} z^{-r} \sum_{n=0}^{(N/M)-1} h(r+nM)z^{-nM} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} H_r(z^M)z^{-r} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$H_r(z^M) = \sum_{n=0}^{(N/M)-1} h(r+nM)z^{-nM} \quad (4)$$

利用 Noble 恒等式^[6]变换后的分数时延滤波器组为:

$$\begin{aligned} H_r(z) &= \sum_{n=0}^{(N/M)-1} h(r+nM)z^{-n}, \\ r &\leq M-1, r \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5)$$

因此,式(5)即为使用 FIR 滤波器组对式(1)分数时延的实现。

为了评价所设计的滤波器的性能,给出群时延误差函数(Group Delay Error Function, GDEF)定义^[12]:

$$e_r(\omega, r) = |\tau_d(\omega, r) - \tau_H(\omega, r)| \quad (6)$$

式中, $\tau_d(\omega, r)$ 表示理想的 r 个分数时延滤波器组 $H_d(\omega, r)$ 的群时延, $\tau_H(\omega, r)$ 表示 FIR 滤波器组 $H_r(z)$ 的群时延。

根据式(1)和式(5),有:

$$\tau_d(\omega, r) = -\frac{\partial \arg[H_d(\omega, r)]}{\partial \omega} = D + \frac{r}{M-1} \quad (7)$$

$$\tau_H(\omega, r) = -\frac{\partial \arg[H_r(z)|_{z=e^{j\omega}}]}{\partial \omega}$$

$$= -\frac{\partial \arg[FT[h(r+nM)]]}{\partial \omega} \quad (8)$$

其中, $\arg[\cdot]$ 表示求系统函数的相频响应, $FT[\cdot]$ 表示进行傅里叶变换。

前文提到使用 Remez 算法设计滤波器需要确定滤波器阶数 N 、通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 。对于设计多相结构分数时延滤波器来说,由于其插值特性,其阻带截止频率是确定的,即 $\omega_s = 1/(M-1)$;为了节约资源,通常选择较小的 N ,同时为了增加带宽,需要选择较大的 ω_p 。

这里采用较常用的仿真方法来确定 N 和 ω_p , 确定的原则为最大群时延误差最小以及其上确界原则:

$$\begin{aligned} \min_{N, \omega_p} \{ \max_{0 \leq \omega \leq \omega_u} [e_r(\omega, r)] \} &\leq \frac{1}{M-1}, \\ 1 &\leq r \leq M-2, r \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (9)$$

式中, ω_u 为由 r 个子滤波器构成的系统的通带截止频率。

式(9)也说明,对于分数时延滤波器组设计结果,从约束优化的角度上说,属于对群时延误差使用“最大最小准则”,即对每一个分数时延滤波器,都要求其满足最大群时延误差最小且不能超过上界,而不再是 Remez 算法设计滤波器时使用的通带和阻带波动误差的最佳一致逼近准则。

由图 2 可知,多相分解后的第 1 个和第 M 个子滤波器会受到冲激响应边界的不连续的影响,若要使这两个子滤波器与其余 $M-2$ 个子滤波器的群时延特性一致,就要消除 Remez 算法带来的不连续现象。由于冲激响应的对称性,以下仅对第 1 个子滤波器进行不连续性的消除,第 M 个子滤波器的不连续点的冲激响应值可以直接等于第 1 个子滤波器。

根据 Farrow 结构的思想,各子滤波器的对应系数应满足多项式近似的原理,因此,可以利用其他 $M-1$ 个子滤波器对第 1 个子滤波器的系数进行不连续性消除。下面给出算法步骤及推导:

第一步:提取其他 $M-1$ 个子滤波器的第一个系数。根据式(5),这 $M-1$ 个系数组成的集合为 $A = \{h(1), h(2), h(3), \dots, h(M-1)\}$ 。

第二步:对这个集合中的所有数进行多项式拟合,利用拟合后最大群时延误差最小的原则以及误差函数上界,即

$$\min_m \{ \max_{0 \leq \omega \leq \omega_u} [e_r(\omega, 0)] \} \leq \frac{1}{M-1} \quad (10)$$

得到多项式的阶数 m , 拟合方法的选择可参照文献[13],最后得到多项式拟合函数:

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad 1 \leq x \leq M-1, x \in \mathbf{N} \quad (11)$$

第三步:将不连续点的 x 值代入拟合函数式(11)中,得到修正后的不连续点数值 $f(x)$,此时整个滤波器的冲激响应即变为连续,Remez 算法在分数时延滤波器组的设计中得到了修正。

值得说明的是,按照上文的方法约束优化后,得到的是一组满足工程需求的满意解,但不一定是最优解。

3 仿真分析与实例验证

3.1 边界拟合 Remez 算法的合理性分析

Remez 算法设计的滤波器之所以会出现冲激响应在边界处不连续的现象是因为在其算法迭代过程中需要满足阻带等波纹的约束,而利用边界拟合方法将不连续点拟合成连续点实质是降低阻带增益。这是因为冲激响应边界处的点对阻带增益影响较多,而对通带和过渡带几乎没有影响^[6]。通过图 3 所示的改进后 Remez 算法滤波器的频率响应可以看到,阻带增益进一步降低。这种降低在一般滤波器的设计中未必是有益的,但是在分数时延滤波器的设计中一定是有益的,因为提高了滤波器对插值引起的频谱扩展的抑制,这也证明了本文所提算法改进的合理性。

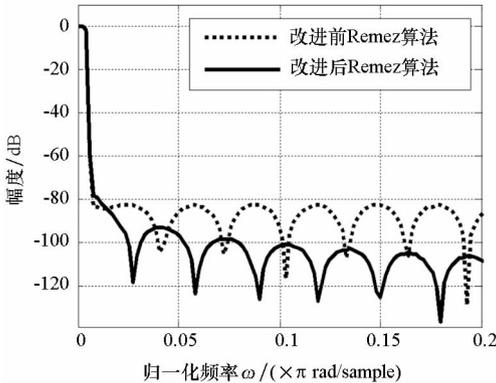


图3 改进前后 Remez 算法设计的滤波器频率响应对比
Fig.3 Frequency response of the filters designed by Remez algorithm before and after boundary fitting

3.2 仿真结果

假定数字基带信号的采样频率为 60 MHz,时延精度要求小于等于 0.1 ns,因此采样点之间应被分解为 167 份,即 $M = 167$,同时可以确定 Remez 算法的阻带截止频率 $\omega_s = 1/166 \approx 0.006\ 024\pi$ rad/sample。由于 167 是质数,因此文献^[8]提出的基于因数分解的构造性设计方法不再适用,只能使用本文提出的方法。

利用第 2 节中的方法,根据仿真结果,得到滤波器阶数 $N = 18$,通带截止频率 $\omega_p = 0.46/167 \approx 0.002\ 754\pi$ rad/sample。

然后选择不同的多项式阶数 m 对集合 A 进行拟合,并计算其最大群时延误差,得到表 1。可以看到当 $m = 2$ 时,可以得到最小的最大群时延误差。

此时拟合函数的表达式为:

$$f(x) = -5.372 \times 10^{-10} x^2 + 6.675 \times 10^{-8} x + 8.646 \times 10^{-7}, \quad 1 \leq x \leq 166, x \in \mathbf{N} \quad (12)$$

将 $x = 0$ 代入式(12)可得:

$$h(0) = f(0) = 8.646 \times 10^{-7} \quad (13)$$

表 1 不同多项式阶数及其对应最大群时延误差
Tab.1 Max group delay error versus different polynomial order

多项式阶数 m	$\max_{0 \leq \omega \leq \omega_u} \{e_r(\omega, 0)\}$
1	-18.59 dB
2	-23.09 dB
3	-22.33 dB
4	-22.19 dB
5	-22.23 dB
6	-22.23 dB
7	-22.22 dB
8	-22.21 dB

做出改进前后所有频率和分数时延下的群时延误差,如图 4 所示。从图 4 可见改进后的分数时延滤波器组的最大群时延误差比改进前降低了大约 10 dB,且所有通带的误差均降至 $1/166 \approx -22.20$ dB 以下,满足最大群时延误差最小及其上确界原则,改进效果明显。

将该多项式插值的改进 Remez 算法与文献^[3]中提出的算法进行对比。根据仿真,可取文献^[3]中算法的多项式阶数为 5、滤波器阶数为 8,得到的对比结果如表 2 所示。可以看出本文所提出的改进算法比文献^[3]中的方法可用带宽增加近一倍,若要求文献^[3]中的带宽与本文所提方法一致,其滤波器阶数至少需选为 42,大大增加了系统延时和乘法器资源;本文算法虽然占用的存储资源较多,但使用的乘法器资源较少,这在 FPGA 实现的过程中是比较有优势的;本文所提出的算法需要实时更新的参数数目要比文献^[3]中算法的多,但最大群时延误差要比文

献[3]中算法的小。综上,本文所提算法可以较好地适用于高带宽、高精度、低实时性的应用中。

况下降低群时延误差,即降低群时延误差的重要性要大于降低时间和空间复杂度的重要性,而降低时间复杂度的重要性要大于降低空间复杂度的重要性。因此,首先群时延的误差容许范围应满足式(9)所确定的误差准则,否则即使时间及空间复杂性再低,也不能满足工程的精度需求;在该前提下,群时延误差越小则说明在通带内系统所带来的信号失真越小,信号失真是实际信号处理中虽然不可避免但仍在极力降低其影响的现象。表 2 中比较的两种算法均是在满足式(9)的前提下而进行的比较,且本文所提算法的群时延误差更小,即带来的信号失真更小。从时间复杂度的角度上来说,参数更新的速度要求越快越好,而更新 1 个参数最快需要 1 个时钟周期的时间,因此本文所提算法需要 18 个时钟周期才能完成更新,而文献[3]中的算法只需要 1 个时钟周期即可以完成更新。但在实际实现中,利用增加空间复杂度即并行化的方式可以使这 18 个参数在 1 个时钟周期内完成更新,因此利用空间换时间的方式来达到降低时间复杂度的目的是可行且合理的。而对于空间复杂度本身来说,又分为存储资源和乘法器资源。在 FPGA 中,存储资源的数量远大于乘法器资源的数量,因此应在存储资源允许的条件下降低乘法器资源;而本文所提算法恰好是增加了存储资源但降低了乘法器资源。因此,本文所提算法具有更优的工程实现意义。

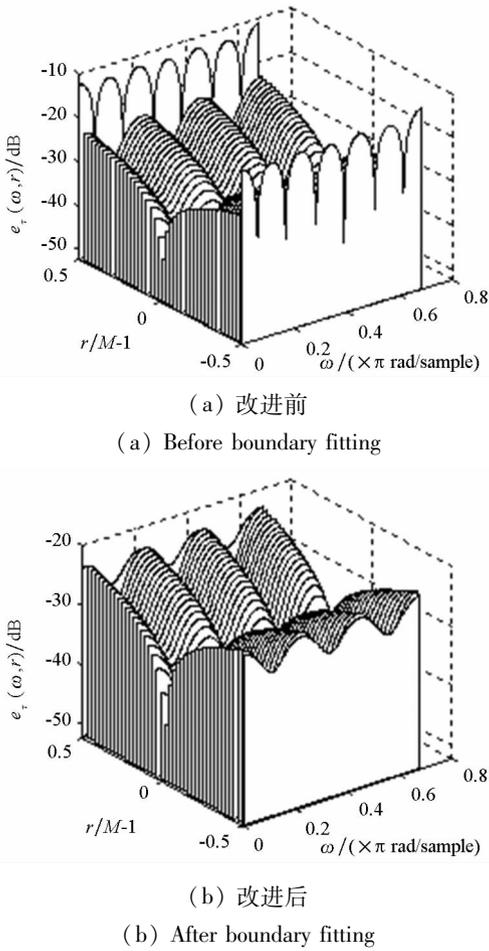


图 4 分数时延滤波器组的群时延误差
Fig. 4 Group delay error of fractional delay filters

表 2 分数时延滤波器设计结果比较

Tab. 2 Character comparison of fractional delay filters

	文献[3]中的 Farrow 结构	改进 Remez 算法 多相结构
归一化后 可用带宽	0.369 1π	0.677 7π
需存储的 滤波器系数数目	40	3006
需使用的 乘法器数目	40	18
实时更新 参数个数	1	18
最大群时延误差	-22.23 dB	-23.09 dB

4 结论

针对分数时延滤波器对高精度的要求,使用改进的 Remez 算法设计出了高精度的分数时延滤波器。利用拟合的改进算法解决了 Remez 算法设计的高阶滤波器冲激响应边界不连续的问题。利用群时延误差函数分析了分数时延滤波器组的性能,提高了分数时延精度,同时增加了分数时延滤波器组的可用带宽,降低了需使用的乘法器数量。算法不足之处则在于存储器数量占用较多,实时性较低。因此本文所提算法适用于高带宽、高精度、低实时性的应用。该算法也已成功应用在本文基金支持项目的星间伪码测距测试中,效果良好。

参考文献 (References)

[1] 杨俊, 陈建云, 钟小鹏, 等. 高精度延迟信号产生理论与技术及其在卫星导航系统试验验证中的应用[C]//第一届中国卫星导航学术年会, 2010.

需要说明的是,在实际工程应用中,一般而言会在空间复杂度允许的条件下尽量降低时间复杂度,还会在空间和时间复杂度均允许的情

- YANG Jun, CHEN Jianyun, ZHONG Xiaopeng, et al. High precision delay satellite navigation signal generation theory and application in navigation satellite simulation test [C]//Proceedings of the 1st China Satellite Navigation Conference, 2010. (in Chinese)
- [2] 周天, 张秉致, 杜伟东, 等. 基于 Farrow 结构的恒定束宽时域波束形成器研究与实现[J]. 通信学报, 2014, 35(6): 92-99.
- ZHOU Tian, ZHANG Bingzhi, DU Weidong, et al. Research and implementation of constant beamwidth time-domain beamformer based on Farrow structure [J]. Journal on Communications, 2014, 35(6): 92-99. (in Chinese)
- [3] 沙海, 黄新明, 张鑫, 等. VFD 滤波器的导航信道模拟器动态时延模拟方法[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(4): 61-65.
- SHA Hai, HUANG Xinming, ZHANG Xin, et al. Method of pseudo-range Doppler simulation in navigation channel simulator on VFD filter [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(4): 61-65. (in Chinese)
- [4] Koshita S, Abe M, Kawamata M. A simple ladder realization of maximally flat allpass fractional delay filters [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2014, 61(3): 203-207.
- [5] Dam H H. Variable fractional delay FIR filter design with a bicriteria and coefficient relationship[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2014, 61(1): 36-40.
- [6] Harris F J. Multirate signal processing for communication systems [M]. USA: Prentice Hall PTR, 2004.
- [7] Dam H H, Cantoni A, Teo K L, et al. FIR variable digital filter with signed power-of-two coefficients [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54(6): 1348-1357.
- [8] 杨俊. 卫星导航信号模拟源理论与技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.
- YANG Jun. Theory and technology of satellite navigation signal simulator [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015. (in Chinese)
- [9] Farrow C W. A continuously variable digital delay element[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits & Systems, 1988.
- [10] Oppenheim A V, Schaffer R W, Buck J R. Discrete-time signal processing[M]. USA: Prentice Hall, 1999.
- [11] 胡广书. 数字信号处理——理论与实现[M]. 3版. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- HU Guangshu. Digital signal processing—theory, algorithm and implementation [M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese)
- [12] Shyu J J, Pei S C, Chan C H, et al. A new criterion for the design of variable fractional-delay fir digital filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2010, 57(2): 368-377.
- [13] 金一庆, 陈越, 王冬梅. 数值方法[M]. 2版. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- JIN Yiqing, CHEN Yue, WANG Dongmei. Numerical methods [M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2007. (in Chinese)