

网格质量反馈的弹性体动网格改进*

张 斌,杨 涛,丰志伟,张青斌,葛健全
(国防科技大学 空天科学学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:高鲁棒性的动网格变形方法是求解包含运动边界的非定常流场问题的关键技术。基于经典的弹性体动网格方法,引入两种设计合理、评价效果较好的网格质量参数——Patrick 参数和 Baker 参数,提出了一种基于网格质量反馈的改进弹性体动网格方法。结合二维 NACA0012 翼型、三维 ONERA M6 机翼大角度俯仰运动,对比研究改进方法与经典方法的变形能力,改进方法能够保持较好的网格质量,尤其在最大变形时,可以有效改善较差网格单元,具有更高的鲁棒性。计算了 NACA0012 翼型、ONERA M6 机翼的俯仰振荡绕流,并与实验结果及文献进行对比,结果表明,基于网格质量反馈的改进弹性体法能够显著提高变形网格的鲁棒性,可为非定常流场问题的求解提供有力支撑。

关键词:弹性体动网格方法;网格质量反馈;改进方法;高鲁棒性

中图分类号:V211.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)01-010-07

Improvement of elasticity-based dynamic grid method
based on mesh quality feedback

ZHANG Bin, YANG Tao, FENG Zhiwei, ZHANG Qingbin, GE Jianquan

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Dynamic grid deformation method with higher robustness is critical for unsteady flow problems which include moving boundaries. Two of rational and effective mesh quality parameters were introduced, namely Patrick parameters and Baker parameters. Then, a modified dynamic grid method was presented, which can optimize mesh quality on term of mesh quality feedback. Combined with large-pitching of 2D NACA0012 airfoil and 3D ONERA M6 wing, the difference between modified method and classical method was fully analyzed. Modified method has obvious advantage in mesh quality, and at the largest moving degree, it can significantly enhance the robustness of grid mainly through perfecting the worse element. Finally, the modified method was applied to simulate the pitching motion of NACA0012 airfoil and ONERA M6 wing, and the calculations were compared with the experimental values and literature. Result shows that the modified method can improve stronger robustness, therefore it can provide better support for unsteady flow problems.

Key words: elasticity-based dynamic grid method; mesh quality feedback; modified method; high robustness

弹性体动网格方法(Elasticity-based Dynamic Grid Method, EDGM)是一种基于物理模型的网格变形方法,其网格变形能力和局部单元控制要优于弹簧比拟法、径向基函数法等常用的网格变形方法^[1]。弹性体法的主要思想是把网格变形当成连续介质力学问题来求解,假设计算网格域为弹性介质^[2],选取恰当的弹性模量并利用位移边界条件,通过求解弹性体变形方程,得到计算网格随运动边界的变形。

弹性体法最早由 Tezduyar^[3]在处理绕圆柱不可压缩流问题中提出,随后 Tezduyar 及其研究小组经过不断改进,在动边界问题的研究中进一步

深化应用^[4]。此后,很多学者对这种方法进行了发展,Truong 等^[5]在求解弹性体法的方程组中引入伴随矩阵,通过优化的思想提高了网格变形效率;Huo 等^[6]基于分层控制弹性模量的思路提出了分层弹性体方法(Layered Elastic Solid Method, LESM)方法,极大地提高了弹性体法的鲁棒性;Abgrall 等^[7]提高了弹性体法对弯曲边界的鲁棒性;Jasinski 等^[8]基于弹性体法研究了砂岩运动的变形特征;国内张占群等^[9]结合二维问题初步实现了弹性体法的变形过程;Zhang 等^[10]基于弹性体法的边界网格修正技术解决了三维水泡动力学问题,弹性体法在气动优化设计、多体相对运动、

* 收稿日期:2016-11-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375486);航天支撑技术基金资助项目(1602010114002)
作者简介:张斌(1990—),男,山东滨州人,博士研究生,E-mail:15084904287@163.com;
杨涛(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:Taoy90@163.com

流固耦合等计算流体力学领域得到了广泛应用。

随着网格变形技术的不断发展,如何评判、对比不同网格变形方法的鲁棒性成了必须解决的问题。而变形后网格的优劣最能客观反映不同方法的好坏,所以很多学者提出了“网格质量参数”的概念,如 Baker 等^[11]在四面体网格变形研究中提出了可用于多维情况的网格质量参数;Patrick^[12]针对二维非结构网格提出了网格质量准则;高传强^[13]、刘瑜^[14]等在研究中均引入了 Patrick 参数;霍世慧^[15]等引入商业软件 Patran 中定义的网格倾斜度和纵横比来评判网格的优劣。一般而言,合理的网格质量参数应该能够准确反映变形网格的好坏,并以量化数据的形式客观表达每种方法的变形能力。

本文基于经典的弹性体动网格方法,引入两种设计合理、效果较好的网格质量参数,一方面从网格质量反馈优化的角度对经典弹性体法进行改进,提出了基于网格质量反馈的弹性体动网格改进方法;另一方面通过网格质量参数客观评判变形网格的优劣,结合多维度的大幅度变形问题和流场数值仿真,说明改进方法具有更强的鲁棒性。

1 经典弹性体动网格方法

按照弹性力学的基本原理,网格变形过程中节点位移矢量 $\mathbf{U}(x, y)$ 的控制方程为

$$\nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} + \nabla \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U})^T = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中, λ 和 μ 为代表材料弹性属性的拉梅常量,可用弹性模量 E 和泊松比 ν 来表示,即 $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。

在弹性体方法中,弹性模量 E 和泊松比 ν 是控制网格变形的核心参数,根据弹性模量的取值特点,可将弹性体分为线性弹性体和非线性弹性体。早期研究^[3-4]采用的都是线性弹性体模型,即定义材料的弹性模量 E 是各向同性的^[2],但是网格变形效果较差。

后续发展基本采用非线性弹性体,即弹性模量是各向异性的,具体取值与网格单元属性相关。其中, Löhner^[16]等在动网格研究中,提出了一种根据网格单元到运动边界的距离来控制弹性模量的思路,即以网格单元节点到运动边界平均距离的倒数来决定该单元的弹性模量,其表达式为

$$E_i = \frac{1}{L_i} \quad (2)$$

其中, E_i 为网格单元的弹性模量, L_i 为网格单元

节点到运动边界的平均距离。

文中将 Löhner 等提出的基于距离的弹性体方法称为经典方法,该方法利用更加灵活的弹性模量 E_i ,比线性方法具有更好的变形能力。但是,经典方法控制的弹性模量从动边界向外边界近似线性递减,这导致其在较大变形下无法保证动边界处的网格占优,而且根据研究对象的不同,计算网格的空间分布不尽相同,经典方法的线性特性并不能满足所有情况,需要对该方法做出合理改进。

2 网格质量参数

2.1 Baker 网格质量参数

Baker^[11]网格质量参数比较精简,可适用于多维情况的非结构网格,首先针对二维三角形网格单元,其计算公式为

$$\frac{L}{r} = \frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2}{6S} \quad (3)$$

其中: l_1, l_2 和 l_3 为三角形网格的边长; r 为三角形内切圆半径; $L = (l_1 + l_2 + l_3)/3$; S 为三角形面积。由式(3)可知, $L/r \in [2\sqrt{3}, \infty)$, 当网格单元质量较好时, $L/r \rightarrow 2\sqrt{3}$; 网格单元质量越差时, 参数 L/r 的值越大。

对于三维的四面体网格单元,其计算公式为

$$\frac{L}{r} = \frac{\sum_{i=1}^6 l_i \cdot \sum_{i=1}^4 S_i}{18V} \quad (4)$$

其中, r 为四面体内切球半径, V 为四面体的体积, L 为四面体单元所有边长 l_i 的平均值, S_i 为四面体任意表面面积。由式(4)可知, $L/r \in [2\sqrt{6}, \infty)$, 当网格单元质量较好时, $L/r \rightarrow 2\sqrt{6}$; 网格单元质量越差, 参数 L/r 的值越大。

2.2 Patrick 网格质量参数

Patrick^[12]针对二维三角形非结构网格质量,采用网格面积参数 f_{size} 、网格形状参数 f_{shape} 及综合参数 $f_{\text{size-shape}}$ 评价网格质量,其计算公式为

$$\begin{cases} f_{\text{size}} = \min(\tau, 1/\tau) \\ f_{\text{shape}} = \frac{4\sqrt{3}S}{a^2 + b^2 + c^2} \\ f_{\text{size-shape}} = f_{\text{size}} \cdot f_{\text{shape}} \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\tau = S/\zeta$, S 为网格单元面积, ζ 为以该三角形单元第二长边构建的等边三角形面积; a, b, c 分别为网格单元的三边边长。由式(5)可知, $f_{\text{size-shape}} \in (0, 1]$, 当网格单元质量较好时 $f_{\text{size-shape}} \rightarrow 1$, 网格单

元质量较差时 $f_{\text{size-shape}} \rightarrow 0$ 。

进而,以每个单元的综合参数 $f_{\text{size-shape}}$ 为基础,从网格质量的平均水平和最小极值两个层次,建立平均网格质量 f_{mean} 和最小网格质量 f_{min} ,其表达式为

$$\begin{cases} f_{\text{mean}} = (\sum_{i=1}^{Ne} f_{\text{size-shape}}) / Ne \\ f_{\text{min}} = \min(f_{\text{size-shape}}^1, f_{\text{size-shape}}^2, \dots, f_{\text{size-shape}}^{Ne}) \end{cases} \quad (6)$$

其中, Ne 为网格单元数。

但是 Patrick 并未对实用性更强的三维非结构网格给出质量参数,本文基于前人工作,发展了一套针对三维的四面体网格单元的网格质量参数,其计算公式为

$$\begin{cases} f_{\text{size}} = \min(\lambda, 1/\lambda) \\ f_{\text{shape}} = \sum_{i=1}^6 l_i \cdot \sum_{i=1}^4 S_i / 18V \\ f_{\text{size-shape}} = f_{\text{size}} \cdot f_{\text{shape}} \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\lambda = V/\xi$, V 为四面体单元体积, ξ 为以该单元所有表面平均面积构建的正三角形组成的等边四面体体积, l_i 为四面体任意边长, S_i 为四面体任意表面面积。

同理,建立平均网格质量 f_{mean} 和最小网格质量 f_{min} 参数,可对三维四面体变形网格的优劣进行量化评估。

上述两种网格质量参数设计合理,评价效果较好,均能科学地反映网格单元的质量变化。但 Baker 参数比较精简且适用于多维情况,故采用 Baker 参数对经典弹性体法进行改进;而 Patrick 参数可从多个层次评价网格的优劣,相对而言更加全面,故采用 Patrick 参数进行网格优劣评判。

3 改进弹性体法研究

3.1 网格质量反馈改进

既然网格质量参数可以将网格单元的优劣以量化数据的形式客观表达,那么将这些参数以反馈优化的方式控制网格畸变,应该能够提高网格变形的鲁棒性。基于上述思路,本节在经典弹性体法的基础上,引入 Baker 参数 L/r ,提出一种基于网格质量反馈的改进弹性体动网格方法。

首先将参数 L/r 归一化,得到网格质量的反馈值 Q_e ,其具体表达式为

$$Q_e = 1 - \frac{X}{L/r}, Q_e \in [0, 1] \quad (8)$$

其中,当网格单元为二维三角形时 $X = 2\sqrt{3}$,当网格单元为三维四面体时 $X = 2\sqrt{6}$ 。由式(8)可知,

网格单元质量较好时 $Q_e \rightarrow 0$,网格单元质量较差时 $Q_e \rightarrow 1$ 。

弹性体方法中最关键的控制参数是弹性模量 E_i ,此时将反馈值 Q_e 引入经典方法的 E_i ,得到改进弹性体法的 E'_i ,则

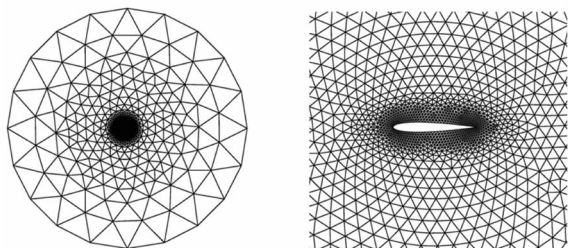
$$E'_i = Q_e E_i \quad (9)$$

对比改进前后的弹性模量 E_i 和 E'_i ,经过反馈值 Q_e 的调整,一方面可以减小质量较好单元的弹性模量,另一方面尽可能维持质量较差单元的弹性模量。这样当网格单元变形严重时, Q_e 可以相对提高较差单元的弹性模量以减小其形变量,进而将变形增量更合理地分配到计算网格中。

分别选取二维 NACA0012 翼型和三维 ONERA M6 机翼大角度俯仰运动,只考虑网格变形,对比分析改进弹性体法与经典弹性体法的变形能力。

3.2 二维问题研究

二维问题选用 NACA0012 翼型,初始网格如图 1 所示,其中全局网格分布 1660 个网格节点,3224 个三角形单元,外边界为均匀分布 20 个节点的圆周,其半径设为 20 倍翼型弦长,如图 1(a)所示;在翼型表面设置 76 个节点,翼型区域网格如图 1(b)所示。



(a) 全局网格 (b) 翼型区域网格
(a) Global grid (b) Local grid of airfoil

图 1 二维 NACA0012 翼型俯仰振荡初始网格

Fig. 1 Initial grid of NACA0012 airfoil pitching

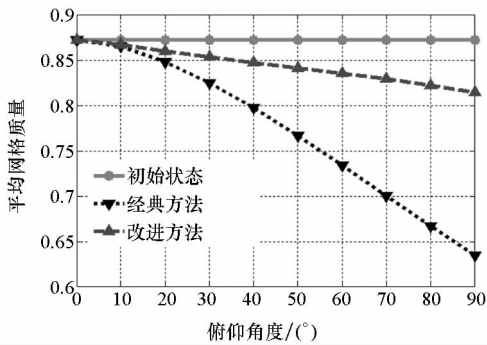
计算过程中, NACA0012 翼型绕 1/4 弦点作周期性俯仰振荡,其俯仰角 $\alpha(t)$ 随时间的变化规律为

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_\alpha) \quad (10)$$

其中,平均攻角 $\alpha_m = 0.0^\circ$,振幅 $\alpha_0 = 90.0^\circ$,相位 $\varphi_\alpha = 0.0$, ω 为振荡频率。

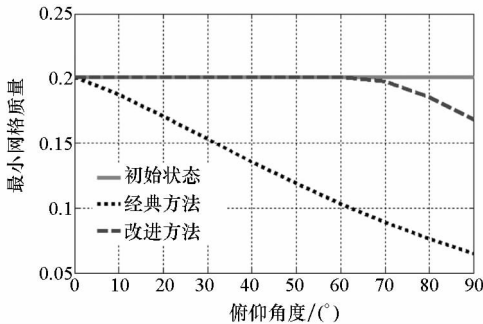
针对经典弹性体法及其改进方法,分别做出 NACA0012 翼型网格的平均网格质量 f_{mean} 和最小网格质量 f_{min} 随俯仰角 α 的变化曲线,如图 2 所示。其中,初始状态代表初始时刻的网格质量,经典方法代表 Löhner 等提出的经典弹性体法,改进

方法代表网格质量反馈的改进弹性体法。



(a) 平均网格质量

(a) Average value of mesh quality



(b) 最小网格质量

(b) Minimum value of mesh quality

图 2 两种方法的网格质量随翼型俯仰角变化
Fig.2 Grid quality varying with airfoil pitching angle of two methods

观察图 2 发现:随着 NACA0012 翼型俯仰角度的增大,经典弹性体法及其改进方法的平均网格质量和最小网格质量均在下降,但是改进方法的网格质量下降速率明显小于经典方法,尤其是最小网格质量与初始值保持了较高的一致性,而经典方法的网格质量整体处于较低水平,并且随着俯仰角度的增大有加速下滑的趋势。

为了更客观地对比经典弹性体法和改进方法的网格质量,选取 NACA0012 翼型的典型俯仰角度($\alpha = 10^\circ, 50^\circ, 90^\circ$),计算运动过程中网格质量 f^α (平均、最小网格质量) 相对初始网格质量 f^0 的下降幅度 δ ,结果如表 1 所示。定义 δ 为

$$\delta = \frac{f^\alpha - f^0}{f^0} \times 100\% \tag{11}$$

观察表 1 发现:在每个俯仰角下,经典方法的网格质量降幅都远大于改进方法,并且随着俯仰角度的增大,两种方法的降幅差距愈加明显。在最大俯仰角 90° 时,经典方法的平均、最小网格质量降幅均是改进方法的 4 倍之多。

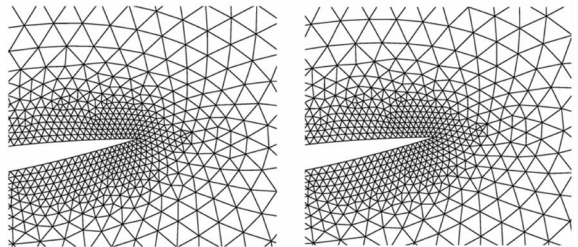
随着翼型俯仰角的逐渐增大,全场网格单元因为运动边界的拉伸而发生形变,尤其是翼型尾

表 1 两种方法网格质量在典型俯仰角下的降幅

Tab.1 Grid quality decline of two methods in typical pitching angles

俯仰 角度/ (°)	平均网格质量 降幅/%		最小网格质量 降幅/%	
	经典方法	改进方法	经典方法	改进方法
10	0.78	0.53	6.77	0.03
50	12.10	3.51	40.92	0.05
90	27.25	6.62	67.74	16.31

缘处的网格变形量最大。图 3 展示了 NACA0012 翼型在典型俯仰角 10° 、 50° 和 90° 时,机翼尾缘处的网格分布对比图。

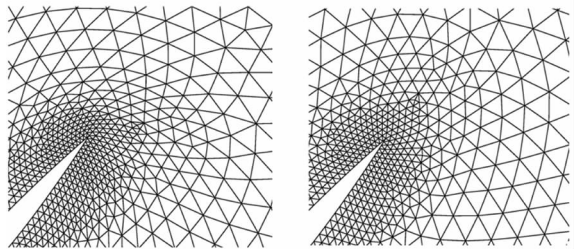


(a) 经典方法(10°)

(a) Classical method(10°)

(b) 改进方法(10°)

(b) Modified method(10°)

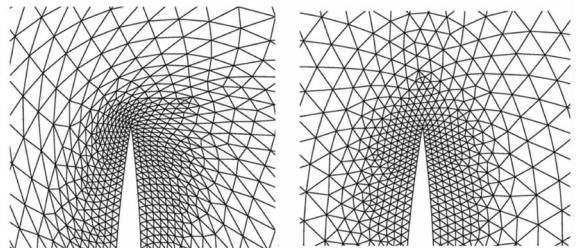


(c) 经典方法(50°)

(c) Classical method(50°)

(d) 改进方法(50°)

(d) Modified method(50°)



(e) 经典方法(90°)

(e) Classical method(90°)

(f) 改进方法(90°)

(f) Modified method(90°)

图 3 NACA0012 翼型在典型俯仰角时尾缘网格对比

Fig.3 Grid spatial distribution of NACA0012 airfoil in typical pitching angles

观察图 3 发现:在小变形 10° 时,两种方法的网格分布差别不大,如图 3(a)、图 3(b) 所示;但是随着俯仰角度的增大,经典方法的网格在机翼尾缘处逐渐发生扭曲,如图 3(c) 所示,但是改进

方法没有明显的变化,如图 3(d)所示;在 90° 时,经典方法的网格变形严重,如图 3(e)所示,而改进方法在整个过程都能保持较好的网格分布,如图 3(f)所示。上述结果说明了改进弹性体法具有更强的鲁棒性。

3.3 三维问题研究

三维问题选用 ONERA M6 机翼模型,初始网格如图 4 所示,其中全局网格共有 108 396 个网格节点,582 752 个四面体单元,外边界为长方体,如图 4(a)所示;在机翼上表面设置 16 573 个三角形单元,下表面设置 17 284 个三角形单元,机翼外沿设置 2597 个三角形单元,如图 4(b)所示。

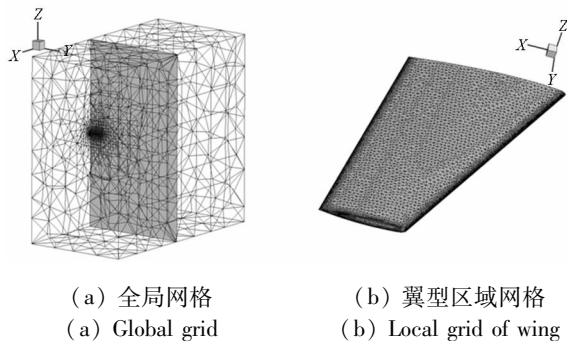


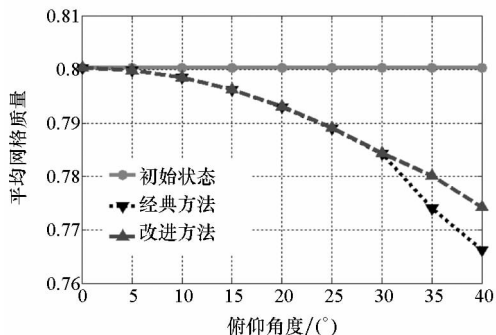
图 4 ONERA M6 机翼俯仰振荡初始网格

Fig. 4 Initial grid of ONERA M6 wing pitching

计算过程中 ONERA M6 机翼绕翼型截面的 $1/4$ 弦点,参考式(10)作周期性俯仰振荡,设定俯仰振幅 $\alpha_0 = 40.0^\circ$ 。对经典弹性体法及其改进方法,根据本文建立的三维 Patrick 网格质量参数,分别做出 ONERA M6 机翼俯仰振荡网格的平均网格质量 f_{mean} 和最小网格质量 f_{min} 随俯仰角 α 的变化曲线,如图 5 所示。

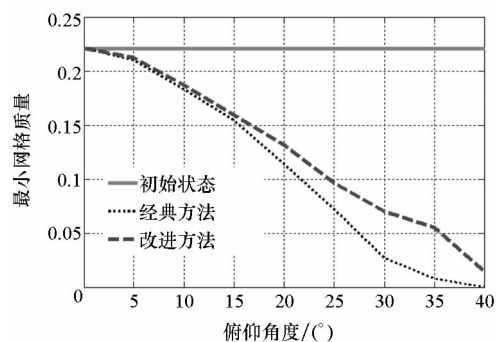
观察图 5 发现:随着 ONERA M6 机翼俯仰角度的增大,经典弹性体法和改进方法的平均网格质量 f_{mean} 和最小网格质量 f_{min} 均在下降,但是改进方法的网格质量明显优于经典方法,尤其对于大变形(如俯仰角大于 30° 后)情况,改进效果愈加明显。需要特别说明的是,俯仰角为 39° 时,经典方法的变形网格已出现“负体积”,导致网格拓扑结构破坏而变形失败,虽然此时改进方法的网格质量较初始网格下降较多,但是依然可支撑 ONERA M6 机翼俯仰振荡的流场仿真,经过测试当俯仰角度达到 100° 时仍未出现“负体积”单元,大幅增强了三维网格的变形能力。

通过对二维、三维网格变形问题的研究,在经典弹性体法中引入网格质量参数,可以明显增强网格的变形能力,尤其可以大幅提升最小网格质



(a) 平均网格质量

(a) Average level value of mesh quality



(b) 最小网格质量

(b) Minimum extreme value of mesh quality

图 5 两种方法的网格质量随机翼俯仰角变化

Fig. 5 Grid quality varying with wing pitching angle of two methods

量,避免较差网格单元的大幅度变形,对提高网格变形能力、防止网格单元畸变具有显著的改进作用。

4 计算结果验证

上节结合 NACA0012 翼型和 ONERA M6 机翼的大角度俯仰振荡,验证了基于网格质量反馈的改进弹性体法可增强网格变形的鲁棒性。本节采用同一套网格,基于开源程序(Stanford University Unstructured, SU2)^[17],计算非定常绕流的仿真结果,验证改进弹性体法对数值计算的有效支撑。

4.1 二维 NACA0012 翼型俯仰振荡

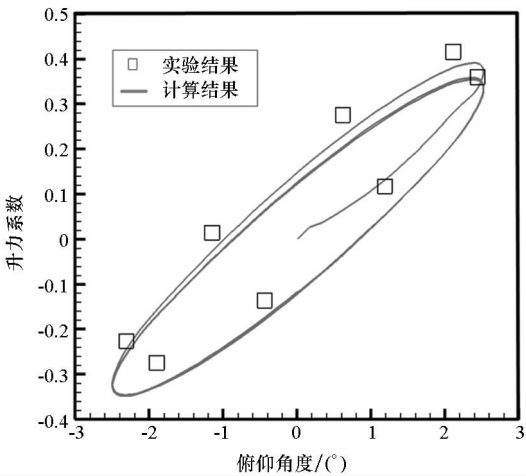
计算过程中设置 NACA0012 翼型绕 $1/4$ 弦点作周期性俯仰振荡,其俯仰角随时间的变化规律为

$$\alpha(t) = 0.016^\circ + 2.51^\circ \sin(41.823\,043\,18t)$$

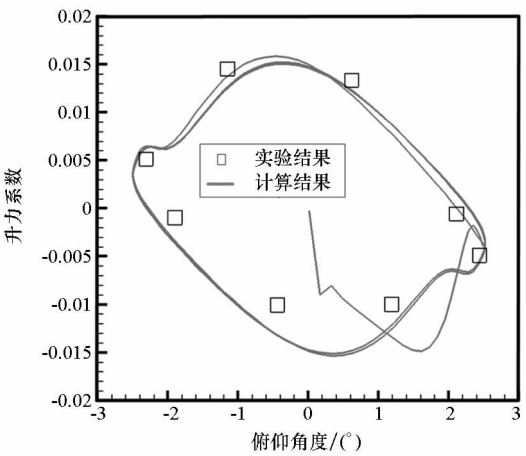
(12)

来流马赫数 $Ma = 0.755$, 雷诺数 $Re = 5.5 \times 10^6$ 。计算模型为任意拉格朗日欧拉(Arbitrary Lagrangian Eulerian, ALE)方法,采用双时间步推

进的非定常计算模型。经过三个周期的计算,跨声速状态的翼型按照俯仰振荡规律可发展成非定常稳态的周期解,参考实验结果^[18],其翼型升力系数 $CLift$ 和力矩系数 CMz (力矩作用点设为 1/4 弦点)随俯仰角 α 的变化如图 6 所示,其中曲线为数值计算值,方框为实验值。



(a) $CLift - \alpha$



(b) $CMz - \alpha$

图 6 NACA0012 翼型气动参数随俯仰角的变化
Fig. 6 Change of aerodynamic data by the attack angle of NACA0012 airfoil pitching

观察图 6 发现:不同俯仰下的升力系数与力矩系数,本文计算结果与实验值基本一致,这说明本文提出的改进弹性体法具有较高的鲁棒性。

4.2 三维 ONERA M6 机翼俯仰振荡

计算过程中设置 ONERA M6 机翼绕翼型截面的 1/4 弦点作周期性俯仰振荡,其俯仰角随时间的变化规律为

$$\alpha(t) = 3.06^\circ + 2.5^\circ \sin(116.267\ 336\ 89t) \quad (13)$$

设定来流马赫数 $Ma = 0.839\ 5$,雷诺数 $Re = 1.172 \times 10^7$ 。经过四个周期的计算,运动过程可

发展成非定常稳态的周期解,故给出第 5 个周期内,ONERA M6 机翼上、下表面在 $\alpha_m = 3.06^\circ$ 下的压力云图,并与文献[19]给出的结果作对比,如图 7 所示。

观察图 7 发现:在典型俯仰状态下,本文的计算结果与文献给出的压力分布趋势基本一致,比较准确地模拟了三维 ONERA M6 机翼俯仰振荡的流场压力。计算结果充分说明对于三维非定常流场问题,改进弹性体法同样具有较高的鲁棒性,可为非定常流场问题的求解提供有效支撑。

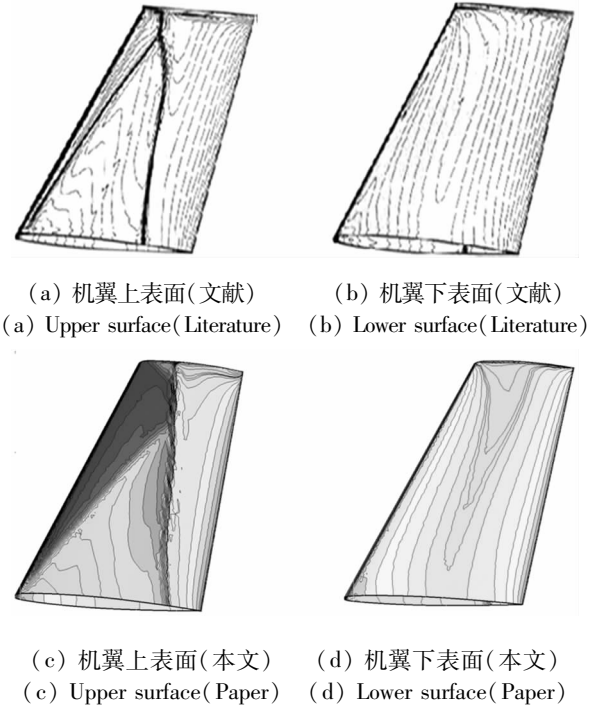


图 7 $\alpha_m = 3.06^\circ$ 时,ONERA M6 机翼上、下表面压力云图对比

Fig. 7 Comparison of pressure nephogram for ONERA M6 upper / lower wing surface at $\alpha_m = 3.06^\circ$

5 结论

本文简要介绍了弹性体动网格方法和网格质量参数,提出了一种基于网格质量反馈的改进方法。主要有以下结论:

1) 在 Löhner 等提出的经典弹性体法基础上,引入 Baker 提出的网格质量参数 L/r ,提出了一种基于网格质量反馈的改进弹性体法。改进方法从网格质量反馈优化的思路,将动边界引起的变形增量更合理地分配到计算网格中。

2) 通过改进方法与经典方法的对比研究,证明改进方法具有更高的鲁棒性。分别结合二维 NACA0012 翼型和三维 ONERA M6 机翼的大角度俯仰运动,在整个过程中改进方法均保持更好

的平均和最小网格质量,尤其在最大变形时,改进方法对最小网格质量的改进效果非常明显,可以有效改善较差网格单元,从而提高网格变形能力。

3) 改进弹性体法在实际数值模拟中具有较好的鲁棒性,可为非定常流场问题的求解提供有力支撑。作为例证,计算了二维 NACA0012 翼型、三维 ONERA M6 机翼的俯仰振荡绕流,并与实验结果及文献进行对比,计算结果可靠。

参考文献 (References)

- [1] 周璇,李水乡,孙树立,等. 非结构网格变形方法研究进展[J]. 力学进展, 2011, 41(5): 547–561.
ZHOU Xuan, LI Shuixiang, SUN Shuli, et al. Advances in the research on unstructured mesh deformation [J]. Advances in Mechanics, 2011, 41(5): 547–561. (in Chinese)
- [2] 张伟伟,高传强,叶正寅. 气动弹性计算中网格变形方法研究进展[J]. 航空学报, 2014, 35(2): 303–319.
ZHANG Weiwei, GAO Chuanqiang, YE Zhengyin. Research progress on mesh deformation method in computational aeroelasticity [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(2): 303–319. (in Chinese)
- [3] Tezduyar E T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations [J]. Advances in Applied Mechanics, 1991, 28 (1): 1–44.
- [4] Johnson A A, Tezduyar T E. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 134 (3/4): 351–357.
- [5] Truong A H, Oldfield C A, Zingg D W. Mesh movement for a discrete-adjoint Newton-Krylov algorithm for aerodynamic optimization [J]. AIAA Journal, 2008, 46(7): 1695–1704.
- [6] Huo S H, Wang F S, Yan W Z, et al. Layered elastic solid method for the generation of unstructured dynamic mesh [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2010, 46 (10): 949–955.
- [7] Abgrall R, Dobrzynski C, Froehly A. A method for computing curved meshes via the linear elasticity analogy, application to fluid dynamics problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2014, 76 (4): 246–266.
- [8] Jasinski L, Sangaré D, Adler P M, et al. Transport properties of a Bentheim sandstone under deformation [J]. Physical Review E, 2015, 91(1): 013304.
- [9] 张占群. 二维/三维动态网格的移动方法研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2011.

- ZHANG Zhanqun. Two/three dimensional dynamic mesh moving method [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2011. (in Chinese)
- [10] Zhang A M, Liu Y L. Improved three-dimensional bubble dynamics model based on boundary element method [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 294: 208–223.
- [11] Baker T, Cavallo P. Dynamic adaptation for deforming tetrahedral meshes [C]//Proceedings of 14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 1999.
- [12] Knupp P M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(3): 217–241.
- [13] 高传强,张伟伟,蒋跃文,等. 两种典型非结构网格变形方法特性对比研究[J]. 航空工程进展, 2014, 5(2): 212–219.
GAO Chuanqiang, ZHANG Weiwei, JIANG Yuewen, et al. A comparative study on two typical unstructured grid deformation methods [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2014, 5(2): 212–219. (in Chinese)
- [14] 刘瑜. 量热完全气体/化学非平衡气体流动 ALE 有限体积计算方法研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2014.
LIU Yu. Numerical research of ALE finite volume method for calorically perfect gas/chemical nonequilibrium gas flow [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014. (in Chinese)
- [15] 霍世慧,王富生,岳珠峰. 弹簧近似法在二维非结构动网格生成技术中的应用[J]. 振动与冲击, 2011, 30(10): 177–182.
HUO Shihui, WANG Fusheng, YUE Zhufeng. Spring analogy method for generating of 2D unstructured dynamic meshes [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(10): 177–182. (in Chinese)
- [16] Löhner R. Applied computational fluid dynamics techniques: an introduction based on finite element methods [M]. Fairfax, Virginia, USA: John Wiley & Sons, 2008.
- [17] Palacios F, Economou T, Aranake A, et al. Stanford university unstructured (SU2): open-source analysis and design technology for turbulent flows [C]//Proceedings of 52nd Aerospace Sciences Meeting, 2014.
- [18] Landon H R. NACA0012 oscillatory and transient pitching, Data Set 3 in: compendium of unsteady aerodynamic measurements [R]. The Structures and Materials Panel of AGARD, 1982.
- [19] 杨青. 超临界翼型、机翼的定常和非定常流场数值模拟[D]. 西安:西北工业大学, 2004.
YANG Qing. The steady/unsteady flow field numerical simulation of supercritical airfoils and wings [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2004. (in Chinese)