

考虑扰动引力影响的弹道助推段误差传播解析计算方法*

王磊, 郑伟, 周祥

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:针对地球扰动引力对弹道导弹惯性导航精度影响日益突出这一问题,研究了沿弹道扰动引力的多项式拟和方法,并基于线性系统理论和弹道摄动思想推导了用于求解扰动引力对弹道助推段状态影响的完整解析表达式。同时考虑扰动引力影响与导弹视加速度之间的耦合特性,将扰动引力引起的视加速度偏差视为扰动引力影响的附加补偿项,并进行迭代修正。仿真结果表明:扰动引力拟合残差小于 $3 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$,考虑耦合项修正的弹道误差传播解析模型计算残差减小为原有方法的1/3,计算时间仅为直接采用弹道积分求差法的1/10。

关键词:状态空间摄动法;多项式拟合;弹道助推段;解析解;扰动引力

中图分类号:V412.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)02-028-07

Analytical expression of error propagation along powered phase trajectory of missile by disturbing gravity

WANG Lei, ZHENG Wei, ZHOU Xiang

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Regarding the influence to the inertial navigation system of missile by disturbing gravity was focused, a polynomial fitting method was used to express disturbing gravity along the trajectory, and an analytical expression for calculating the deviation from the nominal value without considering disturbing gravity was deduced based on the linear system theory and the perturbation theory. Moreover, the coupling property between disturbing gravity and apparent acceleration was considered. The apparent acceleration deviation caused by disturbing gravity was regarded as an additional term of disturbing gravity, and was corrected by iterative method. The simulation results show that the error of disturbing gravity fitting method is less than $3 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$, and the residual error of the analytical formula considering the compensation of the apparent acceleration deviation is about 1/3 of the original method, and the computation time is only 1/10 of the numerical integration method.

Key words: state space perturbation method; polynomial fitting; powered phase trajectory of missile; analytical expression; disturbing gravity

近几年来,随着惯性测量系统硬件水平的提高,制导工具误差对弹道导弹命中精度的影响逐渐降低,而非制导误差的影响却日益突出。地球扰动引力是导致非制导误差的最主要因素,对于射程超过10 000 km的弹道导弹,扰动引力可平均引起600 m左右的落点偏差^[1-2]。

对弹道导弹助推段而言,实现对扰动引力影响的补偿主要有两种思路:一种为直接补偿法,即弹上惯导解算时引力项采用高阶引力模型计算;另一种为间接补偿法,即通过对弹道诸元或关机方程进行迭代修正来实现补偿^[1-2]。直接补偿法对弹载计算机性能及存储量有很高要求,文献[3]研究了采用球谐函数计算扰动引力的并行算法,虽然在计算速度上取得一定提升,却无法解

决存储量的问题;文献[4-5]提出了扰动引力有限元快速重构模型,并探讨了采用该模型实现弹上扰动引力实时计算的可行性。

采用间接法补偿扰动引力影响的关键是求解扰动引力对弹道助推段关机点状态的影响量 $\Delta\bar{X}$,进而基于获得的 $\Delta\bar{X}$ 反馈修正弹道发射诸元或关机方程。显然,基于高阶引力场模型进行弹道数值积分并与标准弹道等时求差是求解 $\Delta\bar{X}$ 最直接的手段,但考虑数值积分计算耗时长的的问题,使得该方法一般只适用于扰动引力影响特性离线分析。

摄动法是分析扰动引力对弹道影响最常用的方法。摄动理论最初是由天文学家在分析月球、木星及土星等天体在受到太阳光压及其他引力体

* 收稿日期:2017-02-22

基金项目:国家部委基金资助项目(613222)

作者简介:王磊(1989—),男,山西大同人,博士研究生,E-mail:wanglei_nudt@163.com;

郑伟(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:Zhengwei@nudt.edu.cn

摄动后的运动特性的研究中发展起来的。欧拉首创了轨道要素变分法,分析了木星、土星和月球的轨道摄动问题。随后,拉格朗日、高斯、拉普拉斯等也对轨道摄动理论的发展做出了突出的贡献^[6]。针对地球形状摄动问题,日本天文学家古在由秀在1959年根据非线性振动力学中平均法思想提出了平均要素法,目前该方法已成功应用于半解析轨道理论、转移轨道、航天器交会对接以及编队飞行领域^[7-9],并取得了较好的效果。

在弹道摄动领域,我国学者自20世纪80年代以来,主要针对扰动引力场中弹道快速计算、扰动引力场对弹道运动的影响分析和扰动引力场影响补偿方法这三个方面进行了研究。陈国强^[10]、任莹^[11]、郑伟^[12]等都提出了非常有效的分析方法和手段。其中,陈国强提出的远程弹道导弹误差传播特性分析方法在分析扰动引力对弹道导弹弹道的影响时效果非常好,但该方法在用于分析扰动引力对基准弹道的影响时会产生较大误差,这是因为扰动引力与弹道视加速度之间存在耦合影响。本文即针对这一问题,提出了考虑耦合影响的弹道误差传播快速分析方法。

1 计算模型

1.1 理论基础^[1,10]

状态空间摄动法的基本思路是:基于一条标准弹道将弹道非线性方程线性化,得到以速度、位置(或其他等价变量)偏差为状态变量的线性系统,并导出系数矩阵的解析解,即

$$\delta \dot{\bar{X}} = \mathbf{A} \cdot \delta \bar{X} + \bar{\mathbf{V}} \quad (1)$$

其中, \bar{X} 表示系统状态, \mathbf{A} 为系数矩阵, $\bar{\mathbf{V}}$ 为所考虑的摄动因素。

而后导出状态转移矩阵 $\Phi(t, \tau)$ 的解析解,满足:

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \quad (2)$$

根据线性系统理论,在初始条件 $\delta \bar{X}(t_0) = \delta \bar{X}_0$ 下,式(1)的通解为:

$$\delta \bar{X}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) \delta \bar{X}_0 + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \bar{\mathbf{V}}(\tau) d\tau \quad (3)$$

如果 $\bar{\mathbf{V}}$ 可以表示为自变量的简单函数,则上式可进一步导出解析解。

1.2 弹道摄动方程

标准弹道计算模型可表示为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{V}}}^* = \dot{\bar{\mathbf{W}}}^* + \bar{\mathbf{g}}^*(\bar{\rho}^*) \\ \dot{\bar{\rho}}^* = \bar{\mathbf{V}}^* \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\bar{\mathbf{V}}^*$ 、 $\bar{\rho}^*$ 和 $\dot{\bar{\mathbf{W}}}^*$ 分别为标准弹道的速度、位置和视加速度矢量, $\bar{\mathbf{g}}^*(\bar{\rho}^*)$ 为标准弹道引力加速度。

若考虑扰动引力对导弹运动的影响,则实际飞行弹道与标准弹道的等时变分可表示为:

$$\begin{cases} \delta \dot{\bar{\mathbf{V}}} = \dot{\bar{\mathbf{W}}} - \dot{\bar{\mathbf{W}}}^* + \bar{\mathbf{g}}(\bar{\rho}) - \bar{\mathbf{g}}^*(\bar{\rho}^*) \\ \delta \dot{\bar{\rho}} = \delta \bar{\mathbf{V}} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\dot{\bar{\mathbf{W}}}$ 为实际弹道视加速度, $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\rho})$ 为实际弹道引力加速度。

分别将 $\dot{\bar{\mathbf{W}}}$ 与 $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\rho})$ 在 $\dot{\bar{\mathbf{W}}}^*$ 与 $\bar{\mathbf{g}}^*(\bar{\rho}^*)$ 处泰勒展开,取一阶项,并整理为矩阵形式,即有

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\bar{\mathbf{V}}} \\ \delta \dot{\bar{\rho}} \end{pmatrix} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \begin{pmatrix} \delta \bar{\mathbf{V}} \\ \delta \bar{\rho} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \bar{\mathbf{g}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中,系数矩阵 \mathbf{P} 表示地球正常引力(只考虑到 J_2 项)对弹道速度和位置的雅可比矩阵,系数矩阵 \mathbf{Q} 表示弹道视加速度对弹道速度和位置的雅可比矩阵,即有

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}^*}{\partial \bar{\rho}} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{W}}}^*}{\partial \bar{\mathbf{V}}} & \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{W}}}^*}{\partial \bar{\rho}} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

显然,矩阵 \mathbf{P} 反映了地球正常引力与扰动引力的耦合影响,矩阵 \mathbf{Q} 则反映了视加速度与扰动引力的耦合影响。

文献[12]给出了 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$ 情况下状态转移矩阵的解析解(如式(8)所示),进而可得求解弹道助推段关机点偏差的半解析表达式(如式(9)所示)。

$$\begin{cases} \Phi_{11}(\tau) = \cos(n_b \tau) \\ \Phi_{12}(\tau) = \frac{(n_b \tau)^2}{3!} \left(1 + \frac{2}{3} \times \frac{\tau}{t_k} + \frac{1}{6} \times \frac{\tau^2}{t_k^2} \right) \\ \Phi_{21}(\tau) = \Phi_{12}(\tau) \\ \Phi_{22}(\tau) = \cosh(\sqrt{2} n_b \tau) \\ \Phi_{33}(\tau) = \Phi_{11}(\tau) \\ \Phi_{41}(\tau) = \frac{\sin(n_b \tau)}{n_b} \\ \Phi_{52}(\tau) = \frac{\sinh(\sqrt{2} n_b \tau)}{\sqrt{2} n_b} \\ \Phi_{63}(\tau) = \Phi_{41}(\tau) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \delta v_{kx}(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{11}(t_k - \tau) \delta F_x(\tau) d\tau + \\ \int_0^{t_k} \Phi_{12}(t_k - \tau) \delta F_y(\tau) d\tau \\ \delta v_{ky}(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{22}(t_k - \tau) \delta F_y(\tau) d\tau + \\ \int_0^{t_k} \Phi_{21}(t_k - \tau) \delta F_x(\tau) d\tau \\ \delta v_{kz}(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{33}(t_k - \tau) \delta F_z(\tau) d\tau \\ \delta x_k(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{41}(t_k - \tau) \delta F_x(\tau) d\tau \\ \delta y_k(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{52}(t_k - \tau) \delta F_y(\tau) d\tau \\ \delta z_k(t_k) = \int_0^{t_k} \Phi_{63}(t_k - \tau) \delta F_z(\tau) d\tau \end{cases} \quad (9)$$

式(8)中, $n_b = \sqrt{\mu/r^3}$ 近似反映导弹助推段弹道绕地心的旋转角速率(文献[12]将其定义为弹道角速度), 由于在整个弹道助推段飞行过程中 n_b 的真实数值变化范围小于 1%, 故在推导过程中将其视为常数(取 $n_b = 1/825$), t_k 为关机时刻。式(9)中, $\delta F_x(\tau)$ 、 $\delta F_y(\tau)$ 、 $\delta F_z(\tau)$ 为系统过程扰动项, 这里为扰动引力矢量, 即 $\delta \bar{g}$ 。显然, 若 $\delta \bar{g}$ 可以表达为关于时间的函数, 式(9)可进一步推导出完整解析解。

2 扰动引力多项式拟合

扰动引力采用球谐函数法进行计算, 且取截断到 360 阶的 EGM2008 模型。扰动引力位具体的计算公式为:

$$T = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^s \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{k=0}^n [C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)] P_{nk}(\sin\varphi) \quad (10)$$

式中: r 为地心距; λ 为地心经度; φ 为地心纬度; μ 为地球引力常数; a_e 为地球赤道平均半径; C_{nk} 和 S_{nk} 均为球谐函数系数; $P_{nk}(x)$ 为缔合勒让德函数; s 为模型截断阶数。

扰动引力位对位置的梯度即为扰动引力, 即

$$\delta \bar{g} = \text{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) \quad (11)$$

采用最小二乘法将助推段扰动引力拟合为关于时间的多项式函数, 且对发射惯性系中扰动引力三分量分别进行拟合。设观测方程为:

$$\bar{Z}_{n \times 1} = \mathbf{H}_{n \times (m+1)} \bar{\lambda}_{(m+1) \times 1} + \bar{\epsilon} \quad (12)$$

式中: $\bar{Z}_{n \times 1}$ 为观测向量(观测向量即为基于弹道助推段 n 个离散时间点对应的位置矢量求解得到的 n 组发射惯性系中的扰动引力值), n 为拟合点的个数; $\mathbf{H}_{n \times (m+1)}$ 为系数矩阵, m 代表了多项式拟合阶次; $\bar{\lambda}_{(m+1) \times 1}$ 为待定参数向量; $\bar{\epsilon}$ 为随机误差向量。

拟合多项式采用如式(13)所示经验公式。

$$\delta \bar{g}(t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \left(\frac{t}{10} \right)^i \quad (13)$$

此时有

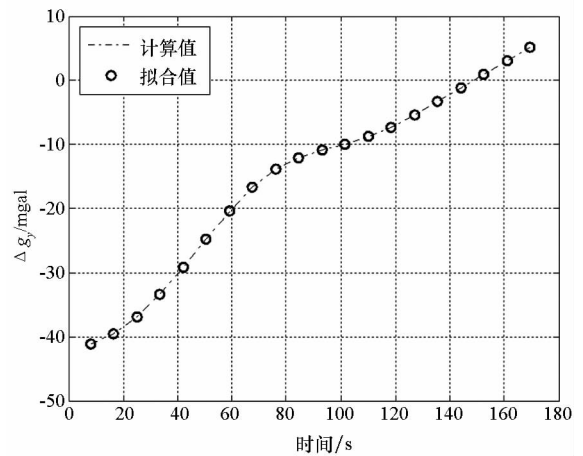
$$\mathbf{H}_{n \times (m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & t_1/10 & \cdots & (t_1/10)^m \\ 1 & t_2/10 & \cdots & (t_2/10)^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n/10 & \cdots & (t_n/10)^m \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为离散时间序列。

则根据最小二乘法, 拟合系数可表示为:

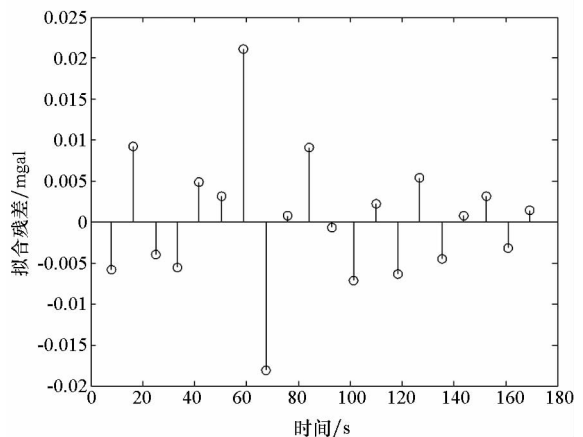
$$\bar{\lambda}_{(m+1) \times 1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \delta \bar{g}_{n \times 1} \quad (15)$$

图 1 所示为沿弹道扰动引力最小二乘拟合仿真结果。其中, 拟合多项式为 5 阶, 拟合点个数为 6。图 1 中仅显示 y 方向拟合效果 ($1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$), 对于 x 方向和 z 方向也有相似的结果。



(a) 拟合曲线与实际曲线

(a) Comparison of fitting curve and actual curve



(b) 拟合残差图

(b) Fitting residual diagram

图 1 y 方向扰动引力拟合效果

Fig. 1 Fitting effect diagram of disturbing gravity in y direction

图1所示结果表明采用多项式拟合方法求解沿弹道助推段扰动引力精度较高,拟合残差小于 $3 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ 。

3 误差传播解析解

3.1 解析公式推导

将式(13)代入式(9),然后进行积分即可获得弹道助推段扰动引力对导弹关机点状态影响的解析计算公式。

$$\begin{cases} \delta v_{kx}(t_k) = \sum_{j=0}^5 (C_{vxj}\lambda_{xj} + D_{vxj}\lambda_{yj}) \\ \delta v_{ky}(t_k) = \sum_{j=0}^5 (C_{vyj}\lambda_{yj} + D_{vyj}\lambda_{xj}) \\ \delta v_{kz}(t_k) = \sum_{j=0}^5 C_{vzj}\lambda_{zj} \\ \delta x_k(t_k) = \sum_{j=0}^5 C_{xj}\lambda_{xj} \\ \delta y_k(t_k) = \sum_{j=0}^5 C_{yj}\lambda_{yj} \\ \delta z_k(t_k) = \sum_{j=0}^5 C_{zj}\lambda_{zj} \end{cases} \quad (16)$$

且有

$$\begin{cases} C_{vx0} = \sin(n_b t_p) / n_b \\ C_{vx1} = [1 - \cos(n_b t_p)] / n_b^2 \\ C_{vx2} = 2 \times [n_b t_p - \sin(n_b t_p)] / n_b^3 \\ C_{vx3} = 3 \times [-2 + n_b^2 t_p^2 + 2\cos(n_b t_p)] / n_b^4 \\ C_{vx4} = 4 \times [-6n_b t_p + n_b^3 t_p^3 + 6\sin(n_b t_p)] / n_b^5 \\ C_{vx5} = 5 \times [24 - 12n_b^2 t_p^2 + n_b^4 t_p^4 - 24\cos(n_b t_p)] / n_b^6 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} D_{vx0} = 252n_b^2 t_p^3 / 2835 \\ D_{vx1} = 231n_b^2 t_p^4 / 11\ 340 \\ D_{vx2} = 87n_b^2 t_p^4 / 11\ 340 \\ D_{vx3} = 333n_b^2 t_p^5 / 90\ 720 \\ D_{vx4} = 184\ 333n_b^2 t_p^6 / 90\ 720 \\ D_{vx5} = 7n_b^2 t_p^7 / 5670 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} D_{vyi} = D_{vxi} \\ C_{vzi} = C_{vxi} \\ C_{zi} = C_{xi} \end{cases} \quad i=0,1,\dots,5 \quad (19)$$

$$\begin{cases} C_{vy0} = \sinh(\sqrt{2}n_b t_p) / (\sqrt{2}n_b) \\ C_{vy1} = [\cosh(\sqrt{2}n_b t_p) - 1] / (2n_b^2) \\ C_{vy2} = [-2n_b t_p + \sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (2n_b^3) \\ C_{vy3} = 3[-1 - n_b^2 t_p^2 + \cosh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (2n_b^4) \\ C_{vy4} = [-2n_b t_p(3 + n_b^2 t_p^2) + 3\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}n_b t_p)] / n_b^5 \\ C_{vy5} = -5[6 + 6n_b^2 t_p^2 + n_b^4 t_p^4 - 6\cosh(\sqrt{2}n_b t_p)] / n_b^6 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} C_{x0} = [1 - \cos(n_b t_p)] / n_b^2 \\ C_{x1} = [n_b t_p - \sin(n_b t_p)] / n_b^3 \\ C_{x2} = [-2 + n_b^2 t_p^2 + 2\cos(n_b t_p)] / n_b^4 \\ C_{x3} = [-6n_b t_p + n_b^3 t_p^3 + 6\sin(n_b t_p)] / n_b^5 \\ C_{x4} = [24 - 12n_b^2 t_p^2 + n_b^4 t_p^4 - 24\cos(n_b t_p)] / n_b^6 \\ C_{x5} = [120 \times [n_b t_p - \sin(n_b t_p)] - 20n_b^3 t_p^3 + n_b^5 t_p^5] / n_b^7 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} C_{y0} = [\cosh(\sqrt{2}n_b t_p) - 1] / (2n_b^2) \\ C_{y1} = [-2n_b t_p + \sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (4n_b^3) \\ C_{y2} = [-1 - n_b^2 t_p^2 + \cosh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (2n_b^4) \\ C_{y3} = [6n_b t_p + 2n_b^3 t_p^3 - 3\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (4n_b^5) \\ C_{y4} = [6 + 6n_b^2 t_p^2 + n_b^4 t_p^4 - 6\cosh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (2n_b^6) \\ C_{y5} = [30n_b t_p + 10n_b^3 t_p^3 + n_b^5 t_p^5 - 15\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}n_b t_p)] / (2n_b^7) \end{cases} \quad (22)$$

其中, $t_p = t_k / 10$ 。

3.2 仿真分析

标准弹道采用国外某公开的弹道导弹参数进行仿真,导弹发射点参数见表1。导弹助推段关机时间为177 s。

表1 导弹发射点参数

Tab.1 Launching point parameter of missile

大地经度/(°)	大地纬度/(°)	高度/m	方位角/(°)
87.5 E	30.5 N	5584	60.0

为了验证解析公式的计算精度,将其与数值积分结果进行对比。仿真结果如图2所示。

方法1:弹道求差法,即在对弹道进行数值积分时分别采用正常引力模型(考虑到J2项)和考虑了高阶扰动引力的引力模型,而后对两条弹道状态量(发射惯性系中速度和位置)等时求差。该方法求解精度最高,误差源仅为计算机本身计算误差,可以作为其他分析方法精度评估的参照。

方法 2: 不考虑视加速度与扰动引力耦合影响的弹道误差传播解析计算模型, 即采用式 (16) 进行计算。

图 2 所示为上述两种方法在求解扰动引力引起的弹道助推段状态偏差 $\Delta\bar{X}$ 随时间的变化曲线对比图, 其中 $\Delta\bar{X}$ 均在发射惯性系中表达。

结果表明, 解析公式解算的结果与弹道求差法的结果基本一致, 只是在 x 方向和 z 方向精度略差。分析表明, 式 (16) 计算精度略差主要是由于没有考虑扰动引力与视加速度之间的耦合影响, 下面讨论对上述耦合项进行补偿修正的方法。

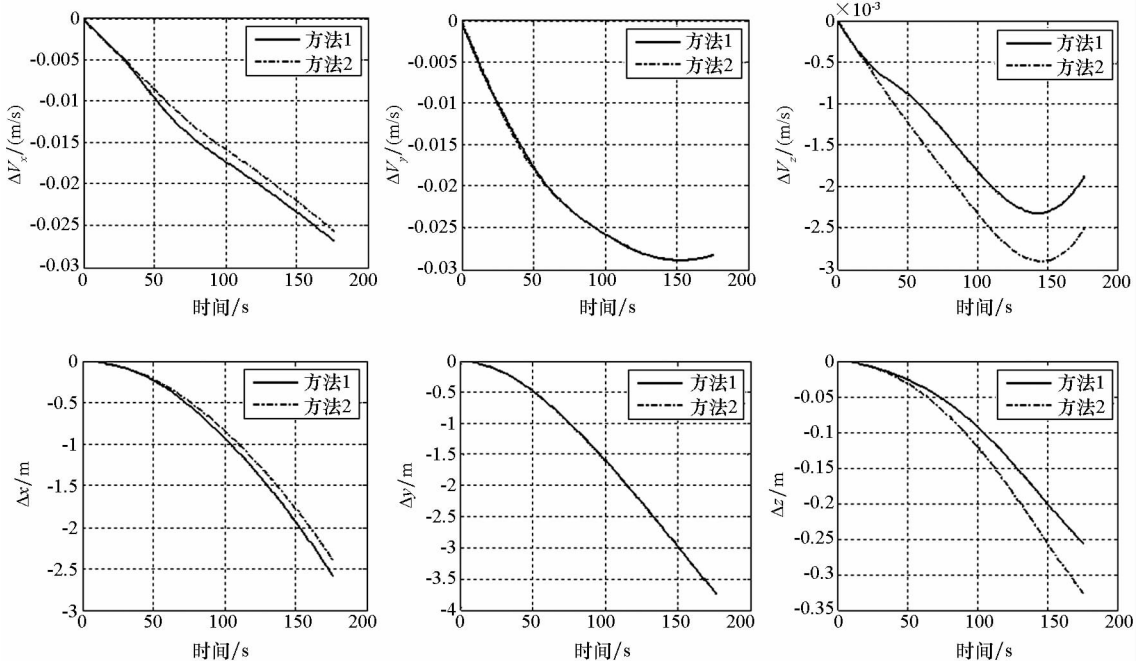


图 2 解析法与求差法计算结果对比

Fig. 2 Comparison of analytical method and numerical method

4 耦合项补偿

4.1 补偿策略

如前所述, 式 (16) 的计算结果没有考虑扰动引力与视加速度之间的耦合影响。推导考虑耦合因素影响的弹道误差传播解析解需要在 $Q \neq 0_{6 \times 6}$ 的条件下求解式 (6) 的状态转移矩阵解析解。实际推导中发现, 由于矩阵 Q 相当复杂, 致使很难直接得到状态转移矩阵的解析表达式。

提出一种“附加补偿 + 迭代修正”的思路来解决考虑耦合项的弹道误差传播解析求解问题, 具体思路为: 将扰动引力引起的视加速度偏差 $\delta\dot{\bar{W}}$ 视为扰动引力 $\delta\bar{g}$ 的附加补偿量, 并通过有限次迭代修正不断逼近数值积分计算的结果。具体流程如图 3 所示。其中 $\Delta\bar{X}_{ki}$ 表示关机点状态偏差, \overline{Eps} 为容许误差矢量。

下面给出由状态偏差 $\Delta\bar{X}_i$ 求解视加速度偏差 $\delta\dot{\bar{W}}$ 的具体表达式。

视加速度由气动力和发动机推力两部分组

成, 故而视加速度偏差可表示为:

$$\delta\dot{\bar{W}} = \delta\bar{R} + \delta\bar{T} \quad (23)$$

式中, \bar{R} 和 \bar{T} 分别为气动力和发动机推力。

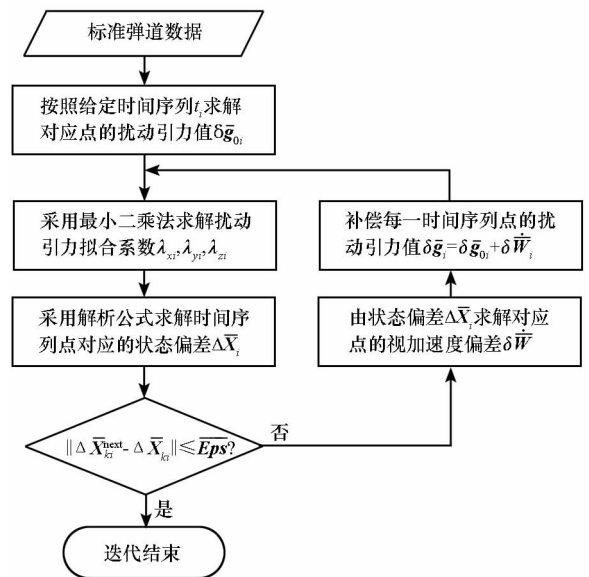


图 3 考虑耦合项的迭代修正流程图

Fig. 3 Iterative correction flow chart

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S_m \\ C_y \frac{1}{2} \rho v^2 S_m \\ C_z \frac{1}{2} \rho v^2 S_m \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\dot{m}u_e + S_e(p_e - p_H) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (24)$$

其中, C_x 、 C_y 、 C_z 分别为阻力系数、升力系数和侧力系数, ρ 为大气密度, v 为飞行器相对大气的速度, S_m 为弹体最大横截面积, m 为弹体质量, u_e 为排气速度, S_e 为喷口截面积, p_e 为排气端面压力, p_H 为当地大气压力。

记 \mathbf{M}_v 为 $\bar{\mathbf{R}}$ 对速度矢量的偏导数, \mathbf{M}_r 为 $\bar{\mathbf{R}}$ 对位置矢量的偏导数, 其具体表达式为:

$$\mathbf{M}_v = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{V}^T} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{cases} M_1 = -C_x \rho v_x \\ M_2 = -C_x \rho v_y \\ M_3 = -C_x \rho v_z \\ M_4 = C_y^\alpha \rho \left[\alpha v_x + \frac{v^2 v_y}{2(v_x^2 + v_y^2)} \right] \\ M_5 = C_y^\alpha \rho \left[\alpha v_y - \frac{v^2 v_x}{2(v_x^2 + v_y^2)} \right] \\ M_6 = C_y^\alpha \rho \alpha v_z \\ M_7 = C_z^\beta \rho \left(\beta v_x - \frac{v_x v_z}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right) \\ M_8 = C_z^\beta \rho \left(\beta v_y - \frac{v_y v_z}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right) \\ M_9 = C_z^\beta \rho \left(\beta v_z + \frac{v^2}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right) \end{cases} \quad (26)$$

且有,

$$\mathbf{M}_r = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{p}^T} = \frac{S_m}{m} \begin{bmatrix} 0 & -C_x \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 \\ 0 & C_y^\alpha \alpha \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 \\ 0 & C_z^\beta \beta \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中, α 与 β 分别为攻角和侧滑角, C_y^α 和 C_z^β 分别为升力系数对攻角的导数和侧力系数对侧滑角的导数。

记 \mathbf{N}_r 为 $\bar{\mathbf{T}}$ 对位置矢量的偏导数。

$$\mathbf{N}_r = \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{p}^T} = \frac{S_e}{m} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial p_H}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

综合上述方程可得视加速度摄动方程为:

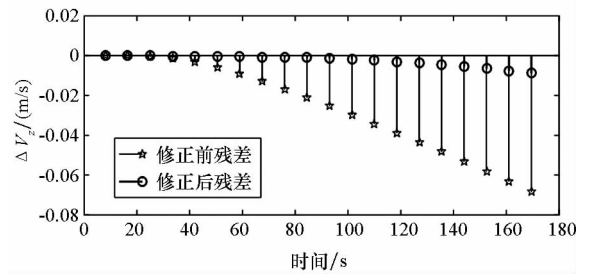
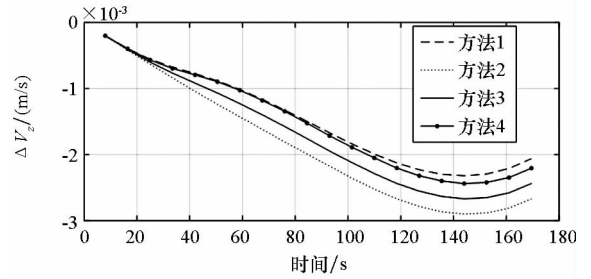
$$\delta \dot{\mathbf{W}} = [\mathbf{M}_v \quad \mathbf{M}_r + \mathbf{N}_r] \Delta \bar{\mathbf{X}} \quad (29)$$

4.2 仿真分析

仿真初始条件与 3.2 节中所述一致。同样对图 4 中给出的四种方法加以说明。其中, 前两种方法(即方法 1 和方法 2)3.2 节已做说明。

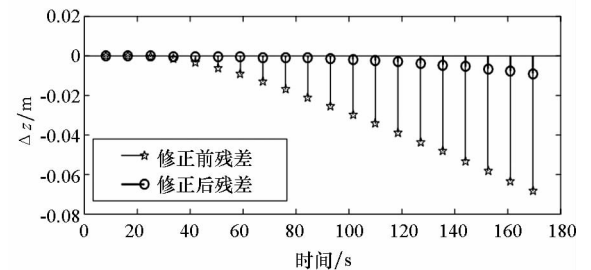
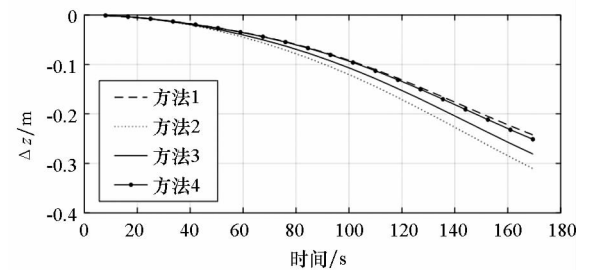
方法 3: 改进的弹道误差传播解析计算模型, 即对扰动引力与视加速度耦合影响迭代补偿后的弹道误差解析计算模型, 且迭代 1 次。

方法 4: 改进的弹道误差传播解析计算模型, 且迭代 2 次。



(a) z 向速度偏差

(a) Velocity deviation of z direction



(b) z 向位置偏差

(b) Position deviation of z direction

图 4 不同方法状态偏差计算结果及残差对比图

Fig. 4 Comparison of different methods in calculating results and residual error

图 4 所示为采用上述 4 种方法求解扰动引力引起的弹道助推段状态 z 向偏差 Δv_z 及 Δz 随时间的变化对比图以及改进前后模型计算残差对比图。图 4 表明,改进后的弹道助推段误差传播解析计算模型计算精度有很大提升,模型计算残差减小为原来的 1/3,且迭代 2 次的效果比迭代 1 次的效果要好。 x 向及 y 向也有类似的修正效果。

表 2 所示为不同方法计算耗时情况,显然解析法在计算耗时方面相对数值积分求差法有很大优势,约为后者的 1/10;同时,考虑扰动引力与视加速度耦合影响修正的解析法较原有解析法在耗时方面略有增加,但不明显。

表 2 不同方法仿真时间对比

Tab. 2 Consumption time of different methods

	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
计算耗时/s	120.473	10.367	11.554	12.811

5 结论

弹道助推段误差传播快速计算模型是实现弹道扰动引力场影响补偿的基础和前提,基于此,本文主要完成了如下内容:

1) 基于弹道摄动思想及线性系统理论构建了考虑扰动引力影响的弹道助推段误差传播解析计算模型;

2) 考虑了扰动引力与视加速度项之间的耦合影响,并将扰动引力引起的视加速度偏差视为扰动引力的附加补偿项,并采用逐次迭代的思路逐步修正原有结果;

3) 对解析模型及修正后的解析模型的精度及计算耗时进行了仿真验证,并与数值积分求差法的结果进行了对比。仿真结果表明,修正前的解析法计算结果基本反映了弹道助推段误差传播的趋势,但计算精度略差;修正后的解析法计算精度有很大提升,计算残差减小为原来的 1/3。同时,解析法在计算耗时方面相对数值积分求差法有很大优势,约为后者的 1/10。

总的来说,本文的工作为弹道导弹扰动引力场影响补偿这一研究课题中的基础研究部分,可以为弹道助推段扰动引力场影响补偿研究提供支撑。

参考文献 (References)

[1] 郑伟. 地球物理摄动因素对远程弹道导弹命中精度的影

响分析及补偿方法研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2006.

ZHENG Wei. Research on effect of geophysical disturbance factors and the compensation method for hit accuracy of long-range ballistic missile [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2006. (in Chinese)

[2] 马宝林, 张洪波, 郑伟, 等. 地球扰动引力对弹道导弹命中精度影响的等效补偿理论 [J]. 国防科技大学学报, 2016, 38(4): 153-158.

MA Baolin, ZHANG Hongbo, ZHENG Wei, et al. Equivalent compensation theory of the earth disturbance gravity on ballistic missile hit accuracy [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2016, 38(4): 153-158. (in Chinese)

[3] 潘新祥, 徐晓东. 球谐函数法解地球扰动引力并行计算方法 [J]. 指挥控制与仿真, 2013, 35(4): 77-80.

PAN Xinxiang, XU Xiaodong. Parallel computing research on the spherical harmonic model for solution of the disturbing gravitation problem [J]. Command Control & Simulation, 2013, 35(4): 77-80. (in Chinese)

[4] 谢逾, 郑伟, 汤国建. 弹道导弹全程扰动引力快速赋值方法 [J]. 弹道学报, 2011, 23(3): 18-23.

XIE Yu, ZHENG Wei, TANG Guojian. Research on fast assignment of gravity disturbance for full-range trajectory of ballistic missile [J]. Journal of Ballistics, 2011, 23(3): 18-23. (in Chinese)

[5] Zhou H, An X Y, Zheng W, et al. Fast local representation of gravity anomaly along flight trajectory [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2016, 230(7): 1201-1215.

[6] Battin R H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics [M]. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999.

[7] Cefola P, Proulx R J. Application of the semi analytical satellite theory to shallow resonance orbits [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 1991, 75(1): 94.

[8] Salama A H. Analytical evaluation of mascon effects in a semi-analytic theory [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 1992, 76(3): 2173-2189.

[9] Schaub H, Alfriend K T. Hybrid cartesian and orbit element feedback law for formation flying spacecraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(2): 387-393.

[10] 陈国强. 远程弹道导弹误差传播特性 [J]. 宇航学报, 1984, 5(3): 50-65.

CHEN Guoqiang. Error propagation properties for ICBM [J]. Journal of Astronautics, 1984, 5(3): 50-65. (in Chinese)

[11] 任莹. 地球外部空间扰动引力对弹道导弹运动的影响——对被动段运动的影响 [J]. 国防科技大学学报, 1984(7): 63-82.

REN Xuan. The influence of gravity anomaly on motion of the ballistic missile—influence on unpowered-flight phase [J]. Journal of National University of Defense Technology, 1984(7): 63-82. (in Chinese)

[12] 郑伟, 汤国建. 扰动引力场中弹道导弹飞行力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2009: 35-40.

ZHENG Wei, TANG Guojian. Flight dynamics of ballistic missile in gravity anomaly field [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009: 35-40. (in Chinese)