

楔形变截面钢-混凝土组合梁弯曲和自由振动的求积元分析*

申志强¹, 夏军^{1,2}, 吴克刚¹, 胡其高¹, 程盼¹

(1. 国防科技大学军事基础教育学院, 湖南长沙 410072;

2. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073)

摘要:基于改进的 Newmark 组合梁模型和平面应力模型分别建立考虑界面滑移的楔形变截面钢-混凝土组合梁的一维和二维求积元单元。对组合梁的弯曲、自由振动问题进行计算分析, 将两类单元的计算结果进行比较和讨论。结果表明, 对于工程结构中常见的楔形变截面组合梁的弯曲问题, 可以采用自由度较少, 计算成本较低的一维模型; 对于自由振动问题, 一维模型可以较为准确地描述一阶振动模态; 若需对高阶振动模态进行分析, 可选用更为准确的二维模型。

关键词:楔形变截面组合梁; 界面滑移; 弯曲; 自由振动; 求积元

中图分类号: TN95 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2018)01-042-07

Flexural and free vibrational analysis of tapered partially steel-concrete composite beams using the weak form quadrature element method

SHEN Zhiqiang¹, XIA Jun^{1,2}, WU Kegang¹, HU Qigao¹, CHENG Pan¹

(1. College of Military Basic Education, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China;

2. College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Quadrature element formulations for tapered partially steel-concrete composite beams were established based on the Newmark model and the plane stress model respectively. Deformation of tapered partially composite beams under distributed loading and free vibrational problems with two representative boundary conditions were examined. It is shown that for slender and slightly tapered composite beams common in engineering the proposed 1D quadrature element model is effective enough for flexural and fundamental frequency analysis. Moreover, the 2D quadrature element model is capable of providing better results when needed.

Key words: tapered composite beam; interlayer slip; flexural; free vibration; quadrature element method

钢-混凝土组合梁结构充分发挥了钢材、混凝土两种材料的性能优势, 具有强度高、刚度大、自身重量轻以及施工便捷等诸多优点, 在工程结构领域得到了广泛应用^[1]。实践及研究表明, 由于混凝土板与钢梁通过柔性的剪力连接件相互连接, 受荷时二者界面间相对滑移客观存在, 其对钢-混凝土组合梁结构的静、动态力学性能均有较大影响。Newmark 等^[2]较早地建立了界面滑移组合梁的力学模型。随着研究的不断深入, 组合梁在复杂荷载及边界条件下的力学响应日益引起关注, 许多学者开始利用有限元法研究组合梁结构。而由普通 Euler 梁单元推广得到的低阶组合梁单元, 随着剪力连接刚度的增大, 界面滑移的计

算结果严重震荡且无法通过加密网格进行克服, 这种现象称为滑移闭锁 (slip locking)^[3]。为解决该问题, 高阶位移型单元^[3]、力型 (柔度法) 单元^[4-5]、混合型单元^[6-7]相继提出。计算结果表明, 低阶混合型单元仍存在滑移闭锁问题, 而高阶单元、力型 (柔度法) 单元虽能克服滑移闭锁问题, 但存在自由度数量庞大, 计算效率较低的问题。同时, 现有研究多以等截面组合梁为对象, 鲜见变截面组合梁的研究报道。实际上, 工程实践中桥梁结构^[8]及新近提出的分离式结构体系^[9]中存在大量变截面组合梁构件, 有必要建立相应的数学模型并对其进行计算分析。

求积元法 (weak form quadrature element

* 收稿日期: 2016-11-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51508562, 51378294)

作者简介: 申志强 (1981—), 男, 山西太原人, 讲师, 博士, E-mail: zqshen@nudt.edu.cn;

吴克刚 (通信作者), 男, 副教授, 博士研究生, E-mail: wu_kegang@163.com

method)是一种基于变分原理并结合了高效数值积分和微分求积法二者优势的新型高阶数值方法^[10],在处理复杂几何形状、非均匀材料、强几何非线性问题上相比有限元法有独特优势^[11-13]。笔者前期的研究表明,等截面组合梁求积元单元不存在滑移闭锁问题,且计算效率优于高阶有限元^[14]。

本文基于改进的 Newmark 模型和平面应力模型分别建立楔形变截面组合梁一维和二维求积元单元。对其弯曲、自由振动问题进行计算分析,为工程实践中楔形变截面组合梁结构的分析和设计提供计算方法和参考依据。

1 楔形变截面组合梁一维分析模型

1.1 改进的 Newmark 组合梁模型

工程结构中常见的楔形变截面钢-混凝土组合梁如图 1 所示,上层为矩形截面混凝土板;下层为 H 型截面钢梁,上、下翼缘截面尺寸一致,腹板高度沿梁长 L 线性变化,上、下层间采用剪力连接件有效连接。同时建立上、下层梁的空间参考坐标系 $O^t - X^t Y^t Z^t$ 及 $O^b - X^b Y^b Z^b$, X^t 轴为上层梁中性层与纵向对称面的交线, $X^t O^t Y^t$ 平面与上层梁中性层平面重合且原点 O^t 位于上层梁左端截面平面内,下层梁的空间参考坐标系定义与上层梁类似。

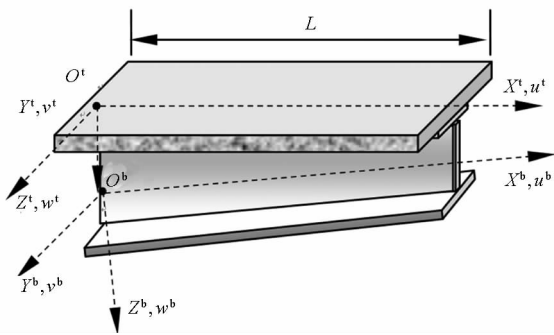


图 1 楔形变截面组合梁示意图
Fig. 1 Tapered composite beam

假设上、下层梁均为 Euler-Bernoulli 梁且允许界面间产生沿上层梁轴向的相对滑移而不允许竖向掀起,图 2 给出了组合梁的位移场。上、下层梁轴线的夹角为 α , u^t, w^t 分别为 X^t, Z^t 向的位移, θ_y^t 为绕 Y^t 轴转角。各量右上标符号 t 对应于上层梁,符号 b 对应于下层梁, u_s 为界面相对滑移量。

基于以上假设,组合梁的位移场可表示为

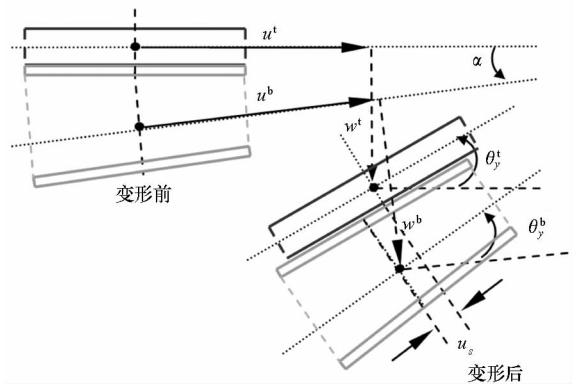


图 2 界面滑移楔形变截面组合梁位移场
Fig. 2 Displacement field for a tapered partially composite beam

$$\begin{cases} \mathbf{d}^t = [u^t + z^t \theta_y^t & 0 & w^t]^T \\ \mathbf{d}^b = [u^b + z^b \theta_y^b & 0 & w^b]^T \end{cases} \quad (1)$$

对于 Euler-Bernoulli 梁

$$\gamma_{xz} = \theta_y + w_{,x} = 0 \Rightarrow \theta_y = -w_{,x} \quad (2)$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{d}^t = [u^t - z^t w_{,x^t}^t & 0 & w^t]^T \\ \mathbf{d}^b = [u^b - z^b w_{,x^b}^b & 0 & w^b]^T \end{cases} \quad (3)$$

式中导数均为对本层梁坐标系求导。

上、下层梁轴向应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_x^t, \boldsymbol{\varepsilon}_x^b$ 分别为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_x^t = u_{,x^t}^t - z^t w_{,x^t x^t}^t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_x^b = u_{,x^b}^b - z^b w_{,x^b x^b}^b \end{cases} \quad (4)$$

为确保上、下层梁界面不发生竖向掀起,上、下层梁在层间界面处的位移应满足

$$w^t = w^b \cos \alpha - (u^b + h^b w_{,x^b}^b) \sin \alpha \quad (5)$$

式中, h 为各层梁中性层至上、下层梁交界面的距离。相应地,界面相对滑移量 u_s 为

$$u_s = w^b \sin \alpha + (u^b + h^b w_{,x^b}^b) \cos \alpha - (u^t - h^t w_{,x^t}^t) \quad (6)$$

定义广义应变向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^t = [u_{,x^t}^t & -w_{,x^t x^t}^t & u_s]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b = [u_{,x^b}^b & -w_{,x^b x^b}^b]^T \end{cases} \quad (7)$$

定义广义应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^t = [N^t & M^t & f_s]^T \\ \boldsymbol{\sigma}^b = [N^b & M^b]^T \end{cases} \quad (8)$$

其中, N^t, N^b, M^t, M^b 分别为上、下层梁内轴力及弯矩, f_s 为剪力连接件单位长度承受之力。

1.2 一维求积元单元

物理域中组合梁一维求积元单元如图 3(a) 所示,相应标准域单元如图 3(b) 所示。

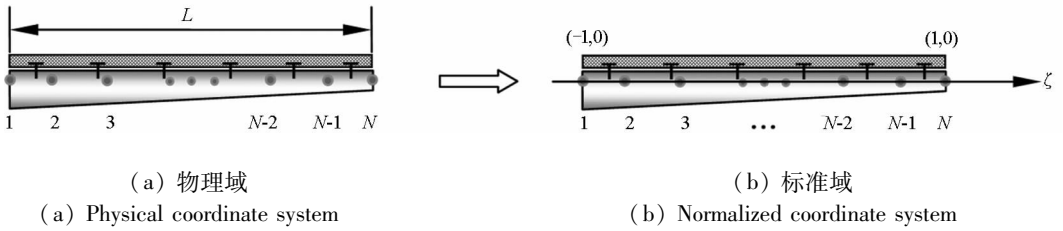


图 3 一维求积元单元几何映射

Fig. 3 Discretization and coordinate systems of 1D quadrature element

单元应变能 $U^{(e)}$ 可表示为

$$U^{(e)} = \int_L \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^t)^T \mathbf{E}^t \boldsymbol{\varepsilon}^t dx + \int_{L \cos \alpha} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \mathbf{E}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b dx \quad (9)$$

式中,

$$\begin{cases} \mathbf{E}^t = \begin{bmatrix} EA^t & 0 & 0 \\ 0 & EI^t & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}^b = \begin{bmatrix} EA^b & 0 \\ 0 & EI^b \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

式中, E 为材料弹性模量, K 为剪力连接刚度, $A^t(A^b)$ 、 $I^t(I^b)$ 分别为截面相对于 $x^t(x^b)$ 轴的零次矩(面积)、二次矩。

根据求积元求解基本步骤, 首先将待求解问题从物理域通过式(11)转换到标准域

$$\xi = \frac{2}{L} x^t - 1 = \frac{2}{L \cos \alpha} x^b - 1, \xi \in [-1, 1] \quad (11)$$

并将 $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 中变量对相应物理域的导数转化到标准域。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^t = [u_{,x^t}^t & -w_{,x^t x^t}^t & u_s^t]^T = \mathbf{D}_{3 \times 9}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b = [u_{,x^b}^b & -w_{,x^b x^b}^b]^T = \mathbf{D}_{2 \times 9}^b \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (12)$$

其中, 标准域中的应变向量定义为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [u^t \ u_{,\xi}^t \ u^b \ u_{,\xi}^b \ u_{,\xi\xi}^b \ w^b \ w_{,\xi}^b \ w_{,\xi\xi}^b \ w_{,\xi\xi\xi}^b]^T \quad (13)$$

其中, \mathbf{D}^t 、 \mathbf{D}^b 可据式(11)求出。利用 Lobatto 数值积分^[15]计算式(9), 则

$$U^{(e)} = \frac{L}{4} \sum_{i=1}^N H_i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T [(\mathbf{D}^t)^T \mathbf{E}^t \mathbf{D}^t + (\mathbf{D}^b)^T \mathbf{E}^b \mathbf{D}^b \cos \alpha]_i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \quad (14)$$

其中, N 表示积分点数, 右侧下标 i 表示该变量在积分点处的值, H_i 为相应积分点对应的权系数。

一维组合梁单元物理域整体坐标系下的位移向量为

$$\mathbf{d}^{(e)} = [\theta_1^b \ \cdots \ u_i^t \ u_i^b \ w_i^b \ \cdots \ \theta_N^b]^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

各分量右下标表示其所属的积分点, 与标准域中

的位移向量

$$\bar{\mathbf{d}}^{(e)} = [(w_{,\xi}^b)_1 \ \cdots \ u_i^t \ u_i^b \ w_i^b \ \cdots \ (w_{,\xi}^b)_N]^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (16)$$

通过式

$$\bar{\mathbf{d}}^{(e)} = \mathbf{T} \mathbf{d}^{(e)} \quad (17)$$

相互联系, 其中转换矩阵

$$\mathbf{T} = \text{diag}(-L \cos \alpha / 2 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad -L \cos \alpha / 2) \quad (18)$$

结合微分求积法则和广义微分求积法则^[16], 将式(14)中所含积分点处的导数表示为积分点处基本自由度的线性加权代数, 则

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{d}}^{(e)} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \delta_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & C_{ij}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ij}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ij}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_{ij} & \cdots & 0 \\ G_{i1}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 & G_{i(j+1)}^{(1)} & \cdots & G_{i(N+2)}^{(1)} \\ G_{i1}^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & G_{i(j+1)}^{(2)} & \cdots & G_{i(N+2)}^{(2)} \\ G_{i1}^{(3)} & \cdots & 0 & 0 & G_{i(j+1)}^{(3)} & \cdots & G_{i(N+2)}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N \quad (20)$$

其中, $C_{ij}^{(m)}$ 、 $G_{ij}^{(m)}$ 分别为 m 阶微分求积及广义微分求积系数^[16], δ_{ij} 为 Kronecker 符号。则式(14)可进一步表示为

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{d}}^{(e)T} \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\mathbf{d}}^{(e)} \quad (21)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \sum_{i=1}^N H_i \mathbf{B}_i^T [(\mathbf{D}^t)^T \mathbf{E}^t \mathbf{D}^t + (\mathbf{D}^b)^T \mathbf{E}^b \mathbf{D}^b \cos \alpha]_i \mathbf{B}_i \frac{L}{2} \quad (22)$$

类似地, 单元的外力势能 $V^{(e)}$ 、动能 $T^{(e)}$ 均采用相同的步骤离散。在单元水平运用 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^{(e)} - U^{(e)} - V^{(e)}) dt = 0 \quad (23)$$

并将 $U^{(e)}$ 、 $V^{(e)}$ 、 $T^{(e)}$ 代入式(23),可得

$$\bar{M}^{(e)} \ddot{\bar{d}}^{(e)} + \bar{K}^{(e)} \bar{d}^{(e)} = \bar{F}^{(e)} \quad (24)$$

相应地,物理坐标系下的单元运动方程

$$M^{(e)} \ddot{d}^{(e)} + K^{(e)} d^{(e)} = F^{(e)} \quad (25)$$

可通过转换矩阵 T 得到。

如有必要,可进一步进行单元拼接,从而形成总体刚度方程。对于弯曲问题,式(25)转化为线性代数方程组。对于自由振动问题,式(25)转化为广义代数特征值问题。进一步引入问题的边界条件即可得问题的解。

2 变截面组合梁二维分析模型

2.1 平面应力模型

将变截面组合梁的弯曲与自由振动作为平面应力问题求解,如图 4 所示,将上层混凝土板(区域 1)、H 型钢梁上翼缘(区域 2)、腹板(区域 3)及下翼缘(区域 4)视为平面应力问题求解区域。

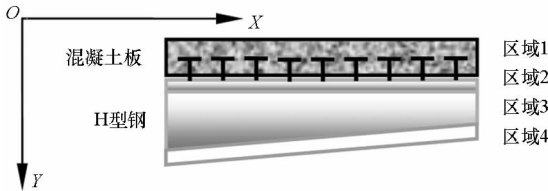


图 4 楔形变截面组合梁平面应力模型

Fig. 4 Plane stress model of tapered composite beam

假设该平面厚度为 1,按照刚度及质量相等的原则将变截面组合梁各部分的材料参数作等效处理并在组合梁各部分分别建立平面应力问题的控制微分方程,则

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{(i)} = \frac{1}{E_i} (\sigma_x^{(i)} - \nu_i \sigma_y^{(i)}) \\ \varepsilon_y^{(i)} = \frac{1}{E_i} (\sigma_y^{(i)} - \nu_i \sigma_x^{(i)}) \\ \gamma_{xy}^{(i)} = \frac{1}{G_i} \tau_{xy}^{(i)} \end{cases} \quad (26)$$

式中,上角标 i 表示相关量所属组合梁的不同区域, G 、 ν 分别为剪切模量及泊松比。

考虑界面滑移,区域 1 与区域 2 在界面处有相同的 Y 向位移 v ,独立的 X 向位移 u ;区域 2 与区域 3、区域 3 与区域 4 之间界面是完全连接的,相关区域在界面处有相同的 X 向位移 u 及 Y 向位移 v 。

2.2 二维求积元单元

二维求积元单元物理域到标准域的单元几何映射如图 5 所示,二者可通过线性四边形区域变换实现。

类似地,按照求积元方法的求解步骤,分别对单

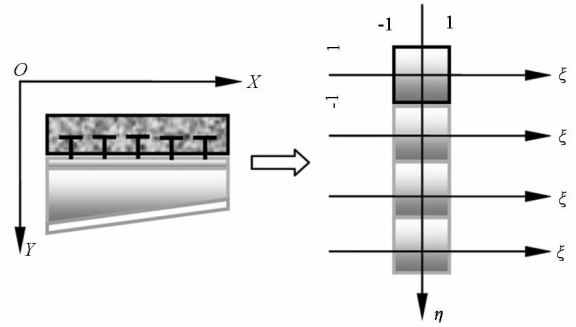


图 5 平面应力求积元单元几何映射

Fig. 5 Coordinate systems of 2D quadrature element

元的应变能 $U^{(e)}$ 、外力势能 $V^{(e)}$ 、动能 $T^{(e)}$ 同时在 ξ 、 η 两个方向进行离散,并在单元水平上运用 Hamilton 原理,即可得到二维求积元单元的运动方程。

有关求积元方法求解常截面组合梁及二维弹性问题的详细步骤可参阅文献[10,14]。为进行比较,同时建立了不存在“滑移闭锁”问题的 16 自由度^[3]一维有限元变截面组合梁单元。

3 数值计算分析

考虑工程结构中一典型单跨变截面组合梁,其最小截面尺寸(右端截面)如图 6 所示。

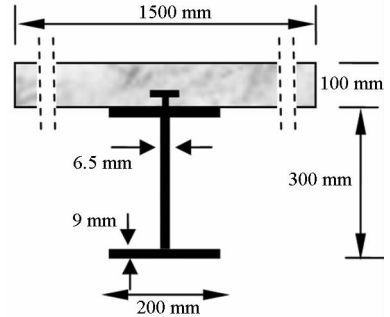


图 6 楔形变截面组合梁右端截面尺寸

Fig. 6 Tapered composite beam cross section of right edge

该组合梁上层材料为混凝土,弹性模量 30 GPa,密度 2500 kg/m³;下层为 H 型钢,弹性模量 210 GPa,密度 7850 kg/m³。

首先,对求积元法与有限元法的计算效率进行比较。结果表明,达到相同的计算精度时,求积元法的求解自由度数目约为有限元法的一半,其计算效率优于有限元。而后,采用求积元法对楔形变截面组合梁的弯曲和自由振动问题进行分析讨论。为保证计算精度,一维求积元模型,简记为 1D QEM,沿梁轴向(X 向)划分 1 个求积元单元,采用 17 个积分点;二维求积元模型,简记为 2D QEM,每个区域划分 1 个求积元,沿梁轴向(X 向)采用 17 个积分点,区域 1~4 横向(Y 向)分别采用 5、3、9、3 个积分点。

3.1 弯曲问题

考虑工程实际,分别对简支边界条件(Simply supported end - Simply supported end, SS)和左端固支、右端自由边界条件(Clamped end - Free end, CF)下组合梁受均布荷载 q_0 作用的弯曲问题进行分析。

对于 SS 边界条件($q_0 = 30 \text{ kN/m}$),计算结果表明,随着 α 的增大,组合梁挠度及界面滑移均显著减小。对于组合梁的挠度,二维模型的计算结果均大于一维模型,当剪力连接刚度较大时,二者差幅较大,且随夹角 α 的增大而提高;对于界面滑移,在绝大部分情况下,一维模型的计算结果与二维模型吻合良好,仅当剪力连接刚度和 α 均较大时,在组合梁左端靠近支座处,一维模型的计算结果略大于二维模型。图 7、图 8 分别给出了 SS 边界条件下当 $L = 4 \text{ m}$, $K = 500 \text{ MPa}$ 时, w^b 及 u_s 沿梁长的分布。

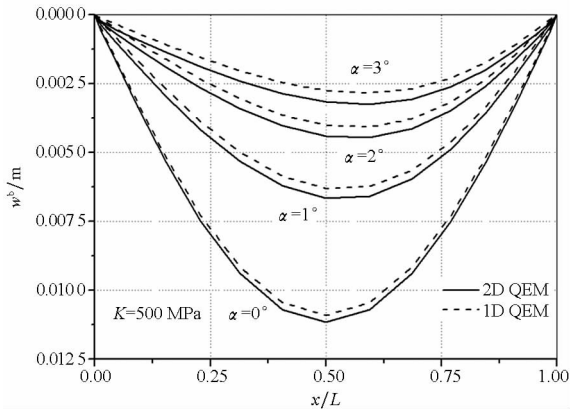


图 7 挠度沿梁长的分布

Fig. 7 Deflection distribution of the composite beam

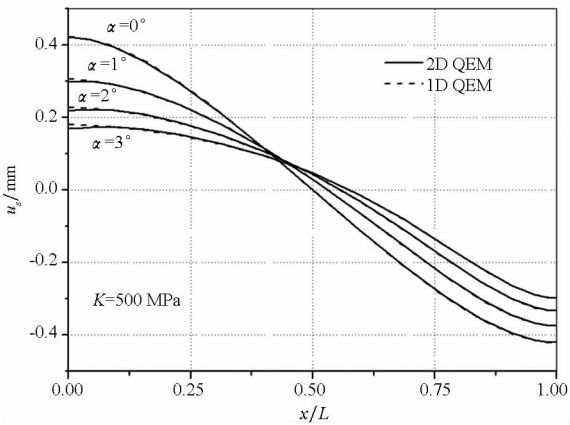


图 8 界面滑移沿梁长的分布

Fig. 8 Interlayer slip distribution of the composite beam

表 1 给出了 SS 边界条件下,组合梁跨中挠度的相对误差为

$$(1D \text{ QEM} - 2D \text{ QEM}) / 2D \text{ QEM} \% \quad (27)$$

由表 1 可见,相对误差随 α 及 K 的增大而增大,随跨度 L 的增大而减小。当跨度较小时($L =$

2 m),一维模型与二维模型相对误差均超过了 10%,但应注意到此时跨中挠度的计算值很小(不超过 1 mm)。当跨度较大时($L = 6 \text{ m}$),一维模型与二维模型的相对误差均小于 10%。

表 1 组合梁跨中挠度相对误差(SS)

Tab. 1 Relative error of mid-span deflection (SS) %

K = 50 MPa				
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	-7.32	-11.1	-15.5	-20.1
L = 4 m	-1.37	-3.45	-5.99	-8.82
L = 6 m	-0.58	-2.08	-3.90	-5.99
K = 500 MPa				
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	-9.28	-13.9	-18.9	-24.1
L = 4 m	-2.29	-5.37	-8.86	-12.6
L = 6 m	-1.03	-3.30	-5.97	-8.98

对于 CF 边界条件($q_0 = 20 \text{ kN/m}$),一维模型的计算结果与二维模型吻合良好。图 9、图 10 分别给出了当 $L = 4 \text{ m}$, $K = 500 \text{ MPa}$ 时, w^b 及 u_s 沿梁长的分布。

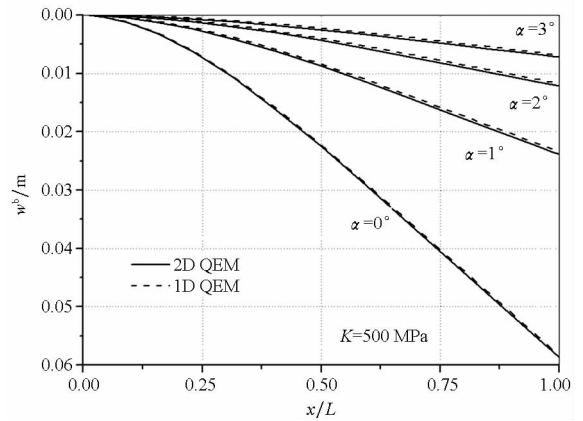


图 9 挠度沿梁长的分布

Fig. 9 Deflection distribution of the composite beam

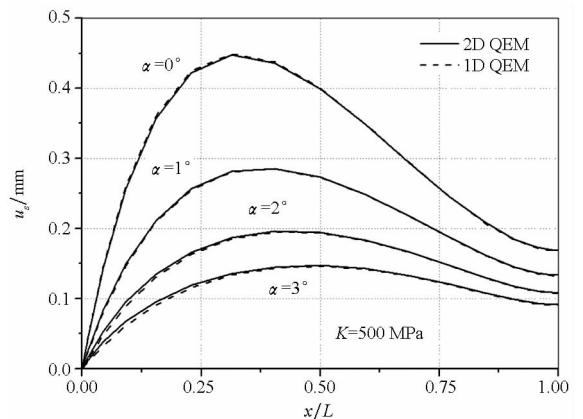


图 10 界面滑移沿梁长的分布

Fig. 10 Interlayer slip distribution of the composite beam

表2给出了CF边界条件下,组合梁右端挠度的相对误差。当跨度较小时($L=2\text{ m}$),一维模型与二维模型相对误差均不超过10%。当跨度较大时($L=6\text{ m}$),相对误差均小于5%。总体而言,CF边界条件下一维模型的计算结果与二维模型更加接近。

表2 组合梁右端挠度相对误差(CF)

Tab.2 Relative error of right edge deflection (CF) %

	K = 50 MPa			
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	-1.09	-2.84	-4.62	-6.33
L = 4 m	-0.34	-1.43	-2.43	-3.52
L = 6 m	-0.16	-0.96	-1.74	-2.68
	K = 500 MPa			
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	-1.95	-4.12	-6.24	-8.25
L = 4 m	-0.63	-2.01	-3.32	-4.70
L = 6 m	-0.26	-1.22	-2.21	-3.37

综上可知,随着组合梁跨度 L 的减小和 α 的增大,一维模型与二维模型计算结果的差异愈来愈明显。这是由于随着组合梁跨度 L 的减小和 α 的增大,宏观上增大了组合梁的高跨比,结构在弯曲平面内的剪切变形对于挠度的影响越来越大,从而造成忽略剪切变形的一维模型与二维模型计算结果的差异不断增大。同时,一维模型与二维模型对于CF边界条件的施加方式较为一致,而对于SS边界条件的施加则存在不同的简化,这是造成前者计算结果误差小于后者的一个原因。

3.2 自由振动问题

分别对SS边界条件、CF边界条件下变截面组合梁自由振动问题进行计算分析。计算结果表明,各阶自振频率均随 α 的增大而增大。

表3、表4分别给出了SS边界条件、CF边界条件下,跨度 L ,夹角 α 及剪力连接刚度 K 变化时组合梁前三阶自振频率计算的相对误差。

表3 组合梁前三阶自振频率相对误差(SS)

Tab.3 Relative error of the first 3 order free vibrational frequencies (SS)

		%							
		K = 50 MPa				K = 500 MPa			
		$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	1 st	5.80	12.63	17.55	17.28	6.46	11.30	17.25	24.12
	2 nd	0.52	-2.79	-3.76	-0.001	14.38	16.97	18.21	18.98
	3 rd	15.55	23.77	34.10	46.40	13.94	22.59	34.22	48.27
L = 4 m	1 st	0.94	3.11	6.24	10.28	1.67	4.64	8.45	13.02
	2 nd	5.34	10.67	8.79	7.15	4.83	13.52	24.49	35.99
	3 rd	0.54	0.38	6.65	13.09	15.53	18.18	17.32	17.23
L = 6 m	1 st	0.43	2.03	4.38	7.47	0.79	3.07	6.13	9.92
	2 nd	1.39	6.49	15.27	25.80	2.25	8.44	16.33	25.68
	3 rd	9.30	7.06	2.42	-2.78	4.60	21.46	32.20	31.07

表4 组合梁前三阶自振频率相对误差(CF)

Tab.4 Relative error of the first 3 order free vibrational frequencies (CF)

		%							
		K = 50 MPa				K = 500 MPa			
		$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$
L = 2 m	1 st	0.64	1.70	2.85	4.03	1.13	2.46	3.86	5.27
	2 nd	3.54	7.86	12.83	17.92	4.16	8.81	14.04	19.34
	3 rd	7.33	14.46	22.74	31.35	7.87	15.18	23.57	32.24
L = 4 m	1 st	0.20	0.86	1.52	2.26	0.37	1.21	2.06	2.99
	2 nd	1.04	3.95	6.93	9.87	1.62	5.31	8.93	12.42
	3 rd	2.31	8.02	14.11	20.08	2.94	9.26	15.79	22.12
L = 6 m	1 st	0.09	0.58	1.10	1.72	0.16	0.75	1.39	2.15
	2 nd	0.51	2.64	4.72	6.85	0.93	3.94	6.75	9.56
	3 rd	1.12	5.46	9.82	14.18	1.69	6.97	12.05	17.03

由表 3 可见,对于基频,一维模型的计算结果均大于二维模型,二者的相对误差随 α 及 K 的增大而增大,随跨度 L 的增大而减小。当跨度较小 ($L=2\text{ m}$) 时,楔形变截面组合梁一维模型与二维模型计算结果的相对误差均超过了 10%。当跨度较大时 ($L=6\text{ m}$),一维模型与二维模型计算结果的相对误差均小于 10%。而对于二阶及三阶自振频率,以上规律并不明显,且一维模型与二维模型计算结果的相对误差较大。

由表 4 可见,一维模型的计算结果均大于二维模型,二者的相对误差随 α 及 K 的增大而增大,随跨度 L 的增大而减小,且随振动阶数的升高而增大。对于基频,一维模型与二维模型计算结果的相对误差均未超过 6%;而对于二阶及三阶自振频率,相对误差较大。

以上结果表明,一维模型能够较为准确地描述以横向振动模态为主的基频,故其与二维模型计算结果的差异相对较小且误差变化具有规律性。随着振动模态阶数的升高,轴向振动模态及更为复杂的轴向与横向耦合振动(剪切变形)模态逐步产生,使一维模型与二维模型相对误差逐渐增大。同时,误差变化的规律性逐步减弱。

4 结论

考虑楔形变截面钢-混凝土组合梁结构分析和设计的实际需求,基于改进的 Newmark 模型和平面应力模型分别建立了楔形变截面组合梁的一维和二维求积元单元。对其弯曲、自由振动问题进行了计算分析,将两种单元的计算结果进行了比较和讨论。主要结论如下:

1)随着夹角 α 的增大,变截面组合梁的挠度和界面滑移显著减小;自振频率逐渐增大。

2)对于工程结构中常见楔形变截面组合梁 ($L \geq 4\text{ m}, 0^\circ < \alpha \leq 3^\circ$) 的弯曲问题,可以采用自由度较少,计算成本较低的一维模型;对于自由振动问题,一维模型可以较为准确地描述一阶振动模态;若需对高阶振动模态进行分析,可选用更为精确的二维模型。

参考文献 (References)

[1] 聂建国,刘明,叶列平. 钢-混凝土组合结构 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.
NIE Jianguo, LIU Ming, YE Lieping. Steel-concrete

composite structures [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese)

[2] Newmark N M, Siess C D, Viest I M. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction [J]. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 1951, 9(1): 75-92.

[3] Dall'Asta A, Zona A. Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach [J]. Computers & Structures, 2002, 80(27/28/29/30): 2217-2228.

[4] Salari M R, Spacone E, Shing P B, et al. Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors[J]. Journal of Structural Engineering, 1998, 124(10): 1148-1158.

[5] Salari M R, Spacone E. Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip [J]. Engineering Structures, 2001, 23(7): 815-826.

[6] Dall'Asta A, Zona A. Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams [J]. Computers & Structures, 2004, 82(23/24/25/26): 2117-2130.

[7] Dall'Asta A, Zona A. Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40(4): 425-448.

[8] Uy B, Liew J Y R. Composite steel-concrete structures[M]//Chen W F, Liew J Y R. The civil engineering handbook. 2nd. USA: CRC PRESS, 2002.

[9] 宋佳彪. 基于变截面组合梁的分离式结构体系性能研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
SONG Jiabiao. Research on performance of separate structural system based on variable cross-section composite beams [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011. (in Chinese)

[10] Zhong H Z, Yu T. Flexural vibration analysis of an eccentric annular Mindlin plate [J]. Archive of Applied Mechanics, 2007, 77(4): 185-195.

[11] Zhong H Z, Gao M. Quadrature element analysis of planar frameworks [J]. Archive of Applied Mechanics, 2010, 80(12): 1391-1405.

[12] Xiao N J, Zhong H Z. Nonlinear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, 47(5): 481-488.

[13] Yuan S, Zhong H Z. Consolidation analysis of non-homogeneous soil by the weak form quadrature element method[J]. Computers & Geotechnics, 2014, 62: 1-10.

[14] Shen Z Q, Zhong H Z. Static and vibrational analysis of partially composite beams using the weak-form quadrature element method [EB/OL]. [2016-08-15]. <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/974023/>.

[15] Davis P I, Rabinowitz P. Methods of numerical integration[M]. 2nd ed. Orlando, USA: Academic Press, 1984.

[16] Shu C. Differential quadrature and its application in engineering[M]. London, UK: Springer-Verlag, 2000.