

## 临近空间拦截弹最优弹道跟踪制导律\*

雷虎民<sup>1</sup>, 李宁波<sup>1,2</sup>, 周 颢<sup>1</sup>, 邵 雷<sup>1</sup>, 王 斌<sup>1</sup>

(1. 空军工程大学 防空反导学院, 陕西 西安 710051;

2. 西安交通大学 电子信息与工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:**针对拦截临近空间高超声速飞行器的弹道跟踪过程,基于线性二次型调节器理论和高斯伪谱法设计一种跟踪制导律。为了对标称弹道进行精确跟踪,考虑线性二次型跟踪问题,应用最优控制理论推导最优解的充要条件,得到带时变增益的线性状态反馈控制量的表达式;基于高斯伪谱法,在离散的勒让德-高斯点上利用标称弹道数据计算差分矩阵和系数矩阵,求得状态扰动反馈控制律。仿真结果表明,与基于求解矩阵黎卡提方程的方法相比,该方法选取较少的节点即可获得高精度的反馈控制量,且运算效率大幅提高,满足在线实施要求。

**关键词:**临近空间;拦截;弹道跟踪;最优控制;高斯伪谱法

**中图分类号:** TN95      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-2486(2018)01-024-08

## Optimal trajectory tracking guidance law for near space interceptor

LEI Humin<sup>1</sup>, LI Ningbo<sup>1,2</sup>, ZHOU Jin<sup>1</sup>, SHAO Lei<sup>1</sup>, WANG Bin<sup>1</sup>

(1. Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** In allusion to the trajectory tracking process of interception against hypersonic targets in near space, a novel tracking guidance law based on linear quadratic regulator theory and Gauss pseudospectral method was designed. In order to track the nominal trajectory accurately, the linear quadratic tracking problem was considered, while the sufficient and necessary conditions for optimal solutions were deduced with the optimal control theory to acquire the expression of linear state feedback control variables. Based on Gauss pseudospectral method, the time-varying difference matrixes and coefficient matrixes were calculated by using the information of the nominal trajectory on the Legendre-Gauss points to obtain the state disturbances feedback control law. Simulation results show that, compared with the method by solving Riccati equation, this method can obtain the feedback control variables with high accuracy and computation efficiency by less nodes and satisfy the requirement of on-line implementation.

**Key words:** near space; interception; trajectory tracking; optimal control; Gauss pseudospectral method

对于拦截临近空间高超声速目标采用复合制导体制是一条比较实际的思路。复合制导体制的中制导段飞行时间最长、作用距离最远、对射程影响最大,决定了拦截弹的整体性能<sup>[1]</sup>。

面对临近空间高超声速武器这类新型、高动态目标,若采用传统导引方法,如三点法、半前置法等直接基于运动目标进行拦截,将会导致拦截武器飞行弹道的频繁调整,不利于拦截实施,且会导致不必要的能量损耗。与末制导段不同的是,中制导段一般不以脱靶量为性能指标,而是保证末制导系统可靠截获目标,希望拦截弹利用较少的能量、沿着较为平滑的弹道向着预测命中点飞行<sup>[1]</sup>。考虑各种终端约束与一系列过程特征,中制导段弹道规划问题实际上是一个复杂的非线性

优化问题<sup>[2]</sup>。同时,由于临近空间拦截弹在实际飞行过程中大空域、宽速域的特点,其飞行环境、气动模型、热防护、导航设备等方面都存在很大的不确定性<sup>[3]</sup>,这时就要求所设计的中制导律能够及时修正跟踪误差。所以,中制导段采用离线规划弹道并在线跟踪控制的设计是一条比较合理的技术路线<sup>[4]</sup>。

弹道规划是一个复杂的非线性规划问题,需要离线进行求解以获得标称弹道,耗时较长,而精确跟踪过程通常对非线性模型进行线性化,在此基础上快速获得反馈控制量,进而实现在线修正<sup>[5]</sup>。目前,采用这种将拦截弹弹道与制导律进行分离设计的文献并不多,但是这种设计原则是推动中空空地空导弹发展、提高射程和制导控制

\* 收稿日期:2016-06-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61573374,61503408);航空科学基金资助项目(20150196006)

作者简介:雷虎民(1960—),男,陕西渭南人,教授,博士,博士生导师,E-mail:hmlinet@21cn.com

精度的有效途径<sup>[6]</sup>。文献[7]研究了地空导弹拦截高速目标的中制导段弹道优化问题,但仅仅考虑了开环的优化计算问题,没有考虑其闭环实现。文献[8]采用高斯伪谱法研究了空空导弹的中制导问题,指出中制导律设计方法大致可分为两类,一类是比例导引规律及其改进形式,另一类是将中制导律设计问题看作最优控制问题,采用最优控制问题的方法求解,得到满足攻击时间最短或燃料最省的最优中制导律,新一代空空导弹中制导律的设计常常采用后者。文献[9-10]采用模型预测静态规划的方法对中制导弹道规划问题进行了研究,该方法结合非线性模型预测理论与近似动态规划理论,基于离散化以后的系统状态方程,将最优弹道基础上产生的扰动量作为误差项,在最优弹道附近进行泰勒级数展开,通过迭代求解一次性得到误差项基础上对应的最优控制量的补偿项,具有高效性及快速性的特点,但是需要选取大量的节点才能确保求解精度。文献[11]通过在一段滚动的短时间域内将非线性模型近似线性化,在此基础上快速求得反馈控制律,但是滚动时域的方法只能保证在一段有限的短时间域内的局部最优性,而不能保证全局最优性。

本文基于高斯伪谱法和线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)理论,提出了一种最优弹道修正算法,从提高跟踪精度和求解效率两方面对拦截弹中制导弹道跟踪问题进行了有益的探索。

## 1 标称最优弹道

### 1.1 拦截弹运动方程

为研究方便并不失一般性,考虑中制导段拦截弹朝向预测命中点飞行,理想轨迹位于平面内,所以,仅考虑纵向平面内的拦截弹质点运动模型<sup>[12]</sup>:

$$\dot{v} = \frac{P \cos \alpha - C_x q S}{m} - g \sin \theta \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P \sin \alpha + C_y q S}{m v} - \frac{g \cos \theta}{v} \quad (2)$$

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad (3)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta \quad (4)$$

其中: $v$ 表示拦截弹速度; $\theta$ 为弹道倾角; $x, y$ 分别表示横程和纵程; $m$ 为拦截弹质量; $P$ 表示作用在拦截弹上的推力,其值为92.794 kN,有动力段的作用时间为20.3 s,燃料燃烧速度为34.796 2 kg/s,之后发动机关机,推力保持为零,质量保持不变; $q$

表示动压, $S$ 表示参考面积, $g$ 表示重力加速度; $C_x, C_y$ 分别为阻力系数及升力系数,可以分别表示为马赫数 $Ma$ 和攻角 $\alpha$ 的函数:

$$C_x = C_{x0} + K \cdot C_y^2 \quad (5)$$

$$C_y = C_y^\alpha \quad (6)$$

其中, $C_{x0}$ 为零升阻力系数, $C_y^\alpha$ 为升力对于攻角的偏导数, $K$ 为诱导阻力系数。对大气密度的假设是:

$$\rho = \rho_0 \exp(-y/y_0) \quad (7)$$

其中: $\rho_0$ 为地面空气密度; $\rho$ 为飞行器高度处的空气密度; $\rho_0 = 1.225 \text{ 0 kg/m}^3$ , $y_0 = 7254.3 \text{ m}$ 。

### 1.2 弹道优化模型

设 $t_0$ 表示初始时刻, $t_f$ 表示终端时刻,为保证拦截弹的杀伤效果,一般将终端时刻的速度最大作为优化指标 $J^{[9]}$ ,即:

$$J = \phi(v(t_f), t_f) = -v_f \quad (8)$$

由预测命中点给出终端时刻位置约束( $x_f, y_f$ ),由末制导捕获条件给出终端时刻的弹道倾角约束 $\theta_f$ 。那么标称弹道的终端约束条件如下所示:

$$\psi = [\theta - \theta_f \quad x - x_f \quad y - y_f]^T = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{0}$ 表示具有相应维度的全零矩阵。

为了保证飞行的稳定性以及弹道的可实现性,控制量约束设置为:

$$\|\alpha\| \leq \alpha_{\max} \quad (10)$$

为了保证拦截弹在飞行过程中弹体结构的稳定性,动压约束设置为:

$$q = 0.5 \rho v^2 \leq q_{\max} \quad (11)$$

在临近空间范围内,拦截弹所能提供的可用过载大小有限<sup>[13]</sup>,过载约束设置为:

$$n = \frac{C_y q S}{m g} \leq n_{\max} \quad (12)$$

考虑到拦截弹的热流密度约束,其简化计算公式<sup>[14]</sup>为:

$$Q = Q_a Q_r \leq Q_m \quad (13)$$

$$Q_a = h_0 + h_\alpha \alpha + h_{\alpha^2} \alpha^2 \quad (14)$$

$$Q_r = 117 \ 700 \sqrt{\rho} (10^{-4} v)^{3.07} \quad (15)$$

上述最优控制问题通过高斯伪谱法转化为非线性规划问题,然后采用非线性规划求解器SNOPT<sup>[15]</sup>等进行求解。推力段选取43个勒让德-高斯(Legendre-Gauss, LG)点,无动力段选取20个LG点。高斯伪谱法与一般的离散求解方法相比,能以更少的节点获得更高的求解精度<sup>[16]</sup>,进而提高算法的运算效率。其标称最优弹道如图1所示。

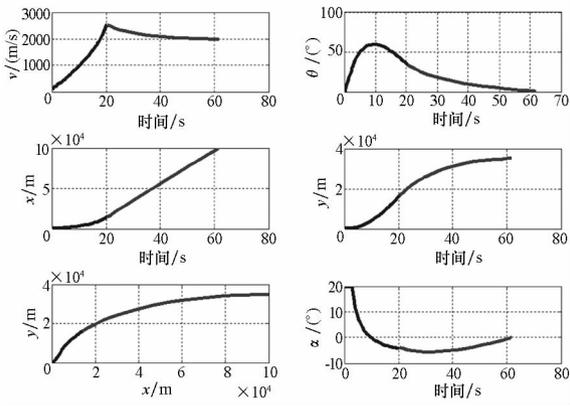


图 1 标称弹道

Fig. 1 Nominal trajectory

## 2 基于高斯伪谱法的在线跟踪

### 2.1 基于 LQR 的弹道跟踪

离线生成的标称最优弹道需要跟踪制导律来保证实现。因为建立拦截弹运动方程所用的大气模型是对实际大气的简化,而且大气中也存在着随机风的干扰,若不施加弹道跟踪控制,将会导致实际弹道不断远离标称最优弹道,进而无法完成既定飞行任务。

应用最优控制理论解决制导问题时,最后都需要转化为两点边值问题(Two Point Boundary Value Problems, TPBVPs)进行求解<sup>[17]</sup>。TPBVPs 的

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{C_x \rho S v}{m} & -g \cos \theta & 0 & -\frac{C_x \rho S v \partial \rho}{m \partial y} \\ \frac{C_y \rho S}{m} + \frac{g \cos \theta}{v^2} - \frac{0.5 C_y \rho S v^2 + P \sin \alpha}{m v^2} & \frac{g \sin \theta}{v} & 0 & \frac{0.5 C_y S v \partial \rho}{m \partial y} \\ \cos \theta & -v \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & v \cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} -\frac{(C_y^\alpha)^2 \alpha \rho S v^2 + P \sin \alpha}{m} \\ \frac{0.5 C_y \rho S v^2 + P \cos \alpha}{m v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{y_0} e^{-\frac{y}{y_0}} \quad (21)$$

考虑如下的二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{P}_f \delta \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \delta \mathbf{u}(t)] dt \quad (22)$$

迭代过程需要进行大量的计算,导致无法在线实现,所以这种方法一般用来解决离线的弹道优化问题,而不适用于在线跟踪。

LQR 理论为基于最优控制理论的弹道在线修正问题提供了可行的解决方法。由于线性二次型问题的最优解具有统一的解析表达式,且可得到一个简单的状态线性反馈控制律,因此,便于计算和实现闭环反馈控制<sup>[18]</sup>。

式(1)~(4)表示的模型简记为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t) \mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \delta \mathbf{u} \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{x} = [v \ \theta \ x \ y]^T$ ,  $\mathbf{u} = [\alpha]$ 。显然式(16)是非线性耦合的,不能直接应用线性化方法进行弹道跟踪设计。基于小扰动假设,在标称弹道附近将拦截弹质点运动模型进行线性化,得到如式(17)所示形式的状态方程:

$$\begin{cases} \delta v = \frac{\partial f_1}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \delta \alpha \\ \delta \theta = \frac{\partial f_2}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \delta \alpha \\ \delta x = \frac{\partial f_3}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \delta \theta \\ \delta y = \frac{\partial f_4}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \delta \theta \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)简记为如下形式:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u} \quad (18)$$

式中,矩阵  $\mathbf{A}(t)$  和  $\mathbf{B}(t)$  可以通过推导得到:

式(22)中第一项末值型性能指标是对终端状态的要求,  $\mathbf{P}_f$  为对称半正定权重矩阵。第一过程项限制飞行过程中的状态量偏差,以保证拦截弹始终沿最优弹道飞行,  $\mathbf{Q}(t)$  为对称半正定权重矩阵。第二过程项限制控制量的变化范围,从而限制诱导阻力,使拦截弹速度损失最小<sup>[9]</sup>,  $\mathbf{R}(t)$  为对称正定矩阵。

引入哈密尔顿函数,其中  $\boldsymbol{\lambda}$  是与  $\mathbf{x}$  同维的协态变量:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} [\delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \delta \mathbf{u}(t)] + \delta \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t)] \quad (23)$$

根据一阶最优性必要条件可以得到等式:

$$\delta u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\delta\lambda(t) \quad (24)$$

$$\delta\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \delta x} = -[Q(t)\delta x + A^T\delta\lambda(t)] \quad (25)$$

将等式(24)代入等式(17),可以得到如下的 TPBVPs:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \quad (26)$$

### 2.2 基于高斯伪谱法求解

基于高斯伪谱法对模型进行时域变换,采用拉格朗日插值基函数在  $N$  个 LG 点将状态变量、协态变量、控制量近似<sup>[19]</sup>,LG 点为  $N$  阶勒让德多项式的根,上述 TPBVPs 被转换为:

$$\sum_{j=1}^N D_{ij}\delta x_j(\tau) - \frac{t_f - t_0}{2}[A_i(\tau)\delta x_i(\tau) - B_i(\tau)\delta\lambda_i(\tau)] = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^N D_{ij}\delta\lambda_j(\tau) + \frac{t_f - t_0}{2}[Q(\tau)\delta x_i(\tau) + A_i^T(\tau)\delta\lambda_i(\tau)] = 0 \quad (28)$$

其中,  $\mathbf{0}$  表示具有相应维度的全零矩阵,  $D_{ij}$  为  $(N-1) \times N$  维的差分矩阵,拉格朗日插值基函数、勒让德多项式及差分矩阵  $D_{ij}$  的表达式可参考文献[19]。

为了使表达更加简便,进行如下的替代:  $X = [\delta x_0^T, \delta x_1^T, \dots, \delta x_{N-1}^T]^T$ ,  $\Lambda = [\delta\lambda_0^T, \delta\lambda_1^T, \dots, \delta\lambda_{N-1}^T]^T$ ,可以得到:

$$\begin{bmatrix} E & -\frac{t_f - t_0}{2}F \\ \frac{t_f - t_0}{2}G & H \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Lambda \end{bmatrix} = VZ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[E]_{ij} = \begin{cases} D_{ij} & i \neq j \\ D_{ij}I_n - \frac{t_f - t_0}{2}A_i & i = j \end{cases} \quad (30)$$

$$[F]_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}_n & i \neq j \\ -B_i R_i^{-1} B_i^T & i = j \end{cases} \quad (31)$$

$$[G]_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}_n & i \neq j \\ Q_i & i = j \end{cases} \quad (32)$$

$$[H]_{ij} = \begin{cases} D_{ij}I_n & i \neq j \\ D_{ij}I_n + \frac{t_f - t_0}{2}A_i & i = j \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} P_1 = [0_n, \dots, 0_n, P_f] \\ P_2 = [0_n, \dots, 0_n, -I_n] \end{cases} \quad (34)$$

其中,  $I_n$  是  $n \times n$  维的单位矩阵,  $n$  为状态变

量的个数,  $E, F, G, H$  是  $n(N-1) \times N$  维矩阵,  $P_1$  和  $P_2$  是  $n \times nN$  维矩阵。

令  $V = [V_0 \ V_e]$ , 将其代入等式(29)得到:

$$V_0\delta x_0 + V_e Z_e = \mathbf{0} \quad (35)$$

其中,  $V_0$  和  $V_e$  分别为  $(2nN-1) \times n$ ,  $(2nN-1) \times n(2N-1)$  维分块矩阵。向量  $Z_e$  定义为  $Z_e = [\delta x_1^T, \dots, \delta x_{N-1}^T, \delta\lambda_0^T, \dots, \delta\lambda_{N-1}^T]^T$ , 由等式(35)得到:

$$Z_e = -V_e \setminus V_0 \delta x_0 = W\delta x_0 \quad (36)$$

$$\begin{cases} \delta x_i = W_{xi}\delta x_0 \\ \delta\lambda_i = W_{\lambda i}\delta x_0 \end{cases} \quad (37)$$

其中,  $W_{xi}$  和  $W_{\lambda i}$  分别是  $W$  的  $n \times n$  维分块矩阵, 下标  $i$  表示第  $i$  个 LG 配点。把等式(37)代入等式(24), 得到离散的最优控制律:

$$\delta u(\tau_i) = -R^{-1}(\tau_i)B^T(\tau_i)W_{\lambda i}\delta x_0 \quad (38)$$

具体跟踪制导过程如图 2 所示。

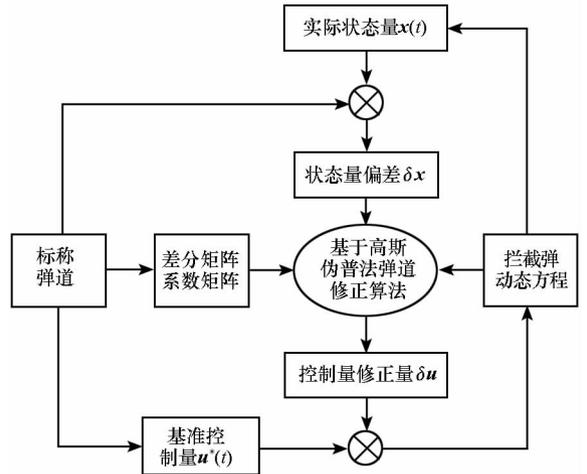


图 2 弹道跟踪过程

Fig. 2 Process of trajectory tracking

首先,通过弹道优化模型离线求解出标称弹道  $x^*(\tau)$  和控制量  $u^*(\tau)$ 。其次,把惯导系统获得的当前状态与标称状态的差值作为初值,在 LG 点上利用标称弹道数据计算差分矩阵和系数矩阵,求得状态扰动反馈控制律  $\delta u(\tau)$ , 实际轨迹状态量  $x(\tau)$  可以通过  $u(\tau) = u^*(\tau) + \delta u(\tau)$  和拦截弹动态方程式(1)~(4)得到,将实际轨迹  $x(\tau)$  和参考轨迹  $x^*(\tau)$  的偏差  $\delta x(\tau)$  作为新的初值,则形成了可以快速在线实现的闭环控制律。

### 3 仿真验证

#### 3.1 基于奇异值分析的模型改进

无动力段的弹道跟踪更为困难,因此选择无动力滑行弹道进行仿真验证。

为了对弹道进行更好的跟踪,需要分析系统

可控性,弹道修正模型可控性判定矩阵为:

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (39)$$

图 3 给出了沿无动力段最优弹道  $Q_c$  的最小奇异值变化情况。

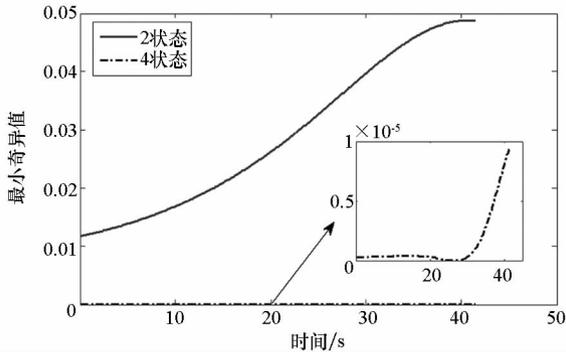


图 3 奇异值变化情况

Fig. 3 Variation of singular value

由图 3 可知,对于 4 状态系统,即跟踪等式(16)中的 4 个状态,沿着整条飞行弹道的最小奇异值几近为零。根据奇异值理论<sup>[20]</sup>,当存在随机风干扰时,输入标称攻角难以进行有效的反馈控制得到标称控制量,即难以控制拦截弹沿标称弹道飞行。而对于 2 状态系统,即只跟踪弹道倾角与高度两个状态,沿着整条弹道每一个时刻都不存在极小奇异值现象,则可以认为导弹在飞行过程中的每一个时刻都是可控的,即存在随机风干扰的条件下仍可以对标称轨迹稳定跟踪。初步分析是 4 个状态变量之间存在冗余性,导致 4 状态系统可控性较差。飞行器速度和弹道倾角决定了高度和射程,所以对这两个量进行跟踪就能够实现对弹道的跟踪。但对拦截弹来说,总体设计阶段就要确定速度特性,从而确定发动机参数,因此发动机推力和速度大小可近似认为不可控量<sup>[21]</sup>,且在制导律设计时一般不对弹体轴向或速度大小进行控制,所以,选择弹道倾角和高度变量作为状态变量。

### 3.2 数字仿真

#### 3.2.1 修正算法验证及约束情况

令状态量初始偏差为  $\delta\theta_0 = 0.5^\circ$ 、 $\delta y_0 = 500$  m,无动力段选取 20 个 LG 点,节点间的值通过拉格朗日插值获得,其偏差量随时间变化情况如图 4、图 5 所示,由图可知,该方法能够快速有效消除初始偏差。

拦截弹过程约束及控制量约束如表 1 所示,其飞行过程中热流、过载、动压及攻角变化如图 6 所示。由图可知,拦截弹飞行过程中满足过程约束及控制量约束。

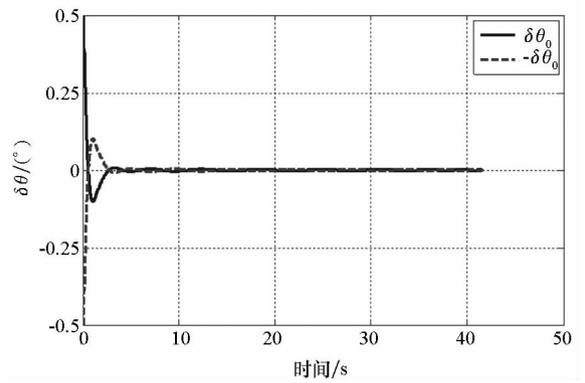


图 4 弹道倾角偏差量变化情况

Fig. 4 Variation of trajectory inclination angle deviation

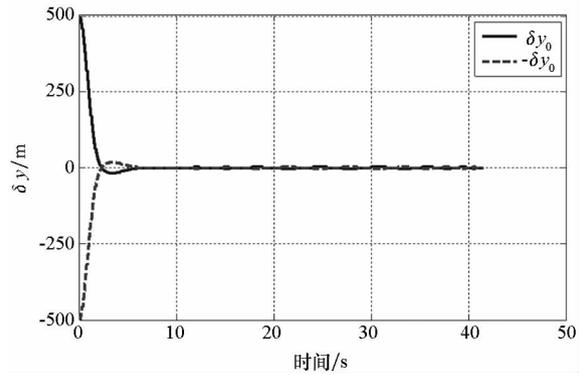


图 5 高度偏差量变化情况

Fig. 5 Variation of altitude deviation

表 1 过程约束和控制量约束

Tab. 1 Path constraints and control constraints

过程约束			控制量约束
$Q_m / W \cdot m^{-2}$	$n_{max}$	$q_{max} / kPa$	$\alpha_{max} / (^\circ)$
750	10	500	20

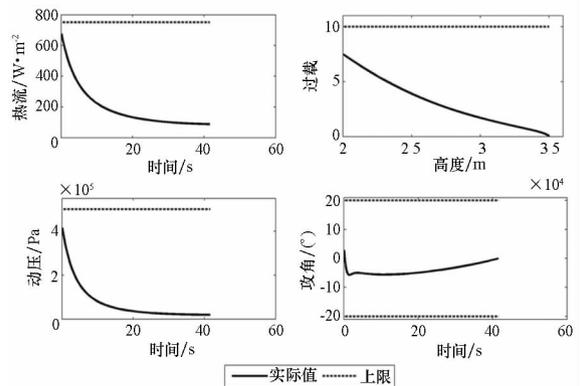


图 6 控制量及过程约束随时间变化情况

Fig. 6 Variation of control and path constraints

#### 3.2.2 随机干扰抑制验证

根据文献[21],考虑如下的随机风干扰模型:

$$\begin{cases} U_0 = rand(n) \cdot \sigma + \mu \\ W_0 = rand(n) \cdot 2\sigma + \mu \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} U = U_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \\ W = W_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \end{cases} \quad (41)$$

其中:  $U_0$  和  $W_0$  分别为地面垂直和水平阵风的风速,  $U$  和  $W$  分别为高空垂直和水平阵风的风速, 一般情况下  $W = 2U$ ;  $rand(n)$  为单位随机数,  $\mu$  为均值,  $\sigma$  为均方差。

由风速为  $U$  的垂直阵风形成附加攻角  $\Delta\alpha_1$ , 由风速为  $W$  的水平阵风形成附加攻角  $\Delta\alpha_2$ , 比例系数为  $a$ , 则:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_1 = a \tan \frac{U}{V} \cos\theta \\ \Delta\alpha_2 = a \tan \frac{W}{V} \sin\theta \end{cases} \quad (42)$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 \quad (43)$$

随机风放大系数  $\sqrt{\rho_0/\rho}$ 、等效干扰攻角及垂直和水平方向随机干扰风速在无动力段随时间变化情况如图 7 所示。

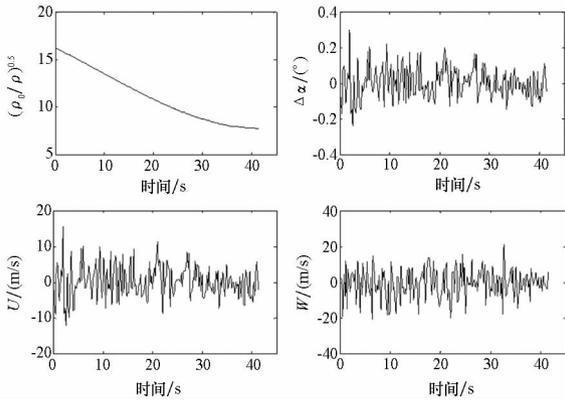


图 7 随机风干扰模型

Fig.7 Interference model of stochastic wind

加入上述干扰模型的等效干扰攻角, 应用蒙特卡洛方法进行 30 次仿真, 其状态偏差量如图 8、图 9 所示, 由图可知, 存在随机风干扰的情况下, 本文方法能够有效消除跟踪误差。

### 3.2.3 优劣性比较

为了验证本文所提算法的优越性, 在只存在初始偏差的情况下, 将其与基于矩阵黎卡提微分方程求解的结果进行了比较。令状态量的初始偏差为  $\delta\theta_0 = 0.5^\circ$ ,  $\delta y_0 = 500 \text{ m}$ , Case1 表示基于本文方法求解, Case2 表示基于矩阵黎卡提微分方程求解, 且选取 20 个节点, 节点间的值通过拉格朗日插值获得, Case3 表示基于矩阵黎卡提微分方程求解, 且选取 4500 个节点, 具体结果如图 10 所示, 分别运行 10 次平均消耗时间如表 2 所示。

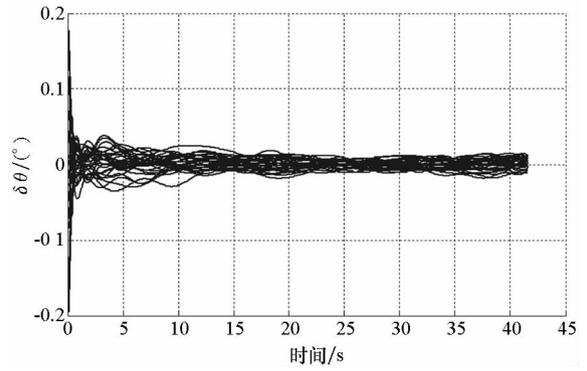


图 8 弹道倾角偏差量蒙特卡洛仿真

Fig.8 Monte Carlo simulation of trajectory inclination angle deviation

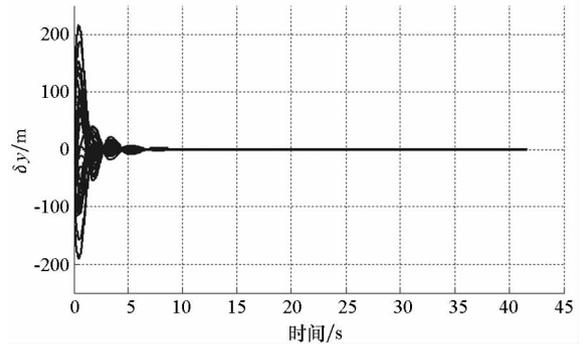
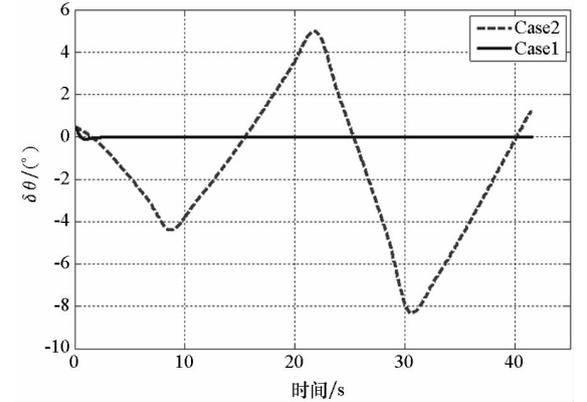


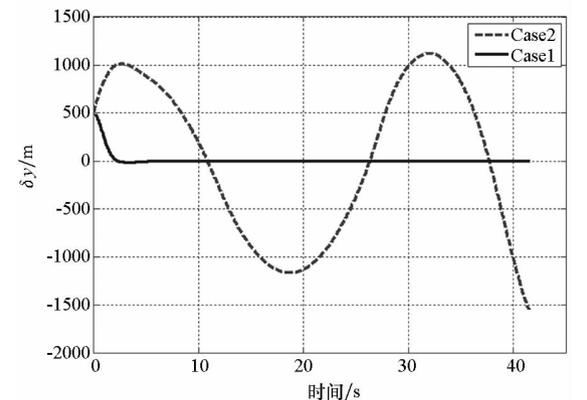
图 9 高度偏差量蒙特卡洛仿真

Fig.9 Monte Carlo simulation of altitude deviation



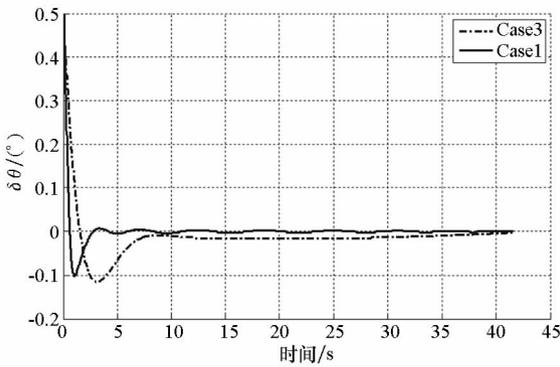
(a) 弹道倾角偏差

(a) Trajectory inclination angle deviation



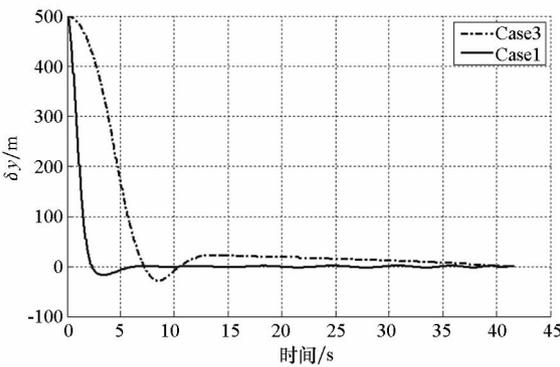
(b) 高度偏差

(b) Altitude deviation



(c) 弹道倾角偏差

(c) Trajectory inclination angle deviation



(d) 高度偏差

(d) Altitude deviation

图 10 仿真结果对比

Fig. 10 Comparison of simulation results

表 2 消耗时间比较

Tab. 2 Time consumption comparison

方法	Case1	Case2	Case3
消耗时间/s	0.017	1.084	9.889

由图 10(a)、图 10(b)可知,同样选取 20 个节点求解,本文方法能快速有效消除偏差,而基于求解矩阵黎卡提方程的方法,偏差会出现较大震荡,导致拦截弹无法稳定飞行。

由图 10(c)、图 10(d)可知,采用基于求解矩阵黎卡提方程的方法要到达与本文方法类似的效果,需要大量增加节点数进行求解,因而消耗了大量时间。

结合表 2 消耗时间比较可知,本文方法能够有效提高计算效率,满足在线实施的要求。

## 4 结论

针对拦截临近空间高超声速飞行器的弹道跟踪过程,基于高斯伪谱法和 LQR 理论设计了一种弹道跟踪制导律。采用高斯伪谱法求解本文提出的基于 LQR 的弹道修正模型,利用标称弹道数

据,选取较少的节点即可获得高精度的反馈控制修正量,且避免了积分或迭代求解过程,提高了算法的运算效率,满足了实时性要求。同时,通过矩阵求逆过程,利用状态变量偏差初值求解协态变量偏差,从而有效地解决了协态变量偏差初值的获取问题。

## 参考文献 (References)

- [1] 柴华, 仲明, 梁彦刚. 采用状态转移矩阵的拦截中段制导方法[J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(4): 137-142. CHAI Hua, ZHONG Ming, LIANG Yangang. Midcourse guidance of interception using state transition matrix [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(4): 137-142. (in Chinese)
- [2] Nahshon I, Joseph Z, Ben A. Near-optimal spatial midcourse guidance law with an angular constraint [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2014, 37(1): 214-223.
- [3] 张大元, 雷虎民, 邵雷, 等. 临近空间高超声速目标拦截弹弹道规划[J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(3): 91-96. ZHANG Dayuan, LEI Humin, SHAO Lei, et al. Interceptor trajectory programming for near space hypersonic target [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(3): 91-96. (in Chinese)
- [4] 李惠峰. 高超声速飞行器制导与控制技术[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2012. LI Huifeng. Guidance and control technology of hypersonic vehicles [M]. Beijing: Chinese Astronautics Press, 2012. (in Chinese)
- [5] Yang L, Zhou H, Chen W C. Application of linear Gauss pseudospectral method in model predictive control [J]. Acta Astronautica, 2014, 96: 175-187.
- [6] 徐品高. 地空导弹与弹道导弹的技术融合正在促使这两类导弹产生突破性的进展[J]. 现代防御技术, 2000, 28(3): 1-12. XU Pingao. Technology fusion of surface to air missile and ballistic missile is spurring to form development in giant stride for two type missiles [J]. Modern Defense Technology, 2000, 28(3): 1-12. (in Chinese)
- [7] Derren T R. Midcourse trajectory optimization for a SAM against high-speed target [C]//Proceedings of AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, AIAA-2002-4514, 2002.
- [8] 杨希祥, 张为华. 基于 Gauss 伪谱法的空空导弹最优制导律设计[J]. 国防科技大学学报, 2013, 35(1): 28-32. YANG Xixiang, ZHANG Weihua. Midcourse guidance law optimal design for air-to-air missiles based on Gauss pseudospectral method [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2013, 35(1): 28-32. (in Chinese)
- [9] Dwivedi P N, Bhattacharya A, Padhi R. Suboptimal midcourse guidance on interceptors for high-speed targets with alignment angle constraint [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(3): 860-877.
- [10] Halbe O, Raja R G, Padhi R. Robust reentry guidance of a reusable launch vehicle using model predictive static programming [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(1): 134-148.
- [11] Paul W. Application of pseudospectral methods for receding

- horizon control [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(2): 310–314.
- [12] 张大元, 雷虎民, 吴玲, 等. 基于滑模变结构的弹道跟踪制导律设计[J]. *系统工程与电子技术*, 2014, 36(4): 721–727.
- ZHANG Dayuan, LEI Humin, WU Ling, et al. A trajectory tracking guidance law based on the sliding mode variable structure control [J]. *System Engineering and Electronics*, 2014, 36(4): 721–727. (in Chinese)
- [13] 高柯, 杨文骏, 张明环. 基于临近空间防空导弹的气动力控制系统仿真[J]. *航空计算技术*, 2011, 41(6): 62–65.
- GAO Ke, YANG Wenjun, ZHANG Minghuan. Simulation of pneumatic control system based on air defense missile of near space [J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2011, 41(6): 62–65. (in Chinese)
- [14] Rahimi A, Kumar K D, Alighanbari H. Particle swarm optimization applied to spacecraft reentry trajectory [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(1): 307–310.
- [15] Gill P E, Wong E, Murray M, et al. User's guide for SNOPT version 7.4: software for large-scale nonlinear programming[R]. USA: Stanford Business Software, Inc, 2015.
- [16] 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化[J]. *宇航学报*, 2008, 29(6): 1766–1772.
- YONG Enmi, TANG Guojin, CHEN Lei. Rapid trajectory optimization for hypersonic reentry vehicle via Gauss pseudospectral method [J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(6): 1766–1772. (in Chinese)
- [17] Roberts S M, Shipman J S. Two point boundary value problems: shooting methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1973, 27(121): 213.
- [18] 胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- HU Shousong, WANG Zhiqian, HU Weili. Optimal control theory and system [M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese)
- [19] 杨希祥, 杨慧欣, 王鹏. 伪谱法及其在飞行器轨迹优化设计领域的应用综述[J]. *国防科技大学学报*, 2015, 37(4): 1–6.
- YANG Xixiang, YANG Huixin, WANG Peng. Overview of pseudo-spectral method and its application in trajectory optimum design for flight vehicles [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2015, 37(4): 1–8. (in Chinese)
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- ZHANG Xianda. Matrix analysis and application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [21] 李新国, 方群. 有翼导弹飞行动力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005: 153–155.
- LI Xinguo, FANG Qun. Flight dynamics of winged missile [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2005: 153–155. (in Chinese)