

## 作动器最优配置的柔性结构振动主动控制\*

高维金,王亮,刘永光

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,北京 100191)

**摘要:**柔性结构广泛应用于航空航天等领域,为了获得结构的最佳动力学性能,在主动振动控制中作动器或传感器位置优化成为关键。基于结构有限元动力学方程,在状态空间利用系统可控和可观 Gramian 矩阵考虑结构剩余模态的影响,推导一种新的作动器/传感器优化准则。根据优化准则结合非线性整数规划遗传算法对作动器的位置进行配置。以悬臂板为研究对象,采用基于状态反馈的线性二次型调节器研究悬臂板的振动控制效果。与其他配置方法进行比较,验证了新方法的优越性。

**关键词:**柔性结构;Gramian 矩阵;优化准则;非线性整数规划遗传算法;振动主动控制

**中图分类号:**TP24 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)01-161-07

## Active vibration control with optimal actuator for flexible structures

GAO Weijin, WANG Liang, LIU Yongguang

(School of Automation Science and Electrical Engineering,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Flexible structures are widely applied in fields of aerospace. In order to obtain the best dynamic performance of the structures, the optimal locations of actuator and sensor become a key problem in active vibration control. The new proposed optimization criteria based on finite element dynamic equation ensuring good controllability or observability of the structures and considering the remaining modes effect were derived. Non-linear integer programming genetic algorithm was utilized to find the optimal positions of actuator and sensor. A cantilever plate was simulated by using state-feedback linear quadratic regulation controller to validate the vibration suppression effects. The comparison results of numerical simulation demonstrate the advantages of the proposed method.

**Key words:** flexible structures; Gramian matrix; optimization criterion; non-linear integer programming genetic algorithm; active vibration control

由于轻量化、领域特殊性的要求,一些柔性结构应用比较广泛,尤其在空间领域,如太阳帆板、板形天线等<sup>[1]</sup>。对于柔性结构来说,其共同特点是模态阻尼小、柔度大,在复杂激励环境中容易发生共振现象,影响航天器的性能。随着智能材料的发展应用<sup>[2-4]</sup>,通过主动控制抑制柔性结构的振动问题值得进一步研究。

对于附加作动器或传感器的柔性结构来说,存在这样一个问题,即作动器或传感器的位置优化配置。尤其对于高度集成的系统,作动器或传感器的位置配置必须在研发阶段完成。不合适的位置配置解决方案很可能导致系统研发及维护成本的提升。在对柔性结构进行主动控制时,作动器或传感器的位置及种类与控制性能密切相关,未经优化配置时很可能导致系统可控、可观性下

降而严重影响到系统的控制性能。关于作动器或传感器位置配置,根据相关文献研究大致归结为两类:一类是同时考虑控制参数和作动器或传感器优化参数<sup>[5]</sup>。比如,Liu 等<sup>[6]</sup>以柔性结构干扰和作动输出的闭环传递函数的空间  $H_2$  范数为优化指标,优化了传感器或作动器的位置。Hiramoto 等<sup>[7-8]</sup>采用了一种  $H_\infty$  控制器和传感器或作动器位置优化同时设计的方法。对于该类方法,不同的控制器需要不同的设计准则,即在一个控制器下优化的作动器或传感器位置不适用于其他控制器。另一类则是作动器或传感器位置优化独立于控制器<sup>[9-10]</sup>。Wang 等<sup>[11]</sup>采用作动器输出作动力最大化为目标优化了作动器的位置。Dhuri 等<sup>[12]</sup>提出一种基于控制向量奇异值分析的模态可控性方法优化了作动器的位置。Zoric 等<sup>[13]</sup>基

\* 收稿日期:2016-11-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11272026)

作者简介:高维金(1984—),男,河北张家口人,博士研究生,E-mail:gaoweijin2016@163.com;

王亮(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:wangliang@buaa.edu.cn

于可控 Gramian 矩阵奇异值的优化准则,利用粒子群优化算法优化了作动器、传感器的位置。然而,“溢出”对于主动控制实施来说是个重要的问题,实际中由于模型截断,对于一个反馈控制系统来说,很难保证高频模态不对控制系统产生影响。尽管如此,仅少量文献考虑了剩余模态在优化过程中的影响<sup>[14-17]</sup>。

鉴于此,本文考虑剩余模态的影响、保证结构良好的可控、可观性,推导出作动器或传感器位置优化准则,并在此基础上提出采用非线性整数规划思想的遗传算法(Non-Linear Integer Programming Genetic Algorithm, NLIP-GA)优化作动器、传感器的位置。

### 1 主动振动控制方程

考虑一个柔性板结构,假设在其上布置了  $N_s$  个传感器和  $N_a$  个作动器,根据动力学有限元法理论,包含作动器和传感器的  $n$  个自由度的受控动力方程为:

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{L}_u \mathbf{u}_a \\ \mathbf{y} = \mathbf{L}_s \mathbf{q} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为结构  $n \times n$  的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{q}$  为结构的  $n \times 1$  节点位移向量; $\mathbf{u}_a$  为节点处作动器的  $r \times 1$  控制向量, $r$  代表作动器的数量; $\mathbf{L}_u$  为控制力向量的  $n \times r$  配置矩阵; $\mathbf{y}$  为观测坐标  $m \times 1$  列向量, $m$  代表传感器的数目; $\mathbf{L}_s$  为输出  $m \times n$  系数矩阵。

假设结构的阻尼为瑞利阻尼,基于模态叠加原理,有  $\mathbf{q} = \Phi \mathbf{q}_m$ ,  $\mathbf{q}_m$  为模态空间坐标向量,  $\Phi$  为模态空间正交基振型矩阵。将式(1)转化成解耦的模态空间表述为:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_m + 2\zeta \omega \dot{\mathbf{q}}_m + \omega^2 \mathbf{q}_m = \mathbf{L}_{m,u} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{y} = \mathbf{L}_{m,s} \mathbf{q}_m \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\zeta \equiv \text{diag}\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$  表示结构的各阶模态阻尼比; $\omega \equiv \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  表示结构的各阶模态角频率; $\mathbf{L}_{m,u} \equiv \Phi^T \mathbf{L}_u$ ;  $\mathbf{L}_{m,s} \equiv \mathbf{L}_s \Phi$ 。

令  $\mathbf{x} = [\omega_i(\mathbf{q}_m)_i \quad (\dot{\mathbf{q}}_m)_i]^T$ , 将式(2)表示成状态空间的形式为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_a \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \text{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & -2\zeta_1\omega_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & -2\zeta_2\omega_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & -2\zeta_n\omega_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & \dots & c_{1n} & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & \dots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{N_s1} & 0 & c_{N_s2} & 0 & \dots & c_{N_sn} & 0 \end{pmatrix}$$

由于结构的动力特性一般由其低阶模态决定,在实际工程中可以根据外激励频率确定结构所需计算的前几阶频率模态,这里定义要控制的模态为控制模态,其余的模态称为剩余模态。因此,可以将式(2)表述为如下形式:

$$\begin{cases} (\ddot{\mathbf{q}}_m)_i + 2\zeta_i^C \omega_i^C (\dot{\mathbf{q}}_m)_i + (\omega_i^C)^2 (\mathbf{q}_m)_i = \sum_{h=1}^{N_a} b_{ih}^C (\mathbf{u}_a)_h, \\ i = 1, 2, \dots, N_C \\ (\ddot{\mathbf{q}}_m)_i + 2\zeta_i^R \omega_i^R (\dot{\mathbf{q}}_m)_i + (\omega_i^R)^2 (\mathbf{q}_m)_i = \sum_{h=1}^{N_a} b_{ih}^R (\mathbf{u}_a)_h, \\ i = 1, 2, \dots, N_R \\ \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{N_C} c_{ji}^C (\mathbf{q}_m)_i + \sum_{i=1}^{N_R} c_{ji}^R (\mathbf{q}_m)_i, j = 1, 2, \dots, N_s \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\zeta_i^C$  和  $\omega_i^C$  分别为控制模态数的模态阻尼比和固有角频率; $\zeta_i^R$  和  $\omega_i^R$  分别为剩余模态数的模态阻尼比和固有角频率; $N_C$  和  $N_R$  分别为控制模态数和剩余模态数; $(\mathbf{u}_a)_h$  为表示第  $h$  个作动器的作动力; $b_{ih}^C$  和  $b_{ih}^R$  分别为由结构的  $i$  阶控制模态和剩余模态运动引起的第  $h$  个作动器的作动系数; $c_{ji}^C$  和  $c_{ji}^R$  分别为由结构的  $i$  阶控制模态和剩余模态运动引起的第  $j$  个传感器的敏感系数。

在实际工程中,由于一些要求传感器和作动器布置的数量是有限的,这就要求必须在有限传感器或作动器的前提下使其发挥最大的作用。因此,对于作动器来说,理论上应该使控制模态吸收的作动力最大即可控度最优、剩余模态吸收的作动能量为零以避免控制溢出,则其应满足如下关系:

$$\begin{cases} b_{ih}^C \gg 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_C\}, \forall h \in \{1, 2, \dots, N_a\} \\ b_{ih}^R = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_R\}, \forall h \in \{1, 2, \dots, N_a\} \end{cases} \quad (5)$$

同理,传感器测得的振动信号应仅包含控制

模态信息输入到控制系统,即可观测度最优,则满足如下关系:

$$\begin{cases} c_{ji}^C \gg 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_C\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N_s\} \\ c_{ji}^R = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_R\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N_s\} \end{cases} \quad (6)$$

## 2 传感器和作动器优化位置配置

### 2.1 作动器位置优化准则

传感器或作动器优化配置指的是其在结构的面内分布优化,具体就是沿梁的长度方向或在板的二维平面内寻求传感器和作动器的最佳位置。根据动力有限元、模态理论及系统控制理论方法,本文给出基于系统可观 Gramian 矩阵和可控 Gramian 矩阵的准则来配置,由于篇幅的限制,只给出作动器优化准则的具体推导过程。

对于式(3),其可控 Gramian 矩阵形式可表示成:

$$w_c(t) = \int_0^t e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (7)$$

考虑可控 Gramian 矩阵,其李雅普诺夫方程可以写成:

$$A w_c + w_c A^T + B B^T = 0 \quad (8)$$

第  $i$  阶模态下的李雅普诺夫方程可以简化为:

$$w_{ci}(A_i + A_i^T) + B_i B_i^T = 0 \quad (9)$$

式中,  $B_i B_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \|B_i\|_2^2 \end{bmatrix}$ ;  $\|B_i\|_2^2 = (b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \dots + b_{iN_c}^2)$ 。

将式(3)的  $A$ 、 $B$  矩阵代入式(9),可得第  $i$  阶模态的可控 Gramian 矩阵为:

$$w_{ci} = \frac{\|B_i\|_2^2}{4\zeta_i \omega_i} = \frac{1}{4\zeta_i \omega_i} \sum_{j=1}^r b_{ij}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

结构的可控 Gramian 矩阵可表述为如式(11)所示的对角阵形式:

$$w_c = \text{diag} \{ w_{c1}, w_{c2}, \dots, w_{cn} \} \quad (11)$$

对于作动器的配置,若某阶  $w_{ci}$  很小,即系统可控度小则这阶模态很难被控制。同理若剩余模态的可控 Gramian 分量很大,则会导致控制溢出,影响控制效果。在考虑作动器消耗最小能量且能达到最好控制效果的前提下,采用如下寻优准则:

$$\begin{aligned} & \max \{ \min [ W_c^{\text{con}}(A_1, A_2, \dots, A_{N_a}) ] \} - \\ & \rho_c \max [ W_c^{\text{uncon}}(A_1, A_2, \dots, A_{N_a}) ] \} \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $\rho_c$  为权重系数,根据实际条件调整剩余模态的权重;  $A_1, A_2, \dots, A_{N_a}$  表示作动器的布置位

置;  $W_c^{\text{con}}$  和  $W_c^{\text{uncon}}$  分别为被控模态和剩余模态关于作动器位置的 Gramian 矩阵。

作动器的布置准则可以表述为:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \min \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_C} w_{ci} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} w_{ci}}}{\sigma(w_{ci})} \right] - \right. \\ & \left. \rho_c \max \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_R} w_{ci} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_R} w_{ci}}}{\sigma(w_{ci})} \right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $\sum_{i=1}^{N_C} w_{ci}$  表示作动器对结构的输入总能量;  $\sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} w_{ci}}$  表示各阶模态作动能量的平均变化率;  $\sigma(w_{ci})$  为各阶控制模态的标准差,用来惩罚那些具有很和很小作动能量的位置使得控制模态都得到很好的控制。

### 2.2 传感器位置优化准则

同理,若任意  $i$  阶的  $w_{oi}$  的值很小,则代表该阶模态不能有效地观测到。在使所需控制模态的信息最大化、剩余模态的信息尽可能小的原则下,寻找传感器的优化位置,使得式(14)成立:

$$\begin{aligned} & \max \{ \min [ W_o^{\text{con}}(S_1, S_2, \dots, S_{N_s}) ] - \\ & \rho_s \max [ W_o^{\text{uncon}}(S_1, S_2, \dots, S_{N_s}) ] \} \end{aligned} \quad (14)$$

式中:  $\rho_s$  为权重系数,根据实际条件调整剩余模态的权重;  $S_1, S_2, \dots, S_{N_s}$  表示传感器的布置位置;  $W_o^{\text{con}}$  和  $W_o^{\text{uncon}}$  分别为被观模态和剩余模态关于传感器位置的可观 Gramian 矩阵。

为了在有限传感器布置的条件下使得其提取的各阶模态信息量均大且保证其总信息量最大,式(14)中的  $W_o^{\text{con}}$  和  $W_o^{\text{uncon}}$  分别可以写成:

$$\begin{cases} W_o^{\text{con}} = \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_C} w_{oi} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} w_{oi}}}{\sigma(w_{oi})} \\ W_o^{\text{uncon}} = \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_R} w_{oi} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_R} w_{oi}}}{\sigma(w_{oi})} \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $\sum_{i=1}^{N_C} w_{oi}$  表示控制模态输出信息的总和;  $\sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} w_{oi}}$  表示各阶控制模态的几何平均值,用来描述各阶的平均变化率;  $\sigma(w_{oi})$  为各阶控制模态的标准差。对于剩余模态来说,其意义相同。

传感器优化配置准则为:

$$\max \left\{ \min \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_C} \mathbf{w}_{oi} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} \mathbf{w}_{oi}}}{\sigma(\mathbf{w}_{oi})} \right] - \rho_s \max \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_R} \mathbf{w}_{oi} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_R} \mathbf{w}_{oi}}}{\sigma(\mathbf{w}_{oi})} \right] \right\} \quad (16)$$

### 2.3 基于遗传算法的传感器或作动器位置优化

在多个传感器或作动器位置寻优时,遗传算法能够保证全局最优的优化效果,因此,本文基于传感器或作动器的配置准则采用遗传算法来求解其最优位置。由于传感器和作动器的优化原理一致,本文只对作动器的位置优化配置进行详细介绍。

考虑结构为一悬臂板,将其进行有限单元划分为  $10 \times 16$  的网格,则有  $11 \times 17$  个节点,从理论来说,除去边界点,如果在  $8 \times 14$  节点的位置各布置一个作动器,则效果最好。然而,这在实际当中由于各种限制因素,作动器的数量会有严格的要求。

为了问题描述的一般化,结构在作动器作用下的动力学方程表示为:

$$\mathbf{M}_{n \times n} \ddot{\mathbf{x}}_{n \times 1} + \mathbf{C}_{n \times n} \dot{\mathbf{x}}_{n \times 1} + \mathbf{K}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{L}_{n \times r} \mathbf{U}_{r \times 1} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{M}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{C}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{K}_{n \times n}$  分别为结构的质量、阻尼、刚度矩阵;  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  为结构的节点位移矩阵;  $\mathbf{L}_{n \times r}$  是元素为 0 和 1 的系数矩阵,其中  $r$  代表作动器配置个数;  $\mathbf{U}_{r \times 1}$  为作动器的作动矢量矩阵。

假设考虑结构的前  $m$  阶模态,由模态展开定理可知  $\mathbf{x}_{n \times 1} = \Phi_{n \times m} \mathbf{q}_{m \times 1}$ , 将其代入式(17)中可得:

$$\mathbf{M}_{n \times n} \Phi_{n \times m} \ddot{\mathbf{q}}_{m \times 1} + \mathbf{C}_{n \times n} \Phi_{n \times m} \dot{\mathbf{q}}_{m \times 1} + \mathbf{K}_{n \times n} \Phi_{n \times m} \mathbf{q}_{m \times 1} = \mathbf{L}_{n \times r} \mathbf{U}_{r \times 1} \quad (18)$$

同样假定结构阻尼为瑞利阻尼,对式(18)进行归一化处理,两边同乘以  $\Phi_{n \times m}^T$  可得:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{m \times 1} + 2\zeta_{m \times m} \boldsymbol{\omega}_{m \times m} \dot{\mathbf{q}}_{m \times 1} + \boldsymbol{\omega}_{m \times m}^2 \mathbf{q}_{m \times 1} = \Phi_{n \times m}^T \mathbf{L}_{n \times r} \mathbf{U}_{r \times 1} \quad (19)$$

在式(19)中,令  $\hat{\mathbf{B}} = \Phi_{n \times m}^T \mathbf{L}_{n \times r}$ , 对于矩阵  $\hat{\mathbf{B}}$  来说,其相当于式(3)中  $\mathbf{B}$  在去掉零元素后余下的矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$ , 则可以将  $\hat{\mathbf{B}}$  与  $\tilde{\mathbf{B}}$  建立起关系。其中  $\tilde{\mathbf{B}}$  可以写成如下形式:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad (20)$$

从式(10)中可以看出,所提出的作动器优化配置准则和  $\hat{\mathbf{B}}$  有关,而  $\zeta$  和  $\boldsymbol{\omega}$  则可以根据有限元法计算得到。为了获取作动器的最优位置,则可以等效地来规划矩阵  $\mathbf{L}_{n \times r}$  中元素 1 的位置,元素 1 对应的位置坐标就是作动器最优的配置位置。

若要获取作动器的优化位置,则只需要得到矩阵  $\mathbf{L}_{n \times r}$  即可。对于变量为 0 和 1 元素的规划属于非线性整数规划问题,下面就将遗传算法应用于非线性规划问题,建立其具有  $n \times r$  个 0 和 1 决策变量的优化模型:

$$\max \left\{ \min \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_C} \mathbf{w}_{ci} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_C} \mathbf{w}_{ci}}}{\sigma(\mathbf{w}_{ci})} \right] - \rho_c \max \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{N_R} \mathbf{w}_{ci} \right) \sqrt{\prod_{i=1}^{N_R} \mathbf{w}_{ci}}}{\sigma(\mathbf{w}_{ci})} \right] \right\}$$

s. t.

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{ci} = \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2^2}{4\zeta_i \omega_i} = \frac{1}{4\zeta_i \omega_i} \sum_{j=1}^r b_{ij}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0 \leq \sum_{i=1}^n b_{ij} \leq r \\ 0 \leq \sum_{j=1}^r b_{ij} \leq r \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, r \\ b_{ij} = 0 \text{ or } 1 \end{cases} \quad (21)$$

## 3 数值分析算例

### 3.1 作动器配置位置结果

表 1 给出了悬臂板结构的几何参数及材料属性参数。

表 1 结构基本物理参数

Tab. 1 Parameters of the structure

物理参数	数值
长度/mm	400
宽度/mm	200
厚度/mm	5
密度/(kg/m <sup>3</sup> )	2800
弹性模量/GPa	70
阻尼比 $\zeta_i (i=1, 2, \dots, 5)$	0.000 1

为了得到结构更精确的振动响应,计算了结

构的前 5 阶频率,见表 2。根据  $\omega_i = 2\pi f_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  即可求取各阶的角频率。

表 2 结构前 5 阶自然频率

Tab.2 The first five natural frequencies

阶数	1	2	3	4	5
频率/Hz	24.2	38.2	61.8	81.3	96.1

由于采用作动器和传感器同位配置,根据该优化模型,基于 NLIP-GA 仅对作动器的位置进行优化即可。本文只考虑一个和两个作动器主动动作条件下的振动控制效果,对于悬臂板考虑其前两阶模态为控制模态,余下三阶模态为剩余模态。这里  $\rho_c = 0.5$ ,作动器的位置优化结果如图 1 所示。

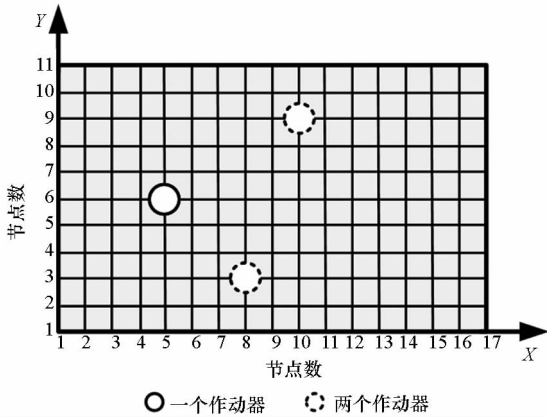


图 1 作动器优化位置

Fig.1 Optimal locations of actuators

### 3.2 控制律及观测器

采用线性二次型调节器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 控制算法进行振动主动控制,对于式(3)状态方程,假若其为可控系统,则基于状态观测的控制律可以为

$$u_a = -Kx \quad (22)$$

式中,  $K$  为反馈增益矩阵。

对于反馈增益矩阵,则可以由如下二次性能指标优化得到:

$$J_{u_a} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |x^T Q x + u_a^T R u_a| dt \quad (23)$$

式中,  $Q$  和  $R$  分别为半正定和正定对称矩阵。反馈增益矩阵可以写为:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (24)$$

其中,  $P$  为如式(25)所示代数 Riccati 方程的解。

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (25)$$

根据式(3)即可得到闭环系统方程为:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (26)$$

从式(26)可知,控制律需要知道状态向量  $x$

的信息。假定状态系统方程可观,引入 Luenberger 观测器来计算状态估计值  $\hat{x}$ ,则有式(27)成立:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u_a + L(y - C \hat{x}) \quad (27)$$

式中,  $L$  为观测增益矩阵。则控制律变化为:

$$u_a = -K \hat{x} \quad (28)$$

### 3.3 不同外部激励的振动控制

为了验证振动主动控制的效果,外部激励分别选择狄拉克冲击脉冲和阶跃信号。其中响应观测位置及外激励作用位置示意如图 2 所示。

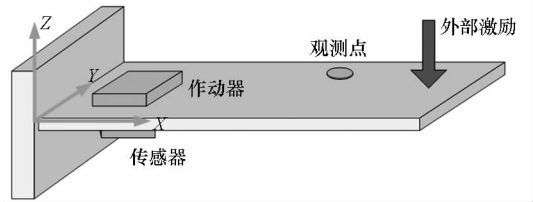


图 2 观测点及外激励位置示意图

Fig.2 Schematic diagram of observation point and excitation position

当外部激励为狄拉克脉冲激励时,无控制时的位移响应如图 3 所示。施加控制后悬臂板的振动控制效果如图 4 所示。

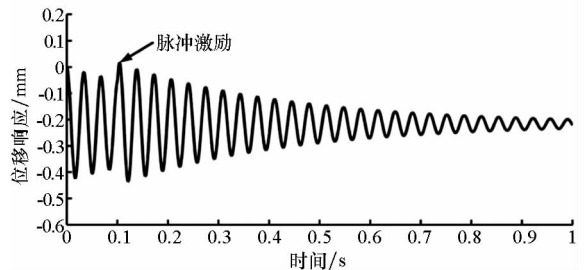
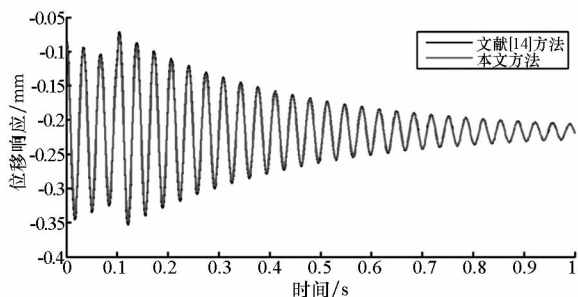


图 3 无控制开环位移响应

Fig.3 Displacement response of the structure without control

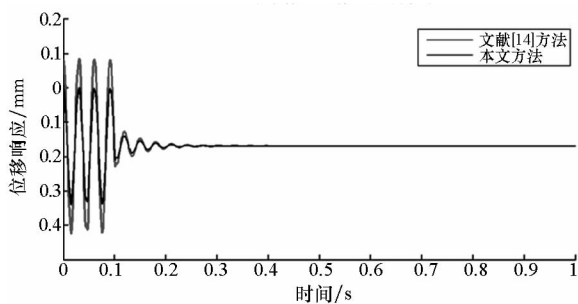
从图 4 可知,两个作动器的控制作用优于单个作动器的作用效果。理想的情况——作动器不受限制时,作动器越多,振动控制效果越好。当作动器数量为单个时,本文方法和文献[14]所采用的作动器配置方法的控制效果差不多,但本文的方法仍然优于文献[14]的方法。而作动器数量为两个时,可以从图 4(b)中看出本文配置方法下的作动效果明显优于文献方法。这也正验证了作动器数量对控制性能的影响。

当外部激励为阶跃信号时,由于阶跃信号含有丰富的频率成分,可以激起悬臂板的多阶模态。图 5 给出了频域下作动器的主动控制效果。



(a) 单个作动器作用控制效果

(a) Control effect of single actuator action

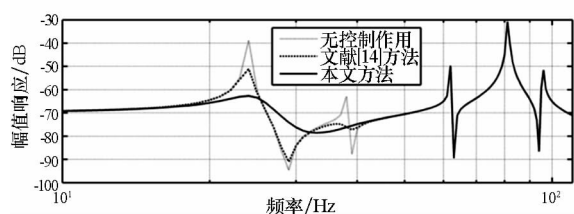


(b) 两个作动器作用控制效果

(b) Control effect of two actuators action

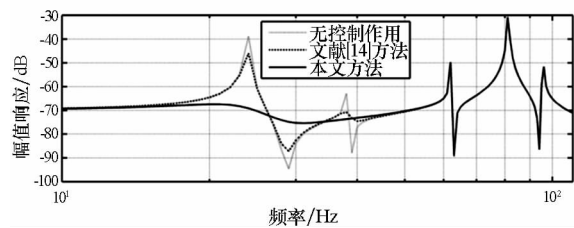
图 4 不同作动器数量的时域控制效果

Fig. 4 Control effects of different number of actuators in time domain



(a) 单个作动器作用的控制效果

(a) Control effect of single actuator action



(b) 两个作动器作用控制效果

(b) Control effect of two actuators action

图 5 不同作动器数量的频域控制效果

Fig. 5 Control effects of different number of actuators in frequency domain

从图 5 可以看出,本文作动器配置条件下的振动控制效果明显优于文献[14]方法。由图可知二阶频率处没有尖峰,也即结构的模态振型发生了变化。之所以出现这样的情况,可以从本文与文献[14]优化准则的不同寻找到原因。在文

献[14]中提到的优化准则其考虑的是具有独立模态的意义,而本文优化准则中则考虑模态平均的意义,相当于耦合模态。由振动模态理论可知,独立模态控制仅是改变控制模态的频率和模态阻尼,对模态形状没有影响,而耦合模态控制将控制模态和剩余模态耦合,相当于特征向量重新配置。

### 4 结论

本文结合有限元动力学、控制理论推导了作动器和传感器的位置配置优化准则,基于该准则利用 NLIP-GA 算法获得作动器的最优位置。在传感器和作动器同位配置的条件下对悬臂板进行数值模拟,可以得出如下结论:

- 1)有限元动力学方法与 NLIP-GA 算法结合可以解决结构振动主动控制中传感器和作动器位置优化配置的问题;
- 2)本文提出的优化准则优于文献[14]方法,对于柔性结构如太阳展板、板型天线等的振动控制,尤其对于模态形状要求有所改变的情况,本文方法是有效的。

### 参考文献 (References)

[1] 王军,杨亚东,张家应,等. 面向结构振动控制的压电作动器优化配置研究 [J]. 航空学报, 2012, 33(3): 494-500.  
WANG Jun, YANG Yadong, ZHANG Jiaying, et al. Investigation of piezoelectric actuator optimal configuration for structural vibration control [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(3): 494-500. (in Chinese)

[2] Agrawal B N, Elshafei M A, Song G B. Adaptive antenna shape control using piezoelectric actuators [J]. Acta Astronautica, 1997, 40(11): 821-826.

[3] 柳萍,毛剑琴,张伟,等. 基于 Hammerstein-like 模型的超磁致伸缩作动器建模与控制 [J]. 北京航空航天大学学报, 2013, 39(7): 917-921, 926.  
LIU Ping, MAO Jianqin, ZHANG Wei, et al. Modeling and control of giant magnetostrictive actuators based on Hammerstein-like model [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 39(7): 917-921, 926. (in Chinese)

[4] Zabihollah A, Sedaghti R, Ganesan R. Active vibration suppression of smart laminated beams using layerwise theory and an optimal control strategy [J]. Smart Materials and Structures, 2007, 16(6): 2190-2201.

[5] 戚奎成,黄海. 自适应压电桁架形状控制中作动器优化配置 [J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(5): 527-530.  
XIAN Kuicheng, HUANG Hai. Optimal actuator placements for shape control of adaptive piezoelectric truss [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(5): 527-530. (in Chinese)

[6] Liu W, Hou Z K, Demetriou M A. A computational scheme for the optimal sensor/actuator placement of flexible structures

- using spatial  $H_2$  measures [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20(4): 881–895.
- [7] Hiramoto K, Doki H, Obinata G. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic Riccati equation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(5): 1057–1075.
- [8] Gney M, Eskinat E. Optimal actuator and sensor placement in flexible structures using closed-loop criteria [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 312(1/2): 210–233.
- [9] 王威远, 魏英杰, 王聪, 等. 压电智能结构传感器/作动器位置优化研究 [J]. *宇航学报*, 2007, 28(4): 1025–1029.  
WANG Weiyan, WEI Yingjie, WANG Cong, et al. Optimal investigation of sensor/actuator placement for piezoelectric smart structure [J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(4): 1025–1029. (in Chinese)
- [10] Bruant I, Proslie L. Optimal location of actuators and sensors in active vibration control [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, 16(3): 197–206.
- [11] Wang Q, Wang C M. A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242(3): 507–518.
- [12] Dhuri K D, Seshu P. Piezo actuator placement and sizing for good control effectiveness and minimal change in original system dynamics [J]. *Smart Materials and Structures*, 2006, 15(6): 1661–1672.
- [13] Zoric N D, Simonovic A M, Mitrovic Z S, et al. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2013, 24(4): 499–526.
- [14] Bruant I, Gallimard L, Nikoukar S. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(10): 1615–1635.
- [15] Biglar M, Gromada M, Stachowicz F, et al. Optimal configuration of piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm [J]. *Acta Mechanica*, 2015, 226(10): 3451–3462.
- [16] Bruant I, Gallimard L, Nikoukar S. Optimization of piezoelectric sensors location and number using a genetic algorithm [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2011, 18(7): 469–475.
- [17] Halim D, Moheimani S O R. An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate [J]. *Mechatronics*, 2003, 13(1): 27–47.