doi:10.11887/j.cn.201706018 http://journal.nudt.edu.cn

具有空间坐标耦合的二阶集群模型分析*

刘易成,李 翔,聂 芬
(国防科技大学 文理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要:在空间坐标耦合的情形下建立一种改进的二阶分布式集群模型。分析结果显示,如果系统的拓扑结构不变,当其确定的有向图具有有向支撑树并且速度的伴随系数大于某一临界值时,整个群体将随着耦合矩阵的旋转角的变化而呈现出三种集群样式——直线模式、圆柱螺线模式以及对数螺线模式。最后给出了这三种样式所对应的数值仿真结果。

关键词:空间坐标耦合;一致集群;弱集群;集群模式;圆柱螺线
中图分类号:O231.5 **文献标志码:**J **文章编号:**1001-2486(2017)06-118-08

Analysis for second-order collective model with spatial coordinates coupling

LIU Yicheng, *LI Xiang*, *NIE Fen*
(College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A second-order distributed collective model with spatial coordinates coupling was established. Analysis results show that: if the topology structure of the system is unchanged, the system graph has a directed spanning tree and the speed parameter is over the critical value, the system will present three flocking patterns with the rotation angle variation of coupling matrix—linear pattern, cylindrical spiral pattern, logarithmic spiral pattern. Some simulations for these three patterns were carried out in the last section.

Key words: spatial coordinates coupling; uniformly flocking; weak flocking; flocking pattern; cylindrical spiral

随着控制理论的不断发展,对单个智能体的控制已日趋成熟,并发展出了许多控制方法,如比例微积分(Proportional-Integral-Derivative, PID)控制、自适应控制、鲁棒控制、智能控制等。

近 20 年来,对多智能体系统的研究,引起了越来越多的学者的关注。对于这种具有内部相互作用的多智能体系统,有两种常用的控制方法:中心式控制方法和分布式控制方法。中心式控制方法,即系统存在一个控制中心,负责管理系统中所有智能体的状态。本质上,中心式控制方法是对传统单智能体系统控制方法的简单延伸和推广。与之相比,分布式控制方法不需要"中心"的存在,体现出更多的优势,如稳定性、自适应性、灵活性、和可测量性等。由于现实中多智能体系统内部常常具有交流、感知范围、带宽等因素的限制,分布式控制方法相对于中心式控制方法具有更加鲜明的物理意义和实际应用价值。随着包括无人机的协同控制、卫星群体的交流协作、分布式传感网络等领域中分布式系统的广泛应用,分布式协同行为已经成为人们研究的热点,尤其在对无人控制系统,包括无人机、无人车、无人水下工具的研究过程中,分布式系统常常被用来解决多个智能体之间的协同问题。这种协同具体是指,通过整个系统内部的信息传递和信息交换,使得所有智能体的最终状态达成一致或形成某种结构。

事实上,这种"无中心"的分布协同现象在生态学、生物学、社会学以及经济学等领域也广泛存在,表现出显著的大尺度性、交互性和智能性等特点。例如,在生态学中,鸟群的迁徙行为、鱼群的定向运动、细菌的快速聚集、蜜蜂群体在少数工蜂指引下的协同行为等,都是具有重要理论价值和广阔应用前景的研究课题,并且受到众多研究团队的关注[1-3]。分布式控制系统的研究也常常被应用于分布式计算[4]、管理科学[5-6]、物理学[7]等领域。

Olfati-Saber 与 Murray[8]、Jadbabaie[9]、Lin[10] 以及 Ren[11] 等最先提出并研究了一类一阶分布式控制模型:

* **收稿日期:**2016-08-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201481,11401577)
作者简介:刘易成(1977—),男,湖南江华人,副教授,博士,硕士生导师,E-mail: liuyc2001@hotmail.com

$$\dot{r}_i(t) = u_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[r_i(t) - r_j(t)] \quad (1)$$

式中:$r_i \in \mathbb{R}$ 代表智能体 i 的状态;$u_i \in \mathbb{R}$ 代表控制输入;a_{ij} 为一常数,代表个体 j 对个体 i 的影响强度。

之后,Ren 和 Atkins 在文献[12]中拓展了上述一阶模型,研究了二阶集群模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[x_j(t) - x_i(t)] + \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[v_j(t) - v_i(t)] \end{cases} \quad (2)$$

其中,$x_i \in \mathbb{R}$ 代表第 i 个智能体的位置,$v_i \in \mathbb{R}$ 代表速度,γ 为正耦合常数。

在文献[12]中,对于二阶的集群模型,系统的拓扑结构具有有向支撑树是系统实现集群的必要而非充分条件。同时,作者给出了系统实现一致集群的一个充分条件。之后, 文献[13]得到了系统(2)实现一致集群的充要条件。

但是以上模型均在一维空间中讨论。对于现实中三维空间的情形,Ren[14] 讨论了一种具有阻尼项的三维系统模型:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{v}_i(t) \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)] - \gamma \boldsymbol{v}_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

其讨论了当 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ 为旋转矩阵时系统的一致集群规律,指出当阻尼系数 γ 的值大于某一常数时,系统将随着旋转角度 θ 的变化而呈现出不同的集群样式。其他对二阶集群模型的讨论可参阅文献[15-18]。

本文通过引入空间坐标耦合,研究了另一种二阶分布式系统模型,讨论并分析了其集群模式,扩展了相关结论。

1　具有空间坐标耦合的集群模型

本节从数学模型角度处理集群模式的形成和演化规律。考虑如下具有空间坐标耦合的集群模型:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{v}_i(t) \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)] + \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{v}_j(t) - \boldsymbol{v}_i(t)] \end{cases} \quad (4)$$

其中:$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$ 代表第 i 个智能体的位置,$\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^m$ 代表速度, m 为空间维数;相应地,$\dot{\boldsymbol{x}}_i$, $\dot{\boldsymbol{v}}_i$ 分别表示它们的导数; 常数 $a_{ij} \geqslant 0$ 表示智能体 j 对 i 的作用强度, $\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{v}_j(t) - \boldsymbol{v}_i(t)$ 分别表示位移伴随项和速度伴随项;$\gamma > 0$ 表示系统对速度伴随项的依赖程度;$\boldsymbol{C}$ 表示位移和速度伴随项各分量间的耦合矩阵。

本模型拓展了 Ren 和 Atkins 在文献[12]中提出的一维模型,并引入了一种新的空间坐标耦合方式,考虑了在高维情形下由空间坐标耦合所导致的模式形成问题。而与文献[14]中的耦合方式不同的是,本模型中没有速度阻尼项,取而代之的是速度趋同项。这样的模型使智能体群的轴向速度不趋于零,而整个多智能体系统将同时具有轴向的直线运动和垂直于轴向的周期运动样式。

为描述多智能体系统最终形成的集群样式,给出如下定义:

定义 1　1) 对任意的初始值 $\{\boldsymbol{x}_i(0), \boldsymbol{v}_i(0)\}$,如果系统(4)的解 $\{\boldsymbol{x}_i(t), \boldsymbol{v}_i(t)\}$ 满足

$$\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)\| = 0 \\ \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{v}_j(t) - \boldsymbol{v}_i(t)\| = 0 \end{cases} \quad (5)$$

则称多智能体系统(4)是一致集群的。

2) 如果对任意的初始值 $\{\boldsymbol{x}_i(0), \boldsymbol{v}_i(0)\}$,存在常数 $M > 0$,使得

$$\begin{cases} \sup_{t\geqslant0} \|\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{x}_i(t)\| < M \\ \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{v}_j(t) - \boldsymbol{v}_i(t)\| < M \end{cases} \quad (6)$$

则称多智能体系统(4)是弱集群的。

下面将讨论在位移伴随和速度伴随的共同作用下, 具有空间坐标耦合的集群系统(4)的一致集群问题。

2　预备知识

如果将多智能体系统中的每个智能体对应于有向图中的各个顶点,将智能体 j 对智能体 i 的影响对应于有向图中由顶点 j 出发,指向顶点 i 的边,且影响的强度大小对应于边的权值 a_{ij},那么,多智能体系统(4)的拓扑结构将由其对应的有向图 G 完全决定。记 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, $c_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}$。对于拉普拉斯矩阵的性质,可以总结为以下引理 1:

引理 1[7]　若 $\boldsymbol{L}$ 为有向图 G 对应的拉普拉斯矩阵, 则当有向图 G 具有有向支撑树时,$\boldsymbol{L}$ 有且仅有一个零特征值,并且 $\boldsymbol{L}$ 的非零特征值均具有正的实部。此外,存在各分量非负的 $\boldsymbol{\nu}_1 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = 0$, $\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{1}_n = 1$, 且 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{1}_n = 0$, 即 $\boldsymbol{\nu}_1$ 与 $\boldsymbol{1}_n$ 分别为 $\boldsymbol{L}$ 的零特征值所对应的左特征向量与右特征向量。

对于三维空间中的旋转矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{3\times3}$,若已

知其旋转轴和旋转角分别为 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$ 及 $\theta\in[0,2\pi)$,则容易算出其特征值和对应的特征向量。接下来用引理的形式具体说明。

引理 2 已知旋转矩阵 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 的旋转轴为 $\boldsymbol{a}$(不妨设 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量),旋转角为 θ,则 $\boldsymbol{C}$ 的三个特征值分别为 $\beta_1=1,\beta_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\beta_3=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$。当 a_2,a_3 不全为零时,可选取 $\boldsymbol{C}$ 的右特征向量为 $\boldsymbol{\tau}_1=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{\tau}_2=[a_2^2+a_3^2,-a_1a_2+a_3\mathrm{i},-a_1a_3-a_2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\tau}_3=\bar{\boldsymbol{\tau}}_2$,左特征向量为 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\tau}_1$,$\boldsymbol{\rho}_2=\bar{\boldsymbol{\tau}}_2/|\boldsymbol{\tau}_2|^2$,$\boldsymbol{\rho}_3=\bar{\boldsymbol{\tau}}_3/|\boldsymbol{\tau}_3|^2$,其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位,$\bar{\bullet}$ 表示复数的共轭。从而有 $\boldsymbol{\tau}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}_l=1$,$l=1,2,3$。

记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C} & \gamma\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$,其中 γ 为一正常数,下面的定理旨在寻找矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量。

定理 1 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 μ_k,且其对应的右特征向量和左特征向量分别为 $\boldsymbol{\omega}_k$ 与 $\boldsymbol{\nu}_k$,则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为:

$$\sigma_{6(k-1)+2l-1}=\left[\gamma\lambda_{3(k-1)+l}+\sqrt{(\gamma\lambda_{3(k-1)+l})^2+4\lambda_{3(k-1)+l}}\right]/2$$

$$\sigma_{6(k-1)+2l}=\left[\gamma\lambda_{3(k-1)+l}-\sqrt{(\gamma\lambda_{3(k-1)+l})^2+4\lambda_{3(k-1)+l}}\right]/2$$

其所对应的右特征向量可分别取为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_k\otimes\boldsymbol{\tau}_l\\ \sigma_{6(k-1)+2l-1}\boldsymbol{\omega}_k\otimes\boldsymbol{\tau}_l\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_k\otimes\boldsymbol{\tau}_l\\ \sigma_{6(k-1)+2l}\boldsymbol{\omega}_k\otimes\boldsymbol{\tau}_l\end{bmatrix}$,左特征向量可取为 $\begin{bmatrix}\lambda_{3(k-1)+l}\boldsymbol{\nu}_k\otimes\boldsymbol{\rho}_l\\ \sigma_{6(k-1)+2l-1}\boldsymbol{\nu}_k\otimes\boldsymbol{\rho}_l\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\lambda_{3(k-1)+l}\boldsymbol{\nu}_k\otimes\boldsymbol{\rho}_l\\ \sigma_{6(k-1)+2l}\boldsymbol{\nu}_k\otimes\boldsymbol{\rho}_l\end{bmatrix}$,$k=1,2,\cdots,n$,$l=1,2,3$。其中 $\lambda_{3k-2}=\mu_k,\lambda_{3k-1}=\mu_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\lambda_{3k}=\mu_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$。当 $\boldsymbol{A}$ 的零特征值的重数为 1 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的零特征值的代数重数为 6,几何重数为 3。

证明 由矩阵张量积的性质可知,$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_{3k-2}=\mu_k,\lambda_{3k-1}=\mu_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\lambda_{3k}=\mu_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,其所对应的右特征向量与左特征向量可分别取为 $\boldsymbol{\omega}_k\otimes\boldsymbol{\tau}_l$ 与 $\boldsymbol{\nu}_k\otimes\boldsymbol{\rho}_l$,$k=1,2,\cdots,n$,$l=1,2,3$。为计算矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 σ,则需求解矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征方程 $\det(\sigma\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{B})=0$。注意到:

$$\begin{aligned}\det(\sigma\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{B})&=\det\left(\begin{bmatrix}\sigma\boldsymbol{I}_{3n} & -\boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C} & \sigma\boldsymbol{I}_{3n}-\gamma\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\right)\\ &=\det[\sigma^2\boldsymbol{I}_{3n}-(1+\gamma\sigma)\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}]\\ &=\prod_{k=1}^{3n}[\sigma^2-(1+\gamma\sigma)\lambda_k]\end{aligned}$$

由特征方程 $\det(\sigma\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{B})=0$,可知:

$$\sigma_{k\pm}=\frac{\gamma\lambda_k\pm\sqrt{(\gamma\lambda_k)^2+4\lambda_k}}{2},\ k=1,2,\cdots,3n$$

由此得到 $\boldsymbol{B}$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的特征值之间的关系。容易知道,当 $\boldsymbol{A}$ 的零特征值的重数为 1 时,$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的零特征值的重数为 3,进而 $\boldsymbol{B}$ 的零特征值的重数为 6。若 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的右特征向量,即

$$\boldsymbol{B\omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C} & \gamma\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_a\\ \boldsymbol{\omega}_b\end{bmatrix}=\sigma\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_a\\ \boldsymbol{\omega}_b\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\omega}_b=\sigma\boldsymbol{\omega}_a$ 且 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})\boldsymbol{\omega}_a+\gamma(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})\boldsymbol{\omega}_b=\sigma\boldsymbol{\omega}_b$,从而 $(1+\gamma\sigma)(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})\boldsymbol{\omega}_a=\sigma^2\boldsymbol{\omega}_a$,则 $\boldsymbol{\omega}_a$ 必为 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的右特征向量,且 $\boldsymbol{\omega}_b=\sigma\boldsymbol{\omega}_a$。则如果 $\boldsymbol{A}$ 的零特征值的重数为 1,那么 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的零特征值的几何重数为 3,进而 $\boldsymbol{B}$ 的零特征值的几何重数也为 3。同理,可分析左特征向量。 □

3 一致集群分析

本节通过矩阵特征值分析的方法给出多智能体系统(4)当 $m=3$ 时的一致集群判据。记 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]^{\mathrm{T}}$,将多智能体系统(4)化为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{v}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C} & -\gamma\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}\quad(7)$$

为方便起见,约定如下符号:记拉普拉斯矩阵 $-\boldsymbol{L}$ 的特征值为 μ_k,$k=1,2,\cdots,n$,其右特征向量和左特征向量分别记为 $\boldsymbol{\omega}_k$ 与 $\boldsymbol{\nu}_k$,且不妨设 $\boldsymbol{\nu}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_k=1$。当 $\mu_k=0$ 时,记 $\arg(\mu_k)=0$,不失一般性,假设 $\arg(\mu_1)\leqslant\arg(\mu_2)\leqslant\cdots\leqslant\arg(\mu_n)$。记 $\gamma^c=\max\limits_{2\leqslant k\leqslant n}\sqrt{\mathrm{Im}^2(\mu_k)/[-|\mu_k|^2\mathrm{Re}(\mu_k)]}$;$\boldsymbol{x}_\infty=(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{x}(0)$;$\boldsymbol{v}_\infty=(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}(0)$。

定理 2 若多智能体系统(3)的拓扑结构对应的有向图 G 具有有向支撑树且 $\gamma>\gamma^c$,则如下结论成立:

1)当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_3$ 时,多智能体系统(4)将实现一致集群,且各智能体最终将以恒定速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ 做直线运动。即对任意 $k=1,\cdots,n$,有

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}[\boldsymbol{x}_k(t)-(\boldsymbol{x}_\infty+\boldsymbol{v}_\infty t)]=\boldsymbol{0}\\ \lim\limits_{t\to+\infty}[\boldsymbol{v}_k(t)-\boldsymbol{v}_\infty]=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

2)令 $\psi_k^l\in(\pi/2,\pi)$ 以及 $\psi_k^u\in(\pi,3\pi/2)$ 分别为方程 $\gamma^2|\mu_k|\cos(\psi)+\sin^2(\psi)=0$ 的两个解。若 $\boldsymbol{C}$ 的旋转角 θ 满足

$$|\theta|<\theta^c=\min_{\arg(\mu_k)\in(\pi,3\pi/2)}[\psi_k^u-\arg(\mu_k)]$$

则多智能体系统(4)将实现一致集群,且每个智能体最终都以恒定速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ 做直线运动。

3)若 $|\theta|=\theta^c$,并且系统拓扑图的拉普拉斯矩阵 $-\boldsymbol{L}$ 存在唯一的简单特征值 μ_{k_0},$\arg(\mu_{k_0})\in[\pi,3\pi/2)$,使得 $\psi_{k_0}^u=\arg(\mu_{k_0})+\theta^c$,那么多智能

体系统(4)最终将实现弱集群，所有智能体的运动轨迹将收敛到具有相同轴线的圆柱螺线上，其轴向速度为 $\boldsymbol{v}_\infty$。同时，在垂直于轴线的平面内，各智能体将趋于圆周运动，旋转周期为 $-2\pi\gamma\cot(\psi_{k_0}^u)$。智能体 j 的旋转半径为 $2|\omega_{k_0(j)}\boldsymbol{p}_c^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|\sqrt{a_2^2+a_3^2}$，其中 $\omega_{k_0(j)}$ 代表 $\boldsymbol{\omega}_{k_0}$ 的第 j 个分量，

$$\boldsymbol{p}_c=1/(\sigma_c^2+\lambda_{3k_0-1})\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_{3(k_0-1)+l}\boldsymbol{\nu}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\rho}_2\\ \sigma_c\boldsymbol{\nu}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\rho}_2\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_c=-\tan(\psi_{k_0}^u)/\gamma\mathrm{i}$。

4)若系统拓扑图的拉普拉斯矩阵 $-\boldsymbol{L}$ 存在唯一的简单特征值 μ_{k_0}，$\arg(\mu_{k_0})\in[\pi,3\pi/2)$，使得 $\psi_{k_0}^u-\arg(\mu_{k_0})<|\theta|<\min\limits_{\arg(\mu_k)\in[\pi,3\pi/2),k\neq k_0}[\psi_k^u-\arg(\mu_k)]$，则所有智能体的运动轨迹将收敛到具有相同轴线的对数螺柱线上，其轴向速度为 $\boldsymbol{v}_\infty$。同时，在垂直于中心轴线的平面内，各智能体的运动周期为 $2\pi/|\mathrm{Im}(\sigma_c)|$；智能体 j 绕轴运动的截面半径为 $2|\omega_k(j)\boldsymbol{p}_c^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|\sqrt{a_2^2+a_3^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\sigma_c)t}$，其中 $\sigma_c=\gamma\lambda+\sqrt{(\gamma\lambda)^2+4\lambda}/2$，$\lambda=\mu_{k_0}\mathrm{e}^{|\theta|\mathrm{i}}$。

证明　1) 当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_3$ 时，方程(7)可化为以下形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{v}}(t)\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{L} & -\gamma\boldsymbol{L}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}\quad(8)$$

记 $\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{L} & -\gamma\boldsymbol{L}\end{bmatrix}$，由于任意矩阵在复数域内均相似 Jordan 标准型，则可找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 为 Jordan 标准型. 由题设条件，$-\boldsymbol{L}$ 有且只有一个零特征值，由定理 1 可知，$\boldsymbol{\Omega}$ 的零特征值的代数重数为 2，几何重数为 1，且零特征值所对应的右特征向量与广义右特征向量可分别取为 $\boldsymbol{q}_1=[\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}_2=[\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，广义左特征向量与左特征向量可分别取为 $\boldsymbol{p}_1=[\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=[\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。不妨设 $\boldsymbol{P}$ 的前两列为 $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$，$\boldsymbol{P}^{-1}$ 的前两行为 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，则 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \boldsymbol{0}_{1\times(2n-2)}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{0}_{1\times(2n-2)}\\ \boldsymbol{0}_{(2n-2)\times1} & \boldsymbol{0}_{(2n-2)\times1} & \boldsymbol{J}'\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}'$ 为 Jordan 型矩阵。由文献[13]给出的充要条件可知，当 $\gamma>\gamma^c$ 时，$\boldsymbol{J}'$ 的对角元素均具有负的实部。因此，

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{Jt}\boldsymbol{P}^{-1}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$$

注意到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{Jt}\boldsymbol{P}^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_3)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}$$

由此，

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$$

因此，对任意智能体 $k=1,\cdots,n$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\{\boldsymbol{x}_k(t)-(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_3)[\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{v}(0)t]\}=\boldsymbol{0}$$

$$\lim_{t\to+\infty}[\boldsymbol{v}_k(t)-(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}(0)]=\boldsymbol{0}$$

也即系统(4)实现一致集群，且最终各智能体均以恒定速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ 做直线运动。

2) 当 $\boldsymbol{C}$ 为旋转矩阵时，记

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C} & -\gamma\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$

则由定理 1 可知，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的特征值 λ_k 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\boldsymbol{\sigma}_k$ 满足：

$$\boldsymbol{\sigma}_{k\pm}=\frac{\gamma\lambda_k\pm\sqrt{(\gamma\lambda_k)^2+4\lambda_k}}{2},\ k=1,2,\cdots,3n$$

由 $\gamma>\gamma^c$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值 μ_k 的幅角均落于区间(ψ_k^l,ψ_k^u)之中，结合条件 $|\theta|<\theta^c$ 可知，$\arg(\lambda_{3(k-1)+l})\leqslant\arg(\mu_k)+|\theta|<\psi_k^u$ 对所有 $l=1,2,3$，$k=2,\cdots,n$ 成立。又因为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值两两共轭，因此 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$ 的每个非零特征值 $\lambda_{3(k-1)+l}$ 都落于区间(ψ_k^l,ψ_k^u)之中，即 $\psi_k^l\leqslant\arg(\lambda_{3(k-1)+l})<\psi_k^u$。由定理 1 可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的所有非零特征值都具有负的实部，即 $\boldsymbol{\sigma}_j=0(j=1,2,\cdots,6)$ 以及 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\sigma}_j)<0(j=7,8,\cdots,6n)$。同时，0 所对应的右特征向量与广义右特征向量可分别为：

$$\boldsymbol{q}_{l1}=:[\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\tau}_l^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\tau}_l^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_{l2}=:[\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\tau}_l^{\mathrm{T}},\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\tau}_l^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

广义左特征向量与左特征向量可分别取为：

$$\boldsymbol{p}_{l1}=:[\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}_{l2}=:[\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

注意到

$$\sum_{l=1}^{3}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{1}_n\otimes\boldsymbol{\tau}_l)(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}}) & t(\boldsymbol{1}_n\otimes\boldsymbol{\tau}_l)(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{0}_{3n\times3n} & (\boldsymbol{1}_n\otimes\boldsymbol{\tau}_l)(\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\rho}_l^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}$$

因此

$$\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$$

由此，系统(4)实现了一致集群，且最终各智能体均以恒定速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ 做直线运动。

3)记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3n\times 3n} & \boldsymbol{I}_{3n}\\ -\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C} & -\gamma\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$。不妨设 $\theta=\theta^c$(当 $\theta=-\theta^c$ 时，分析方法完全相同)，那么 $-\boldsymbol{L}$ 存在唯一特征值 μ_{k_0}，$\arg(\mu_{k_0})\in[\pi,3\pi/2)$，使得 $\theta^c=\psi_{k_0}^u-\arg(\mu_{k_0})$，则 $\lambda_{3k_0-1}=\mu_{k_0}\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}=|\mu_{k_0}|\mathrm{e}^{\psi_{k_0}^u}$。由定理 1 知 $\sigma_{6k_0-3}=(-\tan\psi_{k_0}^u/\gamma)\mathrm{i}$。由 $\boldsymbol{B}$ 的特征值两两共轭知 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\bar{\sigma}_{6k_0-3}=(\tan\psi_{k_0}^u/\gamma)\mathrm{i}$。再根据定理 1，可选取 σ_{6k_0-3} 对应的右特征向量为 $\boldsymbol{q}_{6k_0-3}=:\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\tau}_2\\ \sigma_{6k_0-3}\boldsymbol{\omega}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\tau}_2\end{bmatrix}$，左特征向量为 $\boldsymbol{p}_{6k_0-3}=:\dfrac{1}{\lambda_{3k_0-1}+\sigma_{6k_0-3}^2}\begin{bmatrix}\lambda_{3k_0-1}\boldsymbol{\nu}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\rho}_2\\ \sigma_{6k_0-3}\boldsymbol{\nu}_{k_0}\otimes\boldsymbol{\rho}_2\end{bmatrix}$。容易验证 $\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^T\boldsymbol{q}_{6k_0-3}=1$，且由题设条件知 σ_{6k_0-3} 及其共轭 $\bar{\sigma}_{6k_0-3}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的唯一一对纯虚数特征值。由文献[13]给出的充要条件可知 $\boldsymbol{B}$ 的其他非零特征值均具有负的实部。注意到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}+\boldsymbol{c}(t)\to\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{c}(t)=[(\mathrm{e}^{-\frac{\tan\psi_{k_0}^u t\,\mathrm{i}}{\gamma}}\boldsymbol{q}_{6k_0-3}\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}})+(\mathrm{e}^{\frac{\tan\psi_{k_0}^u t\,\mathrm{i}}{\gamma}}\bar{\boldsymbol{q}}_{6k_0-3}\bar{\boldsymbol{p}}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}$$

设 $c_j(t)$ 是 $\boldsymbol{c}(t)$ 的第 j 个分量，那么

$$c_{3(j-1)+l}=r\cos[(-\tan\psi_{k_0}^u/\gamma)t+h]$$

其中

$$r=2|\tau_2(l)\omega_{k_0}(j)\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|$$

$$h=\arg[\omega_{k_0}(j)\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}]+\arg[\tau_2(l)]$$

$\tau_2(l)$ 代表 $\boldsymbol{\tau}$ 的第 l 个分量，$\omega_{k_0}(j)$ 代表 $\boldsymbol{\omega}_{k_0}$ 的第 j 个分量($j=1,\cdots,n$，$l=1,2,3$)。直接计算可得：

$$\|[c_{3j-2}(t),c_{3j-1}(t),c_{3j}(t)]^{\mathrm{T}}\|=$$

$$2|\omega_{k_0}(j)\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|\sqrt{a_2^2+a_3^2}$$

则所有智能体的运动轨迹将收敛到具有相同轴线的圆柱螺线上，其轴向速度为 $\boldsymbol{v}_\infty$。同时，在垂直于轴线的平面内，各智能体将趋于圆周运动，旋转周期为 $-2\pi\gamma\cot(\psi_{k_0}^u)$。智能体 j 的旋转半径为：

$$2|\omega_{k_0(j)}\boldsymbol{p}_c^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|\sqrt{a_2^2+a_3^2}$$

4)沿用证明 3 的记号，如果 $-\boldsymbol{L}$ 存在唯一的简单特征值 μ_{k_0}，$\arg(\mu_{k_0})\in[\pi,3\pi/2)$，使得

$$\psi_{k_0}^u-\arg(\mu_{k_0})<|\theta|<\min_{\arg(\mu_j)\in[\pi,3\pi/2),\,j\neq k_0}[\psi_j^u-\arg(\mu_j)]$$

则 $\sigma_{6k_0-3}=(\gamma\lambda_{3k_0-1}+\sqrt{\gamma^2\lambda_{3k_0-1}^2+4\lambda_{3k_0-1}})/2$ 具有正实部。类似证明 3 的分析方法，$\boldsymbol{B}$ 有 6 个零特征值，两个具有正实部的特征值和其他具有负实部的特征值。由此可知：

$$\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{v}(t)\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & t\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}+\boldsymbol{c}(t)\right)=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{c}(t)=[(\mathrm{e}^{\sigma_{6k_0-3}}\boldsymbol{q}_{6k_0-3}\boldsymbol{p}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}})+(\mathrm{e}^{\bar{\sigma}_{6k_0-3}}\bar{\boldsymbol{q}}_{6k_0-3}\bar{\boldsymbol{p}}_{6k_0-3}^{\mathrm{T}})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ \boldsymbol{v}(0)\end{bmatrix}$$

其中

$$\sigma_{6k_0-3}=\frac{\gamma\lambda_{3k_0-1}+\sqrt{\gamma^2\lambda_{3k_0-1}^2+4\lambda_{3k_0-1}}}{2}$$

设 $c_j(t)$ 是 $\boldsymbol{c}(t)$ 的第 j 个分量，则有

$$c_{3(j-1)+l}=r\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\sigma_{k_0})}\cos[\mathrm{Im}(\sigma_{k_0})+h]$$

则所有智能体的运动轨迹将收敛到具有相同轴线的对数螺柱线上，且具有定理 2 中结论 4 所描述的运动样式。 □

注 定理 2 中结论 1 的情形，由于空间中的三个分量没有耦合，方程(4)事实上可以分解为独立的三个子系统。记 $\boldsymbol{x}^{(1)}=[x_{11},x_{21},\cdots,x_{n1}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}=[x_{12},x_{22},\cdots,x_{n2}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}^{(3)}=[x_{13},x_{23},\cdots,x_{n3}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}^{(1)}=[v_{11},v_{21},\cdots,v_{n1}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}^{(2)}=[v_{12},v_{22},\cdots,v_{n2}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}^{(3)}=[v_{13},v_{23},\cdots,v_{n3}]^{\mathrm{T}}$，则方程(7)可改写为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}^{(l)}(t)\\ \dot{\boldsymbol{v}}^{(l)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{L} & -\gamma\boldsymbol{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(l)}(t)\\ \boldsymbol{v}^{(l)}(t)\end{bmatrix},\ l=1,2,3$$

利用文献[12]的方法，亦可证明结论 1。

4 数值结果

本节通过数值模拟简单验证文章的主要结论。在数值模拟中假设智能体数 $n=4$，反映系统结构的拉普拉斯矩阵为：

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3\\ -1/5 & -4/5 & 1 & 0\\ -1/4 & 0 & -3/4 & 1\end{pmatrix}$$

且据此可求得 $\gamma^c=0.301\ 5$，$\theta^c=13.44°$。迭代步长设置为 $\Delta t=0.01$，初始位置 $\boldsymbol{x}(0)$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}(0)$ 选取如下：

$$\boldsymbol{x}(0)=(4,-2,-3,10,-9,8,8,6,-8,-5,-3,4)$$

$$\boldsymbol{v}(0)=(-4,2,-4,2,0,3,2,4,4,-2,2,-3)$$

对于定理 2 所描述的第一种情形，也即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_3$ 时的数值模拟如图 1 所示。图 1 中三幅子图分别表示 4 个智能体投影于 x,y,z 方向的位移－时间轨迹。在数值模拟中，取 $\gamma=\gamma^c+0.2$。可以看

出,当迭代步数 t 达到 3000 时,4 个智能体的各坐标值已趋于一致。

对于定理 2 所述的第二种情形,也即 $\boldsymbol{C}$ 为一旋转矩阵且满足一致集群的条件时,得到 4 个智能体投影于各坐标轴的位移 - 时间轨迹如图 2 所示。数值模拟中取 $\gamma = \gamma^c + 0.2, \theta = \theta^c - 5°$。可以看出,当迭代步数超过 3000 时,各智能体的位置已趋于一致。

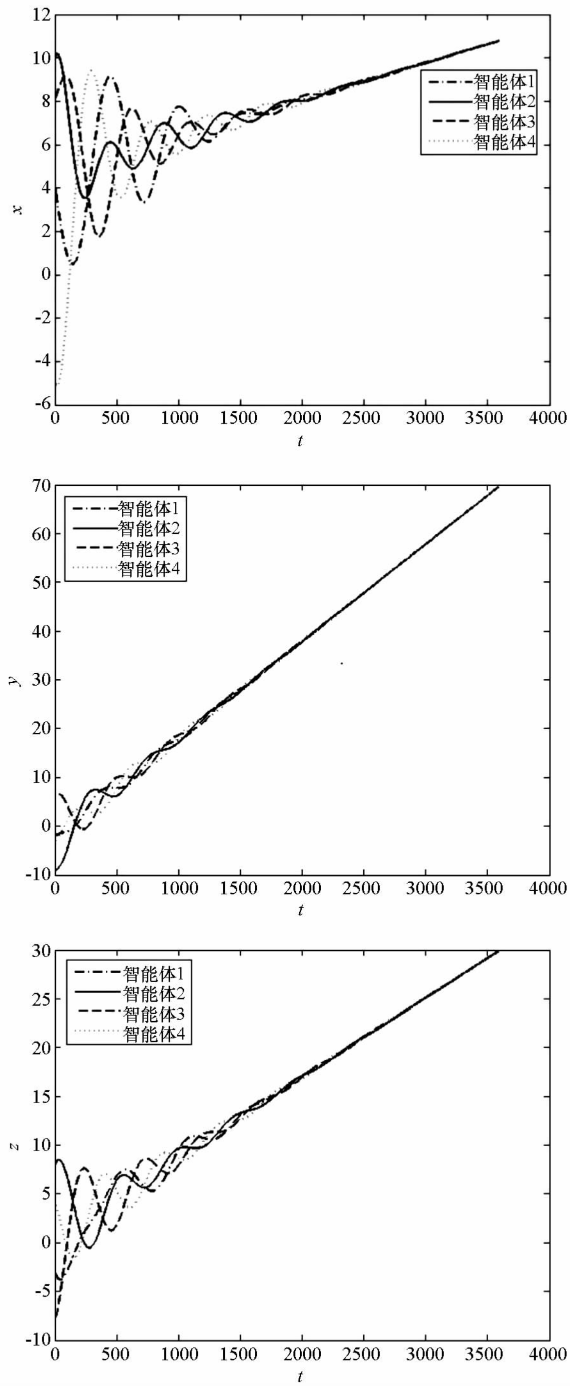

图 1　无空间坐标耦合的一致集群模式

Fig. 1　Uniform collective mode with no spatial coordinates coupling

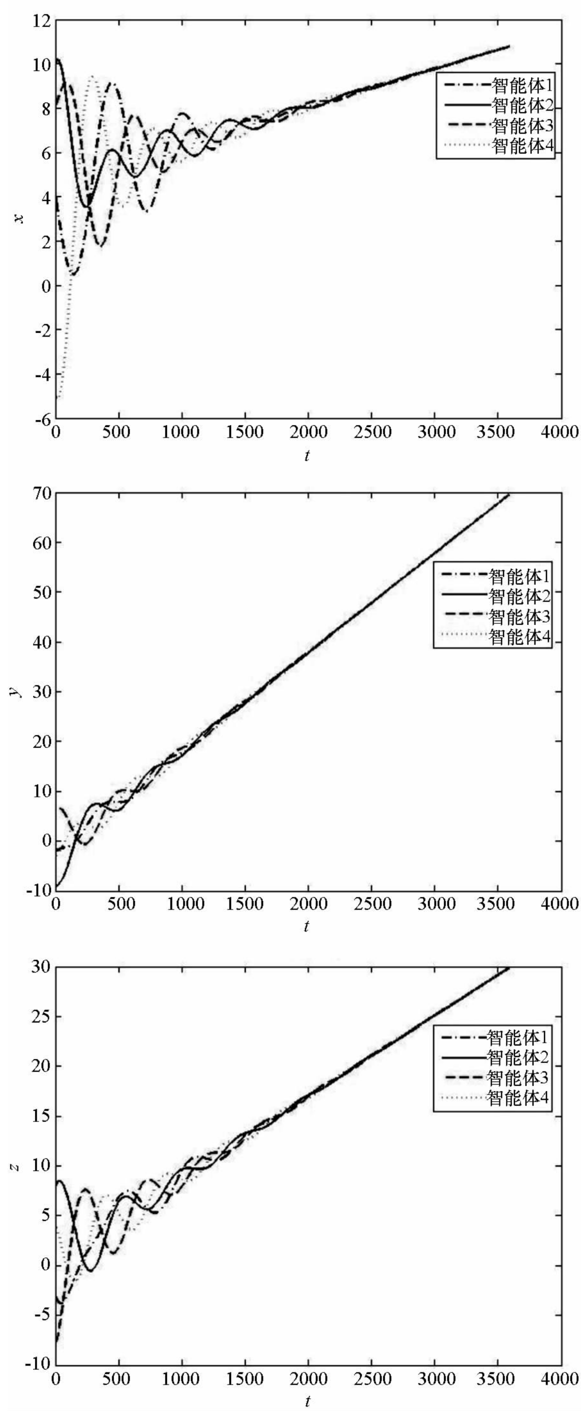

图 2　具有空间坐标耦合的一致集群模式

Fig. 2　Uniform collective mode with spatial coordinates coupling

对于定理 2 所描述的第三种情形,即 $\boldsymbol{C}$ 为一旋转矩阵且满足弱集群的条件时,4 个智能体投影于各坐标轴的位移 - 时间图如图 3 所示。数值模拟中取 $\gamma = \gamma^c + 0.2, \theta = \theta^c = 13.44°$,迭代 8000 次后停止。从数值模拟结果可以看出,各智能体除了具有趋于轴向的直线运动外,还叠加了垂直于轴向的圆周运动。

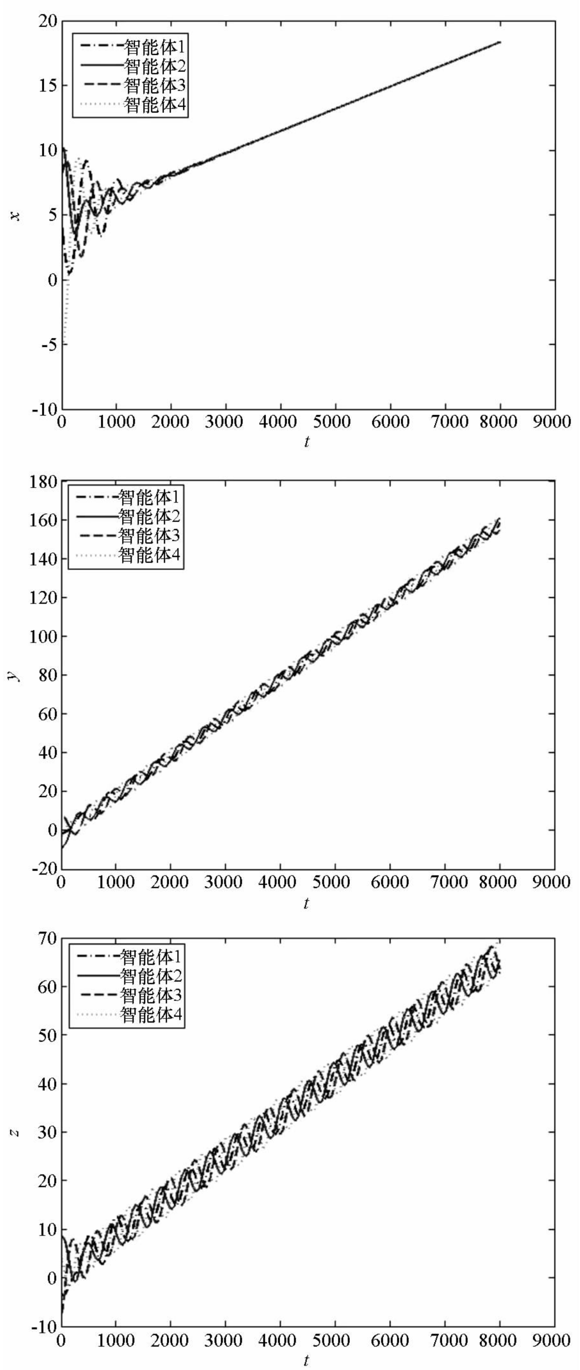

图 3　具有空间坐标耦合的圆柱螺旋模式
Fig. 3　Cylindrical helical mode with spatial coordinates coupling

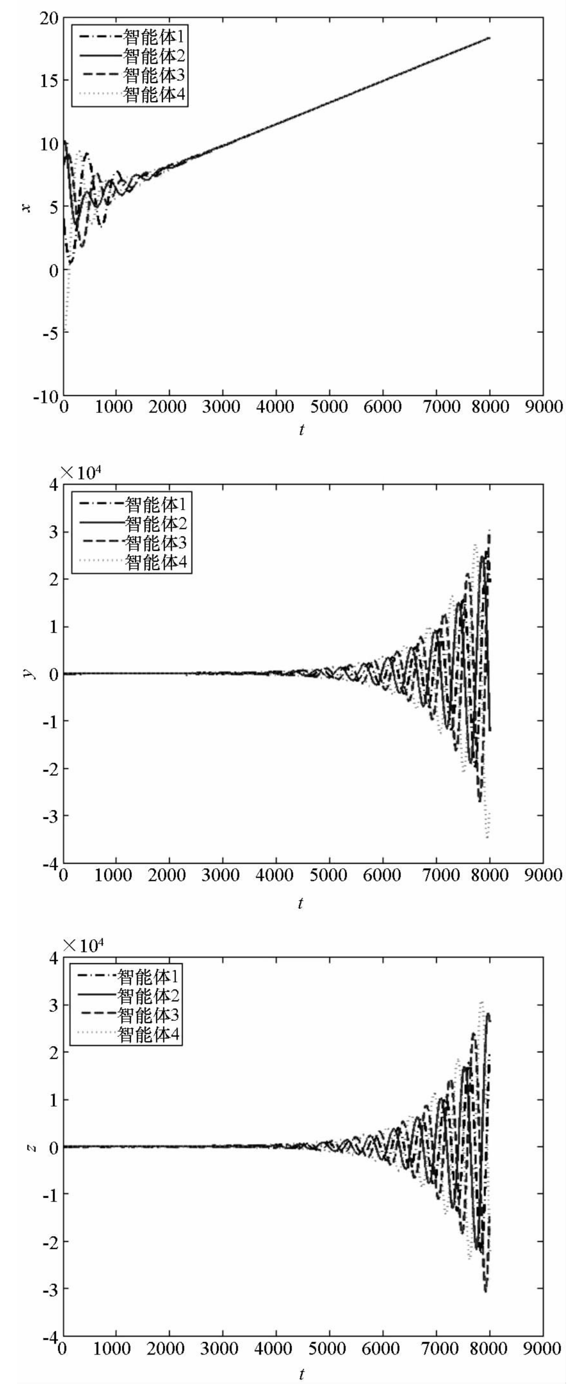

图 4　具有空间坐标耦合的发散对数螺旋模式
Fig. 4　Divergent logarithmic spiral mode with spatial coordinates coupling

当 $\boldsymbol{C}$ 为一旋转矩阵且旋转角满足定理 2 第四种情形所描述的条件时,各个智能体投影于各坐标轴的位移－时间图如图 4 所示。数值模拟中取 $\gamma=\gamma^{c}+0.2$,$\theta=20.96°>\theta^{c}$,迭代 8000 次后停止。从数值模拟结果可以看出,各智能体除了具有趋于轴向的直线运动外,还叠加了垂直于轴向的对数螺线运动。

5　结论

本文讨论了一类扩展的二阶分布式集群模型。理论分析和数值模拟结果表明：当复杂系统的结构和初值改变时，系统最终将呈现出三种集群样式。当坐标旋转角度小于某一临界值时，集群模型将收敛于直线模式；当旋转角度等于临界值时，集群模型收敛于圆柱螺线模式；而当旋转角度大于临界值时，集群模型收敛于对数螺柱线

模式。三种集群模式的最终位置和速度都由初始值和特征向量显式刻画，提供了有效控制集群模式的方法。同时，该理论结果，在多智能体协同、多任务同步规划和多层次协同探测等领域具有重要应用。

参考文献（References）

[1] Camazine S, Franks N R, Sneyd J, et al. Self-organization in biological systems [M]. USA: Princeton University Press, 2001.

[2] Fetecau R C, Guo A. A mathematical model for flight guidance in honeybee swarms[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2012, 74(11): 2600 – 2621.

[3] Pitcher T J, Magurran A E, Winfield I J. Fish in larger shoals find food faster [J]. Behavioral Ecology and Sociobiology, 1982, 10(2): 149 – 151.

[4] Lynch N A. Distributed algorithms [M]. USA: Morgan Kaufmann, 1996.

[5] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118 – 121.

[6] Winkler R L. The consensus of subjective probability distributions[J]. Management Science, 1968, 15(2): B – 61 – B – 75.

[7] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226 – 1229.

[8] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520 – 1533.

[9] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988 – 1001.

[10] Lin Z Y, Broucke M, Francis B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(4): 622 – 629.

[11] Ren W, Beard R, McLain T. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems [J]. Cooperative Control, 2005: 439 – 442.

[12] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10/11): 1002 – 1033.

[13] Yu W W, Chen G R, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089 – 1095.

[14] Ren W. Collective motion from consensus with Cartesian coordinate coupling—Part Ⅱ: Double-integrator dynamics[C]// Proceedings of IEEE Conference on Decision & Control, 2008.

[15] Ren W, Cao Y C. Overview of recent research in distributed multi-agent coordination [J]. Distributed Coordination of Multi-agent Networks, 2011: 23 – 41.

[16] Garcia E, Cao Y C, Casbeer D W. Decentralised event-triggered consensus of double integrator multi-agent systems with packet losses and communication delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(15): 1835 – 1843.

[17] Shen J, Lam J. Containment control of multi-agent systems with unbounded communication delays [J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(9): 2048 – 2057.

[18] Ren W, Cao Y C. Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues[M]. UK: Springer Science & Business Media, 2010.