

机体/推进一体化飞行器动导数频域计算方法*

柴振霞,刘伟,刘绪,杨小亮

(国防科技大学空天科学学院,湖南长沙 410073)

摘要:运用 Etkin 非定常气动力模型,将谐波平衡法应用于复杂外形动导数辨识。计算结果表明:谐波平衡法和时域方法的动导数辨识结果一致,与实验值吻合,验证了程序的正确性和谐波平衡法的可靠性。采用谐波平衡法对类 X-51 高超声速机体/推进一体化飞行器 WR-A 进行动导数辨识,并与时域方法的计算结果比较,考察了该方法在复杂外形下数值模拟非定常流动和动导数辨识的能力。实验结果表明:对于 WR-A 这种复杂外形飞行器,谐波平衡法也能在保证精度的同时具有较高的计算效率。

关键词:高超声速飞行器;谐波平衡法;时域方法;数值模拟;动导数

中图分类号:V211.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)03-030-07

Frequency domain method for computing dynamic derivatives of airframe/propulsion integrative vehicle

CHAI Zhenxia, LIU Wei, LIU Xu, YANG Xiaoliang

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: With the help of the unsteady Etkin aerodynamic model, the harmonic balance method to calculate the dynamic derivatives of complicated configuration was applied. The dynamic derivatives solved by harmonic balance method agree well with the results of time domain method and experimental data, which verified the correctness of codes and the reliability of the harmonic balance method. The harmonic balance method was applied to compute the dynamic derivatives of X-51 hypersonic airframe/propulsion integrative vehicle namely WR-A. A comparison was made with the time domain method to verify the ability of the harmonic balance method for the numerical simulation of unsteady flows around the complicated model and the ability of the computing dynamic derivatives. Results show that even for the vehicle WR-A of the complex configuration, the harmonic balance method was computationally accurate and efficient.

Key words: hypersonic vehicle; harmonic balance method; time domain method; numerical simulation; dynamic derivatives

动态气动导数是高超声速飞行器控制系统设计和动态品质分析的重要参数,快速准确预测动导数对于高超声速飞行器的设计与安全至关重要^[1]。

目前,获取动导数的方法主要有实验模拟、理论计算和数值模拟方法。实验模拟难度大、周期长。理论分析只适用于简单流动,非线性问题分析十分困难。从国内外发展趋势来看,采用计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)方法获取动导数已经成为当前飞行器动态稳定性研究中一种最现实、最有效的方式,且计算结果接近飞行试验结果^[2]。数值计算方法中,采用直接求解 Euler/Navier-Stokes 方程确定动态稳定性导数的时域方法(Time Domain Method, TDM)在一定

范围内取得了成功。但对机体/推进一体化复杂外形飞行器,计算网格量通常能够达到千万量级以上,时域方法计算时间长,不能满足工程型号设计的快速计算需求,特别是对低频长周期问题。

近年来,基于频域的一些研究方法,如谐波平衡法(Harmonic Balance Method, HBM)在非定常流动数值模拟中得到了快速发展。谐波平衡法是由 Hall 等^[3]针对涡流机叶片绕流问题提出的,并模拟了二维涡轮叶片绕流。其计算结果表明,谐波平衡法计算高效,比时域方法至少高一到两个量级,即使是强非线性流动也可在较少谐波数下得到工程要求的精度。Gopinath 等^[4]提出了时间谱方法(Time Spectral Method, TSM),用于数值求解周期性非定常问题,该方法在本质上与谐波平衡法是相

* 收稿日期:2017-04-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11502292);国防科技大学重大应用基础研究资助项目(ZDYYJCYJ20140101);国防科工局国防基础科研计划资助项目(C1520110002)

作者简介:柴振霞(1989—),女,山东德州人,博士研究生,E-mail:chaizhenxia@sina.cn;

刘伟(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:fishfather6525@sina.com

同的。谐波平衡法在各种工程问题中得到了广泛应用,如涡轮叶片扰流问题^[5-6]、翼型及机翼在跨声速流动时的极限环振动和颤振问题^[7-9]、直升机旋翼绕流问题^[10-11]以及圆柱绕流问题^[12]等。在动导数预测方面,Murman等^[13]将谐波平衡法应用于预测 Finner 及标准动态模型(Standard Dynamics Model, SDM)的动导数;Ronch等^[14]考察了线性频域方法和谐波平衡法在数值预测动导数方面的能力和局限性;Hassan等^[15]将谐波平衡法应用到超声速导弹和民航飞机模型俯仰动导数预测,计算结果均表明该方法能够在保证精度的同时大幅度减少计算时间。陈琦等^[16]将谐波平衡法应用于超声速导弹外形的动导数快速预测,取得了较好的结果。谢立军等^[17]采用时间谱方法对高超声速导弹标模(Hyper Ballistic Shape, HBS)和 Finner 标模进行计算,并分析研究了攻角和马赫数对动导数的影响规律。总体来看,国内采用谐波平衡法进行动导数计算的研究还比较少,还需要进一步深入探讨。

本文以雷诺平均纳维-斯托克斯(Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS)方程为控制方程,介绍了谐波平衡法的理论,并对 HBS 标准模型进行了动导数辨识,以实验结果及时域方法的计算结果为参考,验证考察谐波平衡法及软件的可靠性。将谐波平衡法应用于类 X-51 机体/推进一体化飞行器的动导数计算,考察该方法在复杂外形下数值模拟非定常流动和动导数辨识的能力。

1 计算方法

1.1 控制方程

一般曲线坐标系下,有限体积离散的无量纲 RANS 可以写为:

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{R}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T$ 为守恒变量, J 为坐标变换的雅克比行列式, $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ 为残差向量。具体形式参考文献[18]。

1.2 谐波平衡法

对于周期性流动,任意的变量 \mathbf{Q} 和残差 $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ 可以用有限阶傅里叶级数表示为:

$$\begin{cases} Q(t) \approx \hat{Q}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} [\hat{Q}_{cn} \cos(\omega n t) + \hat{Q}_{sn} \sin(\omega n t)] \\ R(t) \approx \hat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} [\hat{R}_{cn} \cos(\omega n t) + \hat{R}_{sn} \sin(\omega n t)] \end{cases} \quad (2)$$

其中, N_H 称为谐波数。

将式(2)代入式(1),整理得频域谐波平衡方程

$$J^{-1} \omega \mathbf{A} \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (3)$$

其中, \mathbf{A} 是系数矩阵,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Q}} = [\hat{Q}_0 & \hat{Q}_{c1} & \cdots & \hat{Q}_{cN_H} & \hat{Q}_{s1} & \cdots & \hat{Q}_{sN_H}]^T \\ \hat{\mathbf{R}} = [\hat{R}_0 & \hat{R}_{c1} & \cdots & \hat{R}_{cN_H} & \hat{R}_{s1} & \cdots & \hat{R}_{sN_H}]^T \end{cases} \quad (4)$$

直接求解式(3)比较困难。Hall等^[3]引入离散傅里叶变换将式(3)转换回时域求解。

设 \mathbf{Q} 为一个周期内 $2N_H + 1$ 个等时间间隔时刻的流场变量, \mathbf{R} 为对应的残差向量,则有

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = [Q(t_0 + \Delta T) & Q(t_0 + 2\Delta T) & \cdots & Q(t_0 + T)]^T \\ \mathbf{R} = [R(t_0 + \Delta T) & R(t_0 + 2\Delta T) & \cdots & R(t_0 + T)]^T \end{cases} \quad (5)$$

其中, T 为时间周期, $\Delta T = T/N_T$, $N_T = 2N_H + 1$ 。

由离散傅里叶变换可知

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} \mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{E} \mathbf{R} \end{cases} \quad (6)$$

其中, \mathbf{E} 是离散傅里叶变换矩阵。

将式(6)代入式(3)并乘 \mathbf{E}^{-1} , 可得时域谐波平衡方程

$$J^{-1} \omega \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}$ 是系数矩阵, $J^{-1} \omega \mathbf{D} \mathbf{Q}$ 为谐波源项。因为 $J^{-1} \omega \mathbf{D} \mathbf{Q} \approx \partial \mathbf{Q} / \partial t$, $J^{-1} \omega \mathbf{D} \mathbf{Q}$ 又被称为时间导数项的谱算子^[3], 故谐波平衡法又称为时间谱方法。

求解式(7)比直接求解式(3)容易得多,引入虚拟时间导数项来推进求解。

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + J^{-1} \omega \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (8)$$

对 $t_n = t_0 + n\Delta T$ 时刻所有的守恒变量 Q_n , 谐波平衡法求解的方程为:

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial \tau} + \mathbf{R}_n + \mathbf{S}_n = \mathbf{0} \quad (9)$$

式中, \mathbf{R}_n 为该时刻的残差向量,

$$\mathbf{Q}_n = [\rho(t_n), \rho u(t_n), \rho v(t_n), \rho w(t_n), \rho e(t_n)]^T$$

$$\mathbf{S}_n = J^{-1} \omega \sum_{m=1}^{N_T} \mathbf{D}_{n,m} \mathbf{Q}_m \quad (10)$$

由于 $n = 1, 2, \dots, N_T$, 上式实际上包含 $5N_T$ 个方程。采用文献[18]中的数值方法对式(9)进行离散求解,可得一个周期内 N_T 个时刻的流场,进而计算得到 N_T 个时刻的气动力 \mathbf{C}_m 。

对于周期性流动,气动力也可用有限阶傅里叶级数表示为:

$$C_m(t) \approx \hat{C}_{m0} + \sum_{n=1}^{N_H} [\hat{C}_{m, cn} \cos(\omega n t) + \hat{C}_{m, sn} \sin(\omega n t)] \quad (11)$$

由离散傅里叶变换可知

$$\hat{C}_m = EC_m \quad (12)$$

其中, \hat{C}_m 为气动力的傅里叶系数向量, 将其代入式(11)可重建气动力 $C_m(t)$ 。

1.3 时域方法

时域计算采用国防科技大学刘伟教授团队开发的飞行器动态特性研究程序(Aircraft Dynamic Characteristics Research Program, ADCRP)。课题组采用系列标模外形对该程序进行了系统的验证计算,其时域计算精度可达到二阶。在 ADCRP 中,时域计算采用含“双时间”步的隐式方法离散式(1),可得:

$$\left[\frac{3}{2\Delta t/J^{-1}} + \frac{1}{\Delta \tau/J^{-1}} + (\delta_\xi A + \delta_\eta B + \delta_\zeta C)^p \right] \Delta Q^p = -R(Q^p) - \frac{3Q^p - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t/J^{-1}} \quad (13)$$

式中, A 、 B 、 C 为无黏通量的 Jacobi 矩阵, n 表示真实时刻, p 表示虚拟时刻, Δt 为真实时间步长, $\Delta \tau$ 为虚拟时间步长。

采用隐式上下对称高斯赛德尔(Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel, LU-SGS)算法求解式(13),具体参考文献[18]。

1.4 动导数强迫振动辨识方法

飞行器做单自由度的俯仰运动时,根据 Etkin 非定常气动力模型^[19]可知,俯仰力矩系数可写为:

$$C_m = C_m(\alpha(t), \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots) \quad (14)$$

式中, α 为攻角, q 为俯仰角速度。

给定俯仰强迫振动方程:

$$\begin{cases} \theta = \alpha = \theta_m \sin(kt) \\ q = \dot{\theta} \end{cases} \quad (15)$$

其中, θ 为俯仰角, θ_m 为振幅, k 为减缩频率。

将式(14)展开成泰勒级数并忽略高阶小量,得

$$C_m(t) = C_{m0} + C_{m_\theta} \Delta \theta + C_{m_{\dot{\theta}}} \Delta \dot{\theta} \quad (16)$$

当 k 较小时,近似有

$$\begin{cases} C_{m_\theta} \approx C_{m_\alpha} \\ C_{m_{\dot{\theta}}} \approx C_{m_{\dot{\alpha}}} + C_{m_q} \end{cases} \quad (17)$$

其中, C_{m_θ} 为俯仰静导数, $C_{m_{\dot{\theta}}}$ 为俯仰动导数。

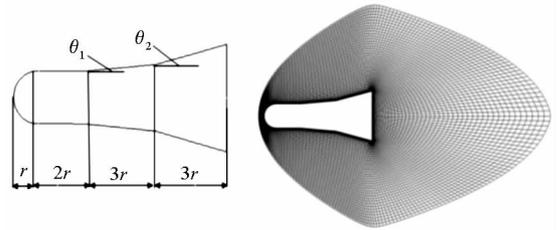
可以通过积分计算 C_{m_θ} 和 $C_{m_{\dot{\theta}}}$ 。

$$\begin{cases} C_{m_\theta} = \frac{k}{\theta_m \pi} \int_{t_s}^{t_s+T_c} C_m(t) \sin(kt) dt \\ C_{m_{\dot{\theta}}} = \frac{1}{\theta_m \pi} \int_{t_s}^{t_s+T_c} C_m(t) \cos(kt) dt \end{cases} \quad (18)$$

其中, t_s 为积分起始时刻, T_c 为振动周期。

2 HBS 模型强迫俯仰振动动导数辨识

HBS 模型是典型的高超声速外形^[20],图 1 为其计算外形以及对称面网格。其中, $r = 12.5 \text{ mm}$, $\theta_1 = 5^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$ 。计算网格量约为 25 万。计算条件:来流马赫数 $M_\infty = 6.85$,以头部直径为参考长度的雷诺数 $Re_d = 0.72 \times 10^6$ 。



(a) HBS 外形 (a) Shape of HBS
(b) 对称面网格 (b) Mesh of symmetry

图 1 HBS 外形及对称面网格

Fig. 1 Shape of HBS and mesh of plane of symmetry

强迫俯仰振动形式为:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m \sin(kt) \quad (19)$$

式中, α 为瞬时攻角, α_0 为初始攻角, α_m 为振幅, k 为无量纲减缩频率。

2.1 不同攻角下强迫俯仰振动动导数辨识

取初始攻角 $\alpha_0 = 0^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 13.5^\circ, 16^\circ, 20^\circ$, 振幅 $\alpha_m = 1^\circ$, 减缩频率 $k = 0.05$ 。

谐波平衡法计算时,迭代 2000 步左右基本收敛。图 2 是攻角 $\alpha_0 = 13.5^\circ$ 时,谐波平衡法在 $N_H = 1, 2, 3$ 时计算的俯仰力矩系数迟滞曲线与时域方法计算结果的比较。从图 2 中可以看出,谐波数 $N_H = 1$ 时,重建的迟滞曲线与时域方法的计算结果相比有明显误差。当 $N_H = 2, 3$ 时,重建的迟滞曲线与时域方法的计算结果基本重合。

图 3 为不同攻角下谐波平衡法与时域方法计算的俯仰动导数,并给出了文献[20]中的实验结果(Exp)。实验结果的误差带为 $\pm 15\%$ 。从图 3 可以看出,谐波平衡法和时域方法的计算结果基本重合,且与实验数据较为吻合。计算结果验证了程序的正确性和谐波平衡法计算动导数的可靠性。

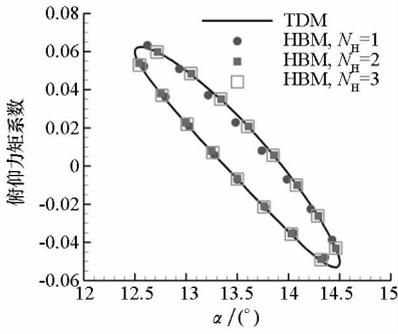


图2 重建俯仰力矩系数迟滞曲线与时域方法的比较

Fig.2 Comparison of HBM reconstructed C_m polars with TDM simulation result

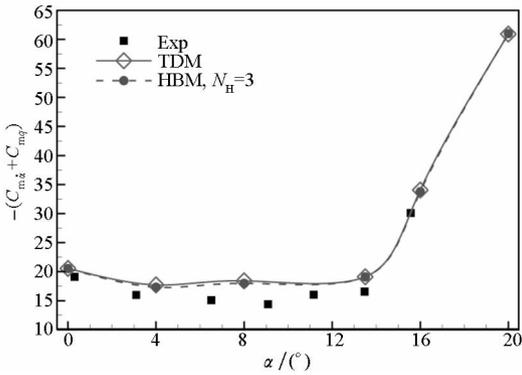


图3 俯仰动导数辨识结果

Fig.3 Pitching dynamic derivatives around different angles of attack

2.2 不同减缩频率下强迫俯仰振动动导数辨识

考察一定范围内,减缩频率对谐波平衡法动导数计算的影响。取减缩频率 $k = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1$, 初始攻角 $\alpha_0 = 13.5^\circ$, 振幅 $\alpha_m = 1^\circ$ 。谐波平衡法计算时取谐波数 $N_H = 3$ 。计算得到的俯仰阻尼静导数和动导数见表1。从计算结果可以看出,谐波平衡法在不同减缩频率下辨识的动导数与时域方法有相同精度。

表1 不同减缩频率下的俯仰力矩导数

Tab.1 Dynamic derivatives of different reduced frequencies

k	TDM		HBM	
	静导数	动导数	静导数	动导数
0.001	-3.250	-19.166	-3.252	-18.626
0.01	-3.245	-18.948	-3.250	-19.345
0.05	-3.172	-19.119	-3.167	-19.098
0.1	-2.916	-19.166	-2.926	-19.200

表2列出了谐波平衡法和时域方法在不同减缩频率下的计算时间。由表2可知,随着减缩频

率的减小,时域方法的计算时间成倍增加,而谐波平衡法的计算时间受减缩频率的影响较小。 $k = 0.001$ 时,谐波平衡法在 $N_H = 3$ 时的计算时间仅约为时域计算的0.5%。因此,和时域方法相比,对于低频长周期问题,谐波平衡法有明显优势。

表2 不同减缩频率下的计算时间统计

Tab.2 Computation times of different reduced frequencies

方法	计算时间/h		
	$k = 0.05$	$k = 0.01$	$k = 0.001$
HBM, $N_H = 1$	1.02	1.05	1.00
HBM, $N_H = 2$	1.77	1.73	1.68
HBM, $N_H = 3$	2.59	2.51	2.41
TDM	9.365	47.575	495.64

3 类X-51 机体/推进一体化飞行器动导数辨识

高超声速飞行器的发展水平是一个国家综合实力的集中体现,美国在高超声速机体飞行器发展中投入了巨大的人力物力,提出了系列高超声速飞行器研制计划,特别是高超声速机体/推进一体化飞行器。本文计算采用的气动外形WR-A是以美国X-51A乘波飞行器^[21]为参考设计而成的,其外形及内流道如图4和图5所示。

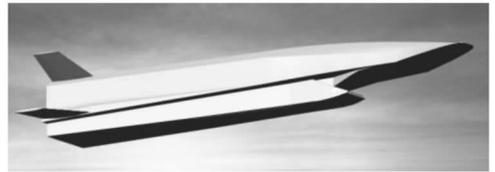


图4 WR-A“驭波者”

Fig.4 “Waverider” of WR-A



图5 WR-A内流道设计示意图

Fig.5 Internal flow path design of WR-A

以飞行器全长 $L = 4.2672\text{ m}$ 作为计算气动力的参考长度,参考面积为 0.1657 m^2 。质心位置为 $(2.1983\text{ m}, 0\text{ m}, 0\text{ m})$ 。来流马赫数 $Ma = 6.5$,飞行高度为 24384 m 。采用Gridgen网格软件生成多块结构化网格(如图6所示),网格总量为4271万,共划分为208块。

3.1 非定常流场计算及动导数辨识

分别采用谐波平衡法和时域方法数值模拟WR-A外形做强迫俯仰振动时的非定常流场并

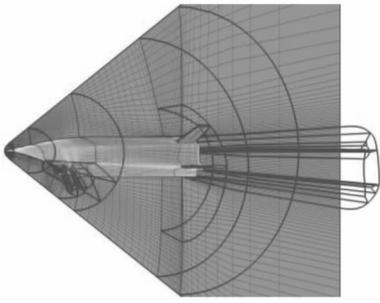


图 6 WR - A 对称面网格及拓扑结构

Fig. 6 Symmetric plane mesh and topological structure of WR - A

对不同攻角下的俯仰动导数进行辨识。强迫俯仰振动的振幅 $\alpha_m = 1^\circ$, 减缩频率 $k = 0.0162$ 。时域方法计算时, 亚迭代收敛指标为残差下降两个量级, 无量纲时间步长 dt 在 $0.01 \sim 0.1$ 之间。

图 7 为攻角 $\alpha_0 = 4^\circ$ 的状态下, 谐波平衡法在不同谐波数下计算的俯仰力矩系数迟滞曲线和时域方法的计算结果。由图 7 可知, 谐波平衡法在谐波数取 3 时得到的力矩系数迟滞曲线与时域方法的计算结果能够较好地吻合。

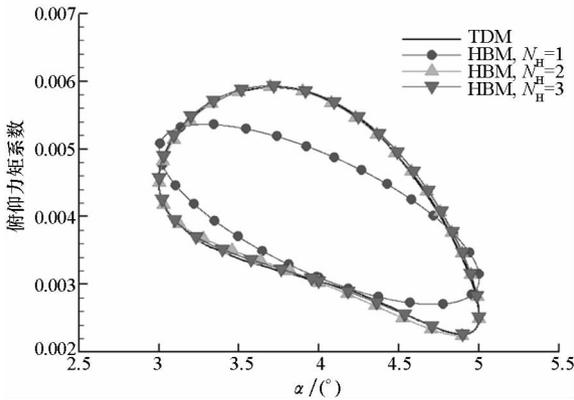


图 7 俯仰力矩系数迟滞曲线随谐波数的变化

Fig. 7 Pitch moment coefficient hysteresis curves varying with harmonics

图 8 为谐波数取 3 时谐波平衡法计算得到的 $t = T$ 时刻的对称面马赫数云图及压力等值线。从图 8 中可以看出, 谐波平衡法可以清晰地捕捉飞行器外部和内部流场的激波系结构及流动特征。

在攻角为 $-8^\circ \sim 8^\circ$ 范围之间, 给出了谐波平衡法和时域方法计算的俯仰力矩系数曲线, 如图 9 ~ 10 所示。其中, 谐波平衡法计算取 $N_H = 3$ 。由两图可知, 两种方法的计算结果吻合较好。图 10 中的迟滞环并不全是倾斜光滑的椭圆形状, 说明 WR - A 乘波体的俯仰力矩系数具有较强的非线性特征。



图 8 $t = T$ 时刻对称面马赫数云图及压力等值线

Fig. 8 Symmetric surface Mach number nephogram and pressure contour at $t = T$ moment

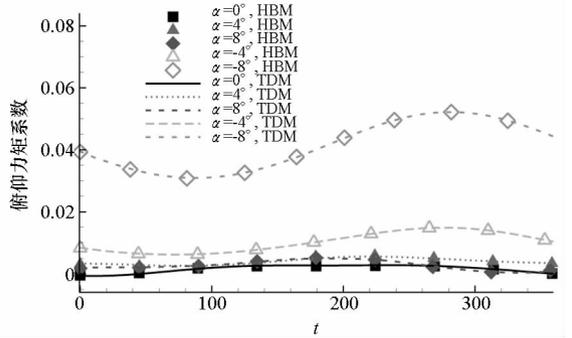


图 9 俯仰力矩系数时间历程曲线

Fig. 9 Time history of pitch moment coefficient

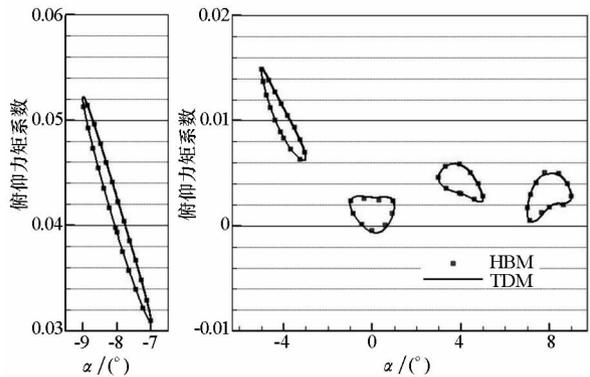


图 10 不同攻角的俯仰力矩系数迟滞曲线

Fig. 10 Pitch moment coefficient hysteresis curves of different angles of attack

通过积分迟滞环曲线, 表 3 给出了俯仰力矩阻尼导数辨识结果。从计算结果可以看出, 不同攻角下谐波平衡法和时域方法辨识的动导数均为负值, 说明 WR - A 飞行器在俯仰方向受到扰动后处于动稳定状态。在攻角为 $-8^\circ \sim 8^\circ$ 范围内, 谐波平衡法辨识的俯仰动导数与时域方法的计算结果一致。

表 3 不同攻角下的俯仰动导数

Tab. 3 Dynamic derivatives with different angle of attack

方法	攻角 / ($^\circ$)				
	-8	-4	0	4	8
TDM	-2.525	-2.284	-2.743	-2.260	-2.942
HBM	-2.796	-2.366	-2.383	-2.288	-3.009

3.2 计算效率分析

与简单外形相比,数值模拟类 X-51 这种复杂飞行器的强迫俯仰振动比较困难。谐波平衡法计算时,收敛较慢,需要计算 20 000 步左右气动力才能收敛。

表 4 列出了初始攻角 $\alpha_0 = 4^\circ$ 时,谐波平衡法与时域方法数值模拟类 X-51 飞行器强迫俯仰振动所需要的时间。表中的相对时间是相对于谐波平衡法在 $N_H = 1$ 时的计算时间。由统计结果可以看出,随着谐波数的增加,谐波平衡法的计算时间线性增加。谐波数 $N_H = 3$ 时,谐波平衡法辨识的动导数与时域方法的结果相吻合,但此时谐波平衡法的计算时间只有时域方法的 1/10。因此,对于类 X-51 这种复杂外形飞行器的动导数辨识,谐波平衡法的计算效率明显高于时域方法。

表 4 不同方法的计算时间统计

Tab. 4 Computation times under different methods

方法	计算时间/s	相对时间
HBM, $N_H = 1$	74 748	1.0
HBM, $N_H = 2$	126 700	1.7
HBM, $N_H = 3$	180 750	2.4
TDM, $dt = 0.01$	1 786 060	23.9

4 结论

本文开展了谐波平衡法在复杂飞行器动导数预测问题中的应用研究。针对 HBS 标模进行了验证计算,计算结果表明,谐波平衡法辨识的俯仰动导数与时域方法的计算结果相一致,且与实验结果吻合,验证了程序的正确性和方法的可靠性。采用谐波平衡法对类 X-51 机体/推进一体化飞行器 WR-A 进行了动导数计算,结果表明谐波平衡法在谐波数 $N_H = 3$ 时重建的俯仰力矩系数曲线和辨识的动导数与时域方法的计算结果相一致,但其计算时间仅为时域方法的 1/10。因此,对于 WR-A 这种复杂飞行器下的非定常流动计算和动导数辨识,谐波平衡法也能在保证精度的同时有较高的计算效率。

参考文献 (References)

[1] 刘伟,赵海洋,杨小亮. 飞行器动态气动特性数值模拟方法及应用[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2015.
LIU Wei, ZHAO Haiyang, YANG Xiaoliang. Dynamic aerodynamic characteristics of aircraft: numerical simulation method and applications[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2015. (in Chinese)

[2] 刘绪. 高超声速内外流一体化飞行器动态特性研究[D]. 长沙:国防科技大学,2011.
LIU Xu. Investigation of dynamic characteristics of hypersonic airframe/propulsion integrative vehicle [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)

[3] Hall K C, Thomas J P, Clark W S, et al. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique [J]. AIAA Journal, 2002, 40(5): 879-886.

[4] Gopinath A K, Jameson A. Time spectral method for periodic unsteady computations over two-and three-dimensional bodies [C]//Proceedings of 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005.

[5] Hall K C, Thomas J P, Ekici K, et al. Frequency domain techniques for complex and nonlinear flows in turbomachinery[R]. AIAA 3998, 2003.

[6] 施永强,杨青真,黄秀全,等. 一种快速模拟振荡叶栅非定常流的数值方法[J]. 空气动力学报,2014,32(4): 481-487.
SHI Yongqiang, YANG Qingzhen, HUANG Xiuquan, et al. A numerical approach for fast simulation of unsteady flow around oscillating cascades[J]. ACTA Aerodynamica Sinica, 2014, 32(4): 481-487. (in Chinese)

[7] Thomas J P, Dowell E H, Hall K C, et al. Modeling limit cycle oscillation behavior of the F-16 fighter using harmonic balance approach [C]//Proceedings of 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.

[8] Thomas J P, Dowell E H, Hall K C. Modeling viscous transonic limit-cycle oscillation behavior using a harmonic balance approach [J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(6): 1266-1273.

[9] Thomas J P, Hall K C, Dowell E H, et al. Unsteady flow computation using a harmonic balance approach implemented about the OVER-FLOW 2 flow solver [C]//Proceedings of 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, 2009.

[10] Ekici K, Hall K C, Dowell E H. Computationally fast harmonic balance methods for unsteady aerodynamic predictions of helicopter rotors [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(12): 6206-6225.

[11] 许建华,宋文萍,王龙. 波平衡法在旋翼前飞绕流数值模拟中的应用研究[J]. 空气动力学学报,2013,31(5): 546-553.
XU Jianhua, SONG Wenping, WANG Long. Application of harmonic balance method in forward flight simulation for helicopter rotors [J]. ACTA Aerodynamica Sinica, 2013, 31(5): 546-553. (in Chinese)

[12] McMullen M, Jameson A, Alonso J. Application of a nonlinear frequency domain solver to the Euler and Navier-Stokes equations [C]//Proceedings of 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 2002.

[13] Murman S M. Reduced-frequency approach for calculating dynamic derivatives [J]. AIAA Journal, 2007, 45(6): 1161-1168.

[14] Ronch A D, Badcock K J, Ghoreyshi M, et al. Linear frequency domain and harmonic balance predictions of dynamic derivatives [C]//Proceedings of 28th AIAA Applied Aerodynamics Conference, 2010.

[15] Hassan D, Sicot F. A time-domain harmonic balance method for dynamic derivatives predictions [C]//Proceedings of 49th

- AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2011.
- [16] 陈琦, 陈坚强, 袁先旭, 等. 谐波平衡法在动导数快速预测中的应用研究[J]. 力学学报, 2014, 46(2): 183 - 190. CHEN Qi, CHEN Jianqiang, YUAN Xianxu, et al. Application of a harmonic balance method in rapid predictions of dynamic stability derivatives [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(2): 183 - 190. (in Chinese)
- [17] 谢立军, 杨云军, 刘周, 等. 基于时间谱方法的飞行器动导数高效计算技术[J]. 航空学报, 2015, 36(6): 2016 - 2026. XIE Lijun, YANG Yunjun, LIU Zhou, et al. A high efficient method for computing dynamic derivatives of aircraft based on time spectral method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(6): 2016 - 2026. (in Chinese)
- [18] 柴振霞, 刘伟, 刘绪, 等. 谐波平衡法数值模拟周期性非定常流动[J]. 国防科技大学学报, 2017, 39(4): 168 - 173. CHAI Zhenxia, LIU Wei, LIU Xu, et al. Numerical simulation of periodic unsteady flow by harmonic balance method [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2017, 39(4): 168 - 173. (in Chinese)
- [19] 埃特肯. 大气飞行动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1979. Etkin B. Dynamics of atmospheric flight [M]. Beijing: Science Press, 1979. (in Chinese)
- [20] East R A, Hutt G R. Comparison of predictions and experimental data for hypersonic pitching motion stability[J]. Journal of Spacecraft & Rockets, 1988, 25(3): 225 - 233.
- [21] Hank J, Murphy J, Mutzman R. The X - 51A scramjet engine flight demonstration program[C]//Proceedings of 15th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, 2008.