

数据同化系统中的集合时间局地化鲁棒滤波方法*

摆玉龙,张转花,马明芳

(西北师范大学物理与电子工程学院,甘肃兰州 730070)

摘要:针对传统的卡尔曼滤波方法对不确定因素不具备鲁棒性问题,在集合鲁棒滤波的基础上,提出一种从观测角度构建优化数据同化的方法,称之为放大观测协方差矩阵的集合时间局地化鲁棒滤波,并推导了新方法的算法准则和递归公式。利用非线性系统 Lorenz-96 模型,基于性能水平系数、驱动参数、观测数目和集合数目变化的条件,对新方法和集合卡尔曼滤波方法的鲁棒性和同化精度进行比较。结果表明:集合卡尔曼滤波方法的均方根误差大于时间局地化鲁棒滤波的;在观测数或集合数较少的情况下,集合卡尔曼滤波出现了滤波发散问题,而鲁棒滤波的均方根误差波动较小;相较于传统的集合卡尔曼滤波算法,观测角度构建的时间局地化的 H_{∞} 滤波方法对系统参数的变化更具鲁棒性,滤波精度更高。

关键词:数据同化;集合鲁棒滤波;观测协方差;Lorenz-96 模型

中图分类号:TP274 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)01-114-07

Ensemble time-local robust filtering method in data assimilation system

BAI Yulong, ZHANG Zhuanhua, MA Mingfang

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The traditional Kalman filter algorithm is not robust with uncertain parameters. In view of this and based on the ensemble robust filters, the optimal method of data assimilation constructed from observations, which was referred to as the ensemble time-local robust filter of inflating the observational covariance matrices, was presented, and the rule of the algorithm and the inference of the formula of the approach presented were given. The approach presented was compared with the ensemble Kalman filter method on the robustness and the assimilation accuracy using the strongly nonlinear Lorenz-96 model and on the basis of the changeable condition of the performance level parameters, the force parameters, and the size of observations and ensemble. The results suggest that: the root mean square errors of the ensemble Kalman filter method are much larger than those of the time-local robust filter; the ensemble Kalman filter produces filter divergence with a relatively small observation or ensemble size, while the root mean square error of the robust filter has slightly change; compared with the traditional ensemble Kalman filter algorithm, the time-local H_{∞} filter approaches using the observation inflation is more robust on the changes of system parameters, and improve the accuracy of filtering.

Key words: data assimilation; ensemble robust filtering; observation covariance; Lorenz-96 model

数据同化是在模型(大气、海洋和陆面模型等)的动力框架内,通过同化方法融合不同来源和不同分辨率的直接和间接观测,将过程模型和各种观测算子集成为不断地依靠观测而自动调整模型轨迹,并且减少误差的预报系统^[1]。数据同化方法主要分为变分同化方法和顺序同化方法等^[2]。顺序同化方法是一种在线估计策略,能够在获得观测的时刻对资料进行同化,同时最优估计和更新模式状态量。卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)或集合卡尔曼滤波(Ensemble Kalman Filter, EnKF)的变换形式——集合转换卡尔曼滤

波(Ensemble Transform Kalman Filter, ETKF)是基本的顺序数据同化算法。对于线性随机系统, KF 可以看作是最小化估计误差方差的最优估计器。KF 相比于传统的最大似然方法在均方误差方面具有明显的性能优势^[3]。自适应的 KF 采用动态调整状态预报在滤波估计结果中权重的策略,使滤波估计准确^[4]。但是, KF 类方法需要假设已知模型和观测误差的统计特性。然而,在实际的陆面过程和环境问题中,很多误差的统计特性并不满足零均值高斯分布的假设条件。例如,在陆面模型中,由于降水和传送机制未知,模型误

* 收稿日期:2016-05-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41461078, 41061038)

作者简介:摆玉龙(1973—),男,甘肃会宁人,教授,博士,博士生导师, E-mail: yulongbai@gmail.com

差不满足零均值的要求,模型和观测的误差是均值有偏的。

同时,KF类是遵循贝叶斯准则的贝叶斯滤波,如果在模型模拟中忽略了即时的扰动,例如人为扰动,状态预报会有更大的偏差,并且扰动较大时,对于需要依赖人为输入的未知时刻会产生不稳定的、不可预测的偏差误差^[5]。KF的另一种限制是获得量化和测量^[6]模型误差的统计特性具有一定的挑战,正如Reichle等^[7]指出“任何需要提供模型误差的数据同化方法在业务化应用中都面临着如何确定真实模型误差协方差矩阵的挑战”。

数据同化最终的目的是“平衡”不同来源的信息——例如模型输出和系统观测^[8]。有效的数据同化方法是以对不确定性的真实描述为基础^[9],涉及误差本质中数据同化技术的鲁棒性问题。大量文献研究了KF的鲁棒性问题,为了解决有界误差,Drecoart等^[9]考虑了“Separate bias”KF方法,其中使用了两种KF方案处理状态变量和有界变量。类似其他的KF方法,这种方法也需要提前已知随机误差的协方差矩阵。

鲁棒滤波的目的并不是基于贝叶斯理论寻求最优估计,而是在同化中强调估计的鲁棒性,对可能的不确定性有更好的容忍度。 H_∞ 滤波(H_∞ Filter, HF)属于鲁棒滤波^[10]的一种,它利用鲁棒策略即最小最大准则更新背景信息。在同化中, HF不需要假定系统的统计特性,可以接受不完整系统的信息。对于不完美模型和不确定性变化, HF估计误差的增长率有界,而KF并不能保证其估计误差在初始条件误差、模型误差和观测误差变化时有界。为了解决顺序数据同化问题,引入了HF的变化形式^[11]——时间局地化的 H_∞ 滤波(Time-Local H_∞ Filter, TLHF),避免了HF中的全窗限制。

类似于EnKF方法,Luo和Hoteit^[11]将集合的思想应用到TLHF中,形成集合时间局地化的 H_∞ 滤波(Ensemble Time-Local H_∞ Filter, EnTLHF)。不同于从残差逼近的角度构建的协方差放大方法^[12],Luo和Hoteit基于观测理论引出协方差放大方法放大观测协方差矩阵的集合时间局地化 H_∞ 滤波(Ensemble Time-Local H_∞ Filter of Inflating the observational covariance matrices, EnTLHF-IR)。然而,其只给定了分析解,没有确切给定算法的运行步骤及算法的数值解。Triantafyllou等^[13]引入鲁棒理论解决生态系统发生强烈变化时对滤波精度和稳定性影响的问题。

Bai等^[14]基于集合时间局地化的 H_∞ ,利用对转移矩阵的调整来间接影响分析协方差矩阵的策略,相较于直接对分析协方差矩阵的处理,减少了算法的复杂度。以上两种方法都是从分析协方差角度映射滤波的鲁棒性能。Nan等^[15]利用集合 H_∞ 滤波的方法,解决同化中观测误差信息未知或误差统计特性不准确的问题。对于传统的数据同化方法,在集合或观测数目较少时,协方差矩阵的估计会不准确,甚至出现滤波发散问题。利用观测构建的协方差放大方法,借助其自身的鲁棒性能,对不确定性问题具有优于传统滤波方法的度量。因此,本文利用观测构建的协方差放大方法,在性能水平系数、来自驱动参数的模型误差、观测数目和状态变量的集合数变化的条件下,对传统的滤波算法、鲁棒策略的稳定性和滤波精度进行对比分析。

1 同化方法

1.1 集合转换卡尔曼滤波

ETKF的滤波过程:

$$\bar{x}_i^a = \bar{x}_i^b + \mathbf{K}_i(y_i - \mathbf{H}_i \bar{x}_i^b) \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_i^a = \mathbf{X}_i^b \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{X}_i^b (\mathbf{X}_i^b)^T [\mathbf{X}_i^b (\mathbf{X}_i^b)^T + \mathbf{R}_i]^{-1} \quad (3)$$

其中: \bar{x}_i^a 是分析均值,背景和观测均值分别是 $\bar{x}_i^b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}^b$ 和 $\bar{y}_i^b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{i,j}^b$, n 是集合数的大小; \mathbf{K}_i 是卡尔曼增益, \mathbf{H}_i 是观测算子, \mathbf{R}_i 是量测噪声协方差; \mathbf{T}_i 是 $n \times (n-1)$ 的转移矩阵,由 $[\mathbf{I} + (\mathbf{X}_i^b)^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{X}_i^b]^{-1}$ 的平方根矩阵的特征值和特征向量确定^[16]; $n \times (n-1)$ 的中心矩阵 \mathbf{U} 满足 $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_{n-1}$, $\mathbf{U} \mathbf{1}_n^T = \mathbf{0}^{[16-17]}$, $\mathbf{1}_n$ 是元素为1的 n 维向量; \mathbf{X}_i^b 和 \mathbf{X}_i^a 分别是背景和协方差的平方根矩阵; \mathbf{X}_i^b 称为映射矩阵^[18]。

分析集合:

$$x_{i,j}^a = \bar{x}_i^a + \sqrt{n-1} (X_i^a)_{j,j}, j=1, \dots, n \quad (4)$$

式中, $(X_i^a)_{j,j}$ 是 X_i^a 的第 j 列。

1.2 H_∞ 滤波

鲁棒滤波是将鲁棒控制设计中引入的性能指标 H_∞ 范数应用于滤波,以解决系统中存在的各种不确定性问题^[11],HF^[10]的目的是提供滤波的鲁棒性,但估计的精度不高。

为了体现鲁棒性能, HF估计误差的总能量 $\sum_{i=0}^N \|x_i - x_i^a\|_{S_i}^2$ 须满足不等式(5),其中 γ 是性能水平,即:

$$\sum_{i=0}^N \|x_i - x_i^a\|_{S_i}^2 \leq \frac{1}{\gamma} (\|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Delta_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|u_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2) \quad (5)$$

在方程(5)中, u_i 和 v_i 分别表示过程噪声和量测噪声。 Δ_0, Q_i, R_i 表示不确定的权重矩阵(简称:不确定矩阵),而相应的逆阵 $\Delta_0^{-1}, Q_i^{-1}, R_i^{-1}$ 称为信息矩阵。不确定矩阵 Δ_0, Q_i, R_i 可以由设计者自由定义,权重矩阵 S_i 也由设计者选择^[11]。存在 γ^* 使得 γ 满足方程(6):

$$\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\gamma^*} \equiv \inf_{\{x_i^a\}} \sup_{x_0, \{u_i\}, \{v_i\}} J_x^{\text{HF}}, i \leq N \quad (6)$$

式中,

$$J_x^{\text{HF}} = \frac{\sum_{i=0}^N \|x_i - x_i^a\|_{S_i}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Delta_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|u_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2}$$

最优的 HF 是 $\gamma^* = \gamma^{[11]}$ 。在实际中,确定方程式(6)的精确值比较困难, γ^* 不仅依赖初始条件、动力系统和观测系统,而且与同化时间窗口 N 有关。因此,更加可行的方法是选择 γ 使其满足 $\frac{1}{\gamma^*} < \frac{1}{\gamma} \leq +\infty$, 保证存在 $\{x_i^a\}$ 满足不等式(5)^[10]。

目标限制:

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (\Delta_i^b)^{-1} + (H_i)^T (R_i)^{-1} H_i - \gamma S_i \geq \mathbf{0} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{0}$ 是以状态变量数目为维度的零方阵, Δ_i 类似于 KF 的协方差矩阵,“ \geq ”意味着 $(\Delta_i^a)^{-1}$ 是半正定矩阵。

信息矩阵:

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (P_i^a)^{-1} - \gamma S_i < (P_i^a)^{-1} \quad (8)$$

式中, P_i^a 表示 KF 的分析协方差矩阵。如果 $\gamma > 0$, 则 $-\gamma S_i \leq \mathbf{0}$, 在相同的背景不确定矩阵 Δ_i^b 条件下, HF 的分析不确定性矩阵 Δ_i^a 大于 KF 的分析协方差 P_i^a , HF 更具保守性。更新背景值到分析值时, HF 给观测 y_i 的权重高于 KF。未知来源的不确定性导致背景不可靠时,这种算法的性能更优^[19]。

1.3 时间局地化的 H_∞ 滤波

基于确定条件,对于顺序数据同化,在同化窗口 $[0, N]$ 内 HF 满足不等式(7),得到 $\{x_i^a\}$ 。但当同化步长 N 增加时,也许并不满足半正定的限制。下面介绍 HF 的变化形式 TLHF,利用局地化的目标函数,调整局地化的性能水平 γ_i , 解决每步同化循环的局地化限制。

TLHF 的局地化目标函数

$$J_{x,i}^{\text{HF}} = \frac{\|x_i - x_i^a\|_{S_i}^2}{\|x_i - x_i^b\|_{(\Delta_i^b)^{-1}}^2 + \|u_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2} \quad (9)$$

反映了变量 x_i, u_i, v_i 和 x_i^a 在每一次同化时目标函数 $J_{x,i}^{\text{HF}}$ 形式。

对于所有的 $\gamma_i (0 \leq i \leq N)$,

$$\sum_{i=0}^N \|x_i - x_i^a\|_{S_i}^2 \leq \sum_{i=0}^N \frac{1}{\gamma_i} (\|x_i - x_i^b\|_{(\Delta_i^b)^{-1}}^2 + \|u_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2) \leq \max_i \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \right\} \left(\sum_{i=0}^N \|x_i - x_i^b\|_{(\Delta_i^b)^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|u_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2 \right) \quad (10)$$

从式(10)看出,除了 $\gamma_i = 0$ 的 i 点,估计误差总能量的增长率有界。

下面对 TLHF 的预报和滤波过程的推理等同于 Simon^[8]。

预报方程:

$$x_i^b = M_{i,i-1} x_{i-1}^a \quad (11)$$

$$\Delta_i^b = M_{i,i-1} \Delta_{i-1}^a M_{i,i-1}^T + Q_i \quad (12)$$

滤波方程:

$$x_i^a = x_i^b + G_i (y_i - H_i x_i^b) \quad (13)$$

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (\Delta_i^b)^{-1} + (H_i)^T (R_i)^{-1} H_i - \gamma_i S_i \quad (14)$$

$$G_i = \Delta_i^a (H_i)^T (R_i)^{-1} \quad (15)$$

目标限制:

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (\Delta_i^b)^{-1} + (H_i)^T (R_i)^{-1} H_i - \gamma_i S_i \geq \mathbf{0} \quad (16)$$

其中, $M_{i,i-1}$ 是状态转移矩阵, G_i 是增益矩阵,类似于 KF 增益 K_i 。因此,在没有改变其他条件的情况下,与 HF 相比较, TLHF 仅仅用性能水平的局地化 $\gamma_i (i = 1, \dots, N)$ 代替了 γ 。

2 EnTLHF-IR

类似于 EnKF 方法,将集合的思想运用于 TLHF,形成 EnTLHF,提高滤波的鲁棒性和滤波的精度^[11]。

$$x_i^b = \{x_{i,j}^b; x_{i,j}^b = M_{i,i-1} (x_{i-1,j}^a), j = 1, \dots, n\}$$

是 i 时刻的 n 个背景集合成员,是 $i-1$ 时刻分析集合 $x_{i-1}^a = \{x_{i-1,j}^a, j = 1, \dots, n\}$ 的预报,转移算子 $M_{i,i-1}$ 可能是非线性的。

EnTLHF 的预报过程:

$$x_i^b = \text{mean}(x_i^b) \quad (17)$$

$$\Delta_i^b = Cov(x_i^b) + Q_i \quad (18)$$

其中, \bar{x}_i^b 和 Δ_i^b 表示背景的估计和相对应的不确定矩阵。

EnTLHF 的滤波过程:

$$[P_i^a, K_i] = ETKF(X_i^b, Q_i, H_i) \quad (19)$$

$$G_i = (I_m - \gamma_i P_i^a S_i)^{-1} K_i \quad (20)$$

$$\bar{x}_i^a = \bar{x}_i^b + G_i [y_i - H_i(\bar{x}_i^b)] \quad (21)$$

$$\Delta_i^a = (I_m - \gamma_i P_i^a S_i)^{-1} P_i^a \quad (22)$$

目标限制:

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (P_i^a)^{-1} - \gamma_i S_i \geq 0 \quad (23)$$

根据方程(23), 令 $\gamma_i S_i = c(H_i)^T (R_i)^{-1} H_i$, $0 < c \leq 1$, c 表示性能水平系数 (Performance Level Coefficient, PLC), 得出:

$$S_i = \frac{c}{\gamma_i} (H_i)^T (R_i)^{-1} H_i \quad (24)$$

$$(\Delta_i^a)^{-1} = (\Delta_i^b)^{-1} + (1 - c)(H_i)^T (R_i)^{-1} H_i \quad (25)$$

标记这种方法为 EnTLHF-IR (简称:IR)。

方程(25)的协方差放大方法是基于观测构建的, 等同于分析协方差放大技术^[20]。

利用均方根误差 (Root Mean Squared Errors, RMSE) 作为检验滤波性能的指标:

$$e_i = \frac{\|x_i - \bar{x}_i^a\|_2}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

式中, x_i 和 \bar{x}_i^a 分别是分析状态的真值和均值, $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数, n 是系统的维数。

3 非线性数值试验

利用 40 维的强非线性 Lorenz-96 (L96) 系统验证 ETKF 和 IR 对变化参数的鲁棒性。

L96 方程:

$$\frac{dX_k}{dt} = (X_{k+1} - X_{k-2})X_{k-1} - X_k + F \quad (27)$$

式中, $k = 1, 2, \dots, 40$, $X_0 = X_{40}$, $X_1 = X_{41}$, $X_{-1} = X_{39}$, F 是驱动参数。由于 L96 模型具有强烈的非线性, 经常被用来验证数据同化算法的有效性。

利用经典四阶 Runge-Kutta 可以获得式(27)的数值解。迭代总步长为 1500 步, 为了避免暂态影响, 舍去前 500 步进行同化试验, 时间间隔为 0.05 s。在试验中, 为了使算法更具普适性, 假定初始状态是随机变量, 从多元正态分布中采样。试验中同化窗口的长度是 1000, 每 4 个时间步长有观测, 量测方程由 $y_i = H(x_i) + v_i$ 表示, v_i 服从高斯分布 $N(v_i; 0, I_{40})$ 。为了使试验过程易于处理, 假定量测方程是线性的。

图 1 是 IR 和 ETKF 的 RMSE 随着性能水平

系数变化的示意图。其中 $F = 5$, 集合数是 30, 且 $c \in [0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9]$ 。

图 1 显示: ①采用基于鲁棒集合滤波理论的 IR 数据同化方法, 从观测角度放大协方差矩阵后, $c \in [0.1, 0.2, \dots, 0.9]$ 时的估计误差的均值都小于 $c = 0$ 时的均值, 说明 IR 方法比 ETKF 方法的滤波精度更高。②性能水平系数 $c \in [0.1, 0.2, \dots, 0.9]$ 时, 箱型图出现了摆动的趋势, 这可能是因为每一个性能水平系数利用了不同的初始条件。

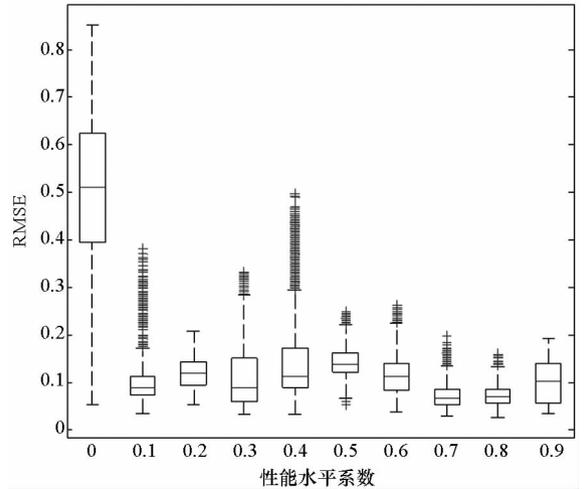


图 1 随着性能水平系数变化的 RMSE
Fig. 1 RMSE with the change of performance level coefficient

图 2 表示的是基于驱动参数 F 的变化条件, IR 和 ETKF 的 RMSE 的时间均值。参数设置: 性能水平系数 $c = 0.5$, 集合数是 20。

结果显示: 当 $F \leq 4$, 即来自 F 的模型误差较小时, ETKF 和 IR 的 RMSE 均值相差不大, 且都小于 0.1; 而当 F 增加, 也即来自 F 的模型误差增加时, ETKF 与 IR 的 RMSE 均值都增加, 但是 IR 的 RMSE 均值总是小于 ETKF 的值, 这说明 IR 提高了滤波的精度。

图 3 表示的是当性能水平系数 $c = 0.5$ 、集合数是 20、每 3 步同化一次时, 在状态变量有无观测的条件下 (总共分四种情况: 每个状态变量都有观测, 表示 40 个状态变量 x_1, x_2, \dots, x_{40} 都有观测; 每隔一个状态变量有观测, 表示下标为奇数的状态变量 x_1, x_3, \dots, x_{39} 有观测; 每隔 2 个状态变量有观测, 表示 x_1, x_4, \dots, x_{40} 有观测; 每隔 3 个状态变量有观测, 表示 x_1, x_5, \dots, x_{37} 有观测), ETKF 与 IR 的 RMSE 随着同化步长的变化趋势。

从图 3 中可以看出: ①图 3(a) 表示每个状态变量都有观测, 随着同化步长的增加, ETKF 的

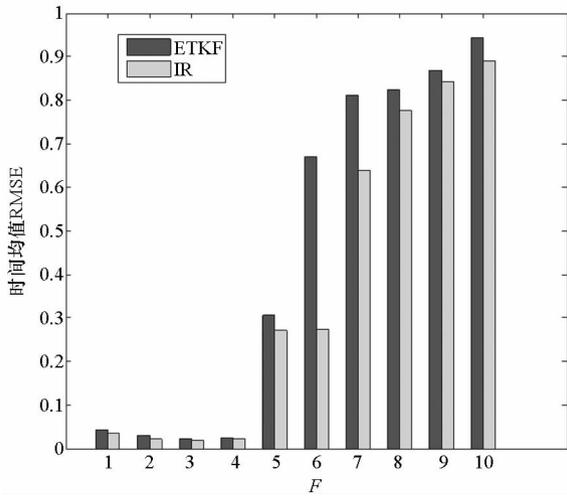
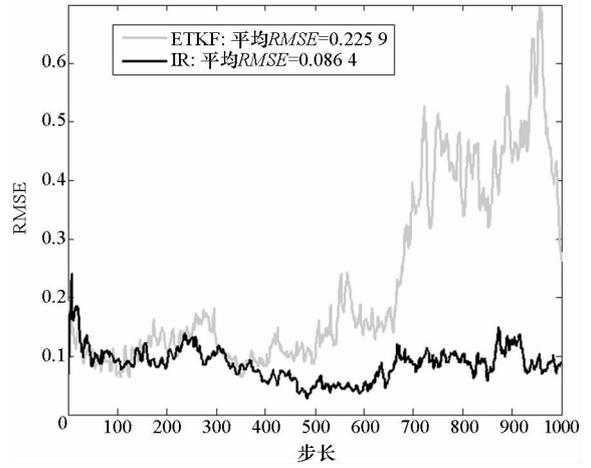


图 2 随着 F 变化的 RMSE 时间均值的变化趋势

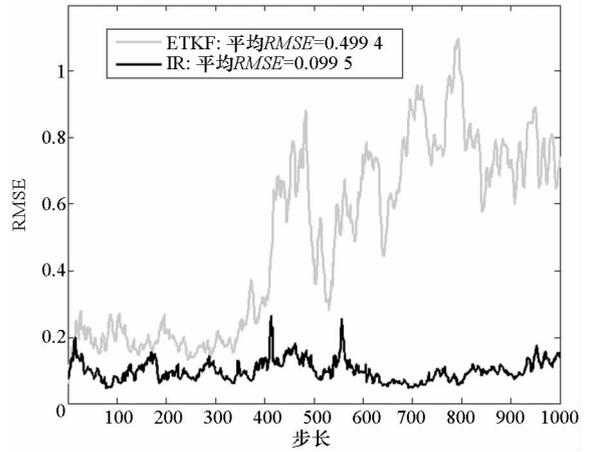
Fig. 2 Change tendency of time average RMSE with the change of F

RMSE 在 170 步发生突变,而 IR 的 RMSE 随着同化步长的增加保持较小值,说明 IR 具有优于 ETKF 的鲁棒性和滤波精度。②图 3(b)是每隔 1 个状态变量有观测,即 40 个状态变量中有 20 个状态变量有观测,同化步长增加到 400 步之前,ETKF 和 IR 都有较小的估计误差;增加到 400 步后,ETKF 的均方根误差增加,导致滤波发散,而 IR 的估计误差仍保持较小值。③图 3(c)是每隔 2 个状态变量有观测,即 40 个状态变量中有 14 个状态变量有观测,当同化步长增加到 400 步之前,ETKF 与 IR 都有较优的估计性能,但 IR 还是优于 ETKF;当估计步长增加到 400 步之后,ETKF 的估计误差增大,而 IR 的估计误差仍保持较小值。④图 3(d)表示每 3 个状态变量有观测,即 40 个状态变量中有 10 个状态变量有观测,在同化的整个过程中,ETKF 的估计误差较大,而同化步长增加到 900 步之前,IR 的估计误差较小,在 900 步



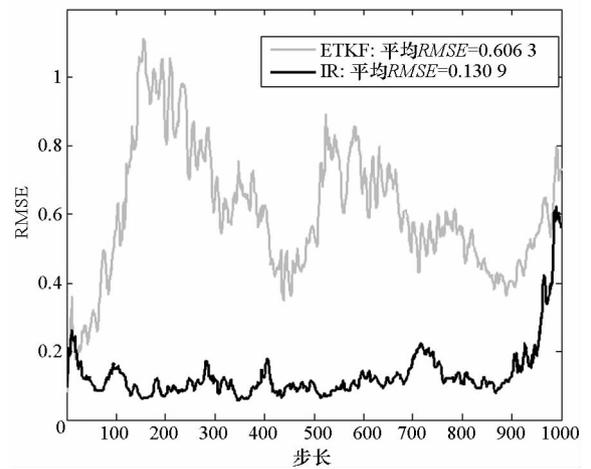
(b) 每隔 1 个状态变量有观测

(b) Every other state variables has measurement



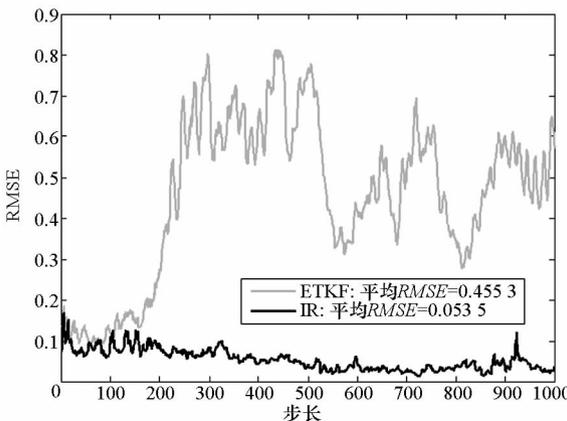
(c) 每隔 2 个状态变量有观测

(c) Every two state variables has measurement



(d) 每隔 3 个状态变量有观测

(d) Every three state variables has measurement



(a) 每个状态变量都有观测

(a) Every state variables has measurement

图 3 四种不同的观测条件下,ETKF 和 IR 的 RMSE 随同化步长的变化趋势

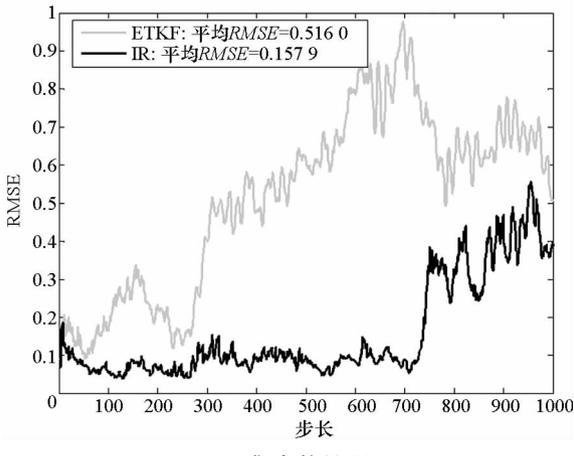
Fig. 3 Change of the RMSE of ETKF and IR with the assimilation steps under four different observation conditions

之后,IR 的估计误差增加。⑤随着观测数目的减少,即先验信息的缺失,IR 的 RMSE 在整个同化的过程中波动较小,而 ETKF 的波动较大,说明 IR 对观测数目的变化具有较好的鲁棒性。

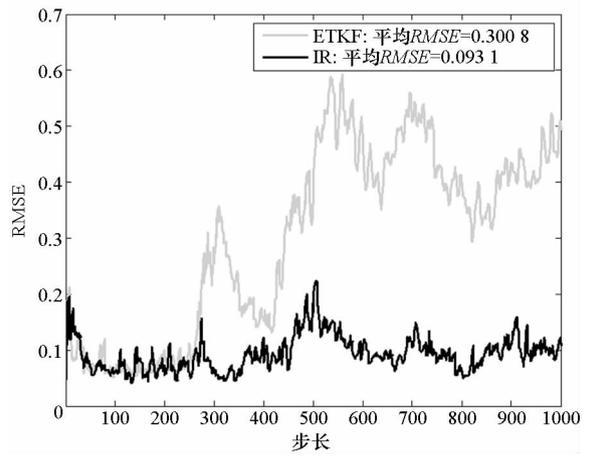
图 4 表示在四种不同的集合数条件下,ETKF 和 IR 的 RMSE 随着同化步长增加的变化趋势。试验中,性能水平系数 $c = 0.5$, $F = 5$ 。

从图中看出:①当集合数是 20 时,ETKF 的 RMSE 随着同化步长的增加波动较大,而 IR 的 RMSE 在同化步长增加到 700 步之前保持较小的值,当同化步长增加到 700 步之后,其 RMSE 的值也增加,整体上 IR 的均方根误差总是小于 ETKF 的值;②当集合数是 25 时,同化步长增加到 260 步之前,ETKF 的 RMSE 与 IR 的 RMSE 相差不大,且都较小,而在 260 步之后,ETKF 的 RMSE 出现较大的波动,而 IR 的 RMSE 仍保持较小的值;③

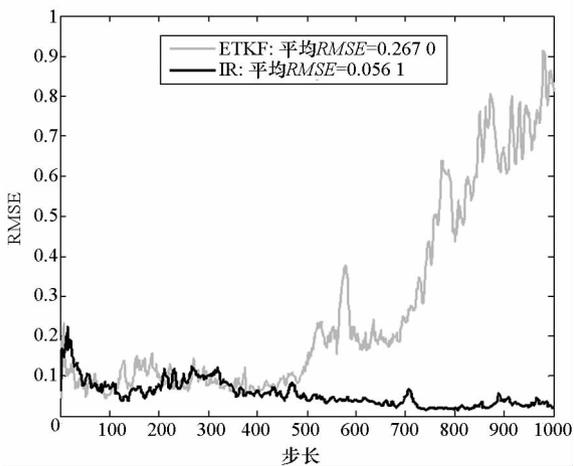
当集合数增加到 35 时,ETKF 的 RMSE 在同化步长增加到 470 步之前具有较小的值,而增加到 470 步之后,其 RMSE 也出现了较大幅度的增加,而 IR 的 RMSE 在整个同化的过程中都保持较小值;④集合数是 40 时,ETKF 和 IR 的 RMSE 在同化步长增加到 700 步之前都保持较小值,但 IR 的 RMSE 仍小于 ETKF,而在增加到 700 步之后,ETKF 的 RMSE 随着同化步长的增加出现较大幅度的增加,而 IR 的 RMSE 仍保持较小值;⑤对于 ETKF,随着向前递推的同化步长,其出现了滤波发散问题。一种可能的原因是集合数目较少,造成协方差矩阵的低估,导致分配给观测的权重降低,从而估计不准确。然而,基于集合数目变化的条件,IR 的估计误差在同化过程中总是保持较小值,说明 IR 具有优于 ETKF 的鲁棒性和滤波精度。



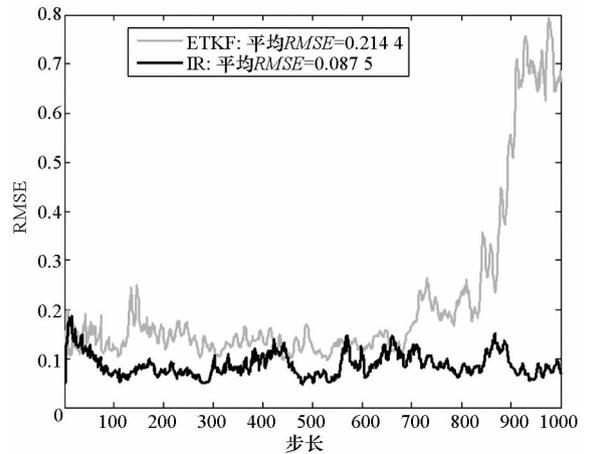
(a) 集合数是 20
(a) Ensemble size is 20



(b) 集合数是 25
(b) Ensemble size is 25



(c) 集合数是 35
(c) Ensemble size is 35



(d) 集合数是 40
(d) Ensemble size is 40

图 4 不同集合数下 ETKF 和 IR 的 RMSE 随同化步长的变化趋势

Fig. 4 Change tendency of the RMSE of ETKF and IR with assimilation steps in different ensemble sizes

4 结论

利用 TLHF 精确的鲁棒性定义以及相对应的数学描述,从概念上对多元目标优化问题的协方差放大问题做了重新定义。传统的集合滤波方法在同化中需要假定模型噪声和观测噪声的统计特性。但是,在实际的物理模型中,很多误差的统计特性不满足零均值高斯分布的条件,或者根本不知道统计特性。在状态变量的集合数目较少的条件下,直接应用卡尔曼滤波类算法会造成协方差矩阵的低估,造成滤波发散问题。本文引进了不需要对模型及观测的统计特性做相应假设,且估计误差增长率有界的鲁棒滤波理论。

借助非线性系统 L96 模型验证基于观测构建的鲁棒滤波方法的有效性。通过 4 个试验得出:①性能水平系数在 $c \in [0.1, 0.2, \dots, 0.9]$ 范围变化时,IR 的 RMSE 时间均值总是小于 ETKF (性能水平系数 $c=0$) 的值;②随着驱动参数 F 的增加,即模型误差的增加,IR 的估计性能优于 ETKF 的 (虽然 $F \leq 4$ 时,效果不是很明显),说明 IR 提高了滤波的精度;③观测数目变化时,随着同化步长的增加,IR 总是有优于 ETKF 的鲁棒性,且估计误差总是保持较小的值;④随着集合数目的增加,IR (虽然集合数是 20 时,同化步长增加到 700 步之后,IR 的 RMSE 增加,但还是优于 ETKF) 的鲁棒性能以及滤波的精度总是优于 ETKF。

通过数值试验验证了从观测角度放大协方差算法的有效性、在系统参数变化时的鲁棒性和滤波的精度,提出了集合数目较少、解决滤波发散问题的方法。由于 TLHF 其自身的鲁棒性,参数的变化并不会影响滤波的性能。后续工作将重点研究最优系统参数的选择。

参考文献 (References)

[1] 李新, 黄春林, 车涛, 等. 中国陆面数据同化系统研究的进展与前瞻[J]. 自然科学进展, 2007, 17(2): 163–173. LI Xin, HUANG Chunlin, CHE Tao, et al. Development of a Chinese land data assimilation system: its process and prospect[J]. Process in Natural Science, 2007, 17(2): 163–173. (in Chinese)

[2] Sorensensen J V T, Madsen H. Data assimilation in hydrodynamic modelling: on the treatment of nonlinearity and bias [J]. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 2004, 18(4): 228–244.

[3] 刘海滨, 丁宏, 向良军, 等. 应用 Kalman 滤波器估计放大转发双向中继联合信道[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(3): 141–145. LIU Haibin, DING Hong, XIANG Liangjun, et al. Cascade channel estimator based on Kalman filter for amplify-and-forward two-way relay networks [J]. Journal of National

University of Defense Technology, 2014, 36(3): 141–145. (in Chinese)

[4] 廖瑛, 尹大伟, 郑宇昕, 等. 基于自适应 Kalman 滤波算法的航空发动机可测参数及其偏离量估计[J]. 国防科技大学学报, 2012, 34(4): 1–6. LIAO Ying, YIN Dawei, ZHENG Yuxin, et al. Aeroengine measurable parameters estimation using adaptive Kalman filter algorithm [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2012, 34(4): 1–6. (in Chinese)

[5] Wang D B, Cai X M. Optimal estimation of irrigation schedule—an example of quantifying human interferences to hydrologic processes [J]. Advances in Water Resources, 2007, 30(8): 1844–1857.

[6] Vrugt J A, Diks C G H, Gupta H V, et al. Improved treatment of uncertainty in hydrologic modeling: combining the strengths of global optimization and data assimilation [J]. Water Resources Research, 2005, 41(41): 143–148.

[7] Reichle R H, Mclaughlin D B, Entekhabi D. Hydrologic data assimilation with the ensemble Kalman filter [J]. Monthly Weather Review, 2002, 130(1): 103–114.

[8] 摆玉龙, 李新, 韩旭军. 陆面数据同化误差问题研究综述[J]. 地球科学进展, 2011, 26(8): 795–804. BAI Yulong, LI Xin, HAN Xujun. A review of error problems for land data assimilation system [J]. Advances in Earth Science, 2011, 26(8): 795–804. (in Chinese)

[9] Drecourt J P, Madsen H, Dan R. Bias aware Kalman filters: comparison and improvement [J]. Advances in Water Resources, 2006, 29(5): 707–718.

[10] Simon D. Optimal state estimation: Kalman, H-infinity, and nonlinear approaches [M]. USA: Wiley-Interscience, 2006.

[11] Luo X D, Hoteit I. Robust ensemble filtering and its relation to covariance inflation in the ensemble Kalman filter [J]. Monthly Weather Review, 2011, 139(12): 3938–3953.

[12] Luo X D, Hoteit I. Ensemble Kalman filtering with residual nudging [J]. Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography, 2012, 64(17): 1–22.

[13] Triantafyllou G, Hoteit I, Luo X D, et al. Assessing a robust ensemble-based Kalman filter for efficient ecosystem data assimilation of the Cretan Sea [J]. Journal of Marine Systems, 2013, 125(9): 90–100.

[14] Bai Y L, Zhang Z H, Zhang Y L, et al. Inflating transform matrices to mitigate assimilation errors with robust filtering based ensemble Kalman filters [J]. Atmospheric Science Letters, 2016, 17(8): 470–478.

[15] Nan T C, Wu J C. Application of ensemble H-infinity filter in aquifer characterization and comparison to ensemble Kalman filter [J]. Water Science and Engineering, 2017, 10(1): 25–35.

[16] Wang X G, Bishop C H, Julier S J. Which is better, an ensemble of positive negative pairs or a centered spherical simplex ensemble? [J]. Monthly Weather Review, 2004, 132(7): 1590.

[17] Livings D M, Dance S L, Nichols N K. Unbiased ensemble square root filters [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008, 237(8): 1021–1028.

[18] Luo X D, Hoteit I. Ensemble Kalman filtering with a divided state-space strategy for coupled data assimilation problems [J]. Monthly Weather Review, 2014, 142(12): 4542–4558.

[19] van Leeuwen P J. Particle filtering in geophysical systems [J]. Monthly Weather Review, 2009, 137(12): 4089–4114.

[20] Anderson J L. Spatially and temporally varying adaptive covariance inflation for ensemble filters [J]. Tellus: Dynamic Meteorology and Oceanography, 2009, 61(1): 72–83.