

随机-区间混合不确定性单输出模型确认指标*

赵录峰¹, 吕震宙¹, 阚丽娟²

(1. 西北工业大学航空学院, 陕西西安 710072;

2. 空军工程大学装备管理与安全工程学院, 陕西西安 710051)

摘要:针对既有随机变量又有区间变量的模型预测结果与实验数据之间的一致性度量问题,对随机-区间混合不确定性模型确认指标进行研究。根据工程数学模型和实验过程中的不确定性来源,分析随机-区间混合不确定性模型确认的特点;运用概率方法和区间理论,提出新的随机-区间混合不确定性模型确认指标,讨论所提指标的性质,给出指标的计算方法和步骤。通过数字算例和工程算例,验证了所提指标的可行性和有效性。

关键词:模型确认;指标;随机变量;区间变量;不确定性

中图分类号:O212.4;TP391.9 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2018)03-168-08

Validation metric for single output models with stochastic and interval mixed uncertainty

ZHAO Lufeng¹, LYU Zhenzhou¹, KAN Lijuan²

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Equipment Management and Safety Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: For the models with interval input variables and random input variables simultaneously, a validation metric was researched to measure the agreement between the quantitative predictions from an uncertain model and relevant empirical data. With respect to different sources of uncertainty existed in engineering mathematic models and experiments, the characteristic of the validation for models with stochastic and interval mixed uncertainty was analyzed. A new validation metric for model with stochastic and interval mixed uncertainty was proposed by using the interval theory and the probability method. The properties of the proposed validation metric were discussed, and its calculation method and procedures were presented. A numerical test case and an engineering example were used to verify the feasibility and effectiveness of the proposed validation metric.

Key words: model validation; metric; random variables; interval variables; uncertainty

随着现代科学技术的飞速发展和对产品质量要求的日益提高,很多产品的结构系统变得越来越复杂,研制周期增长,实验费用大幅增加。为了有效减少实验成本,产品的设计及评估过程已逐渐被数学模型预测所替代。由于受人的认知水平和各种随机因素的影响,模型输出响应量与试验测试数据之间往往会产生不一致现象,这在很大程度上影响到产品的设计与决策。因此,不确定性因素影响情况下的模型确认理论与技术,已成为国内外学术界和工业界的一项重点研究内容。模型确认是从人们感兴趣的目的或用途出发,衡量和判断所建数学模型与真实物理过程吻合程度的过程^[1-3]。它主要包括两项工作:一是应用模型确认指标对模型的准确性进行量化评估的过

程;二是判断模型的准确性是否满足相应需求的过程。因此,开展模型确认工作,首先需要建立一个科学合理的模型确认指标。模型确认指标^[4-5]是一个数学表达式,主要用来描述模型仿真预测结果和实验测试数据之间的不一致性程度。

目前,国内外学者对不确定性因素影响情况下的模型确认方法进行大量研究。如文献[6-7]提出了直接面积和 u-pooling 两种模型确认指标,分别用于单输出模型在单一位置和多个位置的模型确认;在这两个指标的基础上,文献[8]应用多维概率积分转换方法,提出了多维概率积分转换面积和 t-pooling 两种模型确认指标,文献[9]运用马氏距离方法,提出了马氏距离面积和 MD-pooling 两种模型确认指标,分别用于多维

* 收稿日期:2017-04-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51475370);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(3102015BJ(II)CG009)

作者简介:赵录峰(1973—),男,陕西富平人,博士研究生,E-mail:zlf315611@126.com;

吕震宙(通信作者),女,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhenzhou@nwpu.edu.cn

相关输出模型在单一位置和多个位置的模型确认。此外,文献[10]通过多输出响应量的数学期望列阵和协方差矩阵等数字特征,提出了多输出模型确认的局部混合矩指标和全局混合矩指标。

已有的指标主要针对随机不确定性影响下的模型确认问题,运用概率论和数理统计方法进行研究。然而在实际工程建模过程中,有的输入变量能够获得明确的概率分布,而有的输入变量由于数据信息量少,或受认知水平的限制,只能采用区间变量来描述。对于这类既有随机输入变量,又有区间输入变量的混合不确定模型称之为随机-区间混合不确定性模型,关于这类模型的确认问题,目前还鲜有研究。在随机-区间混合不确定性模型中,随机输入变量和区间输入变量之间可能相互独立,也可能存在一定的相关性。本文主要针对随机输入变量和区间输入变量共存且相互独立的混合不确定性单输出模型确认问题,分析了混合不确定性单输出模型的特点,在此基础上,提出了一种新的随机-区间混合不确定单输出模型确认指标。

1 随机-区间混合不确定性单输出模型确认问题的定性分析

在工程设计与实验过程中,受随机因素的影响和认知能力的限制,所建工程问题的数学模型和实验过程常常具有明显的不确定性。文献[11-14]对模型确认过程中的不确定性进行了深入研究,归纳总结出模型确认中四类主要不确定来源:参数不确定性、数学模型不确定性、物理实验结果不确定性和实验数据有限而导致的信息不确定性。这些不确定性传递到模型输出响应量与实验结果,导致它们之间产生一定的差异。不确定性通常情况采用概率论的方法进行描述。当模型的输入变量或参数(如:受力情况、外形状况和材料性质等)为不确定性随机变量,并采用分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)描述其取值规律时,它们的不确定性经过模型传递到输出响应量,使得输出响应量也具有一定的不确定性,且其取值规律可通过其CDF来描述;同理,实验测试结果也为服从某CDF的随机变量。因此,模型确认指标可以通过模型与试验输出响应量所服从CDF之间的差异程度来定义^[15]。

但对于随机-区间混合不确定性模型而言,当区间输入变量取任意一个名义值时,模型的输出响应量则为服从某一概率分布的随机变量;当

区间输入变量遍历整个区间时,模型的输出响应量则为服从某一区间概率分布的区间随机变量。同理,物理实验结果也为服从某一区间概率分布的区间随机变量。因此,随机-区间混合不确定性下的模型确认指标可以通过模型响应量的区间CDF与实验测试结果的区间经验CDF之间的差异程度来描述。

2 随机变量和区间变量共存条件下单输出模型确认指标

2.1 指标的构建

在实际工程中,随机输入变量和区间输入变量经常出现在同一个模型之中。定义这种混合不确定性模型的表达式为:

$$Z^m = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_r})$ 为 n_r 维随机向量, X_i 的取值规律由相应的概率密度函数 $f_{X_i}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n_r$)描述; $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_l})$ 为 n_l 维区间向量, Y_j 的取值规律则由相应的区间 $[Y_j^L, Y_j^U]$ ($j = 1, 2, \dots, n_l$)描述, Y_j^L 和 Y_j^U 分别表示第 j 维区间变量的下、上界。

在式(1)中,当区间输入向量 \mathbf{Y} 取名义值 y^* 时, \mathbf{Y} 的不确定性对输出响应量的影响将会被消除,模型输出响应量为一个随机变量,它的分布函数为一条曲线。当区间输入向量 \mathbf{Y} 遍历其区间范围取所有名义值时,对应的模型输出响应量则为区间随机变量,对应的区间分布函数则为一族曲线,且这些曲线具有相应的上、下界。绘制了区间输入向量 \mathbf{Y} 遍历其取值区间取所有名义值时,随机-区间混合不确定性模型输出响应量 Z^m 的区间分布函数族曲线示意图(如图1所示)。由图1可以看出,当模型输出响应量为 z^* 时,与之对应的区间分布函数的取值为一个区间变量 $[F_{Z^m|Y}^L(y, z^*), F_{Z^m|Y}^U(y, z^*)]$ 。当模型输出响应量在其取值范围取全部值时,对应的区间分布函数取值的上界和下界连起来,就形成如图1实线所示的模型输出响应量区间分布函数的上、下界曲线 $F_{Z^m|Y}^U(y, z)$ 和 $F_{Z^m|Y}^L(y, z)$ 。

同理,可以得到对应的实验结果响应量 Z^e 的区间经验分布函数 $F_{Z^e|Y}^e(y, z)$ 的上、下界曲线 $F_{Z^e|Y}^eU(y, z)$ 和 $F_{Z^e|Y}^eL(y, z)$,如图2中虚线所示。

由图2可以推断出,当所建的模型与物理过程完全一致时,模型输出响应量区间分布函数上、下界曲线将与实验结果区间经验分布函数上、下界曲线重合,即两条实线与两条虚线之间阴影部

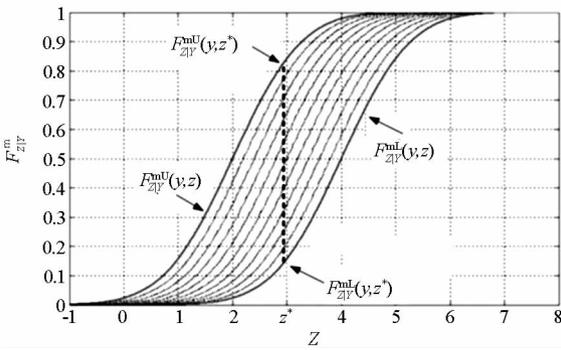


图 1 区间变量取不同名义值时输出响应量的区间分布函数曲线

Fig. 1 Interval CDFs of the model responses with different realizations from interval variable

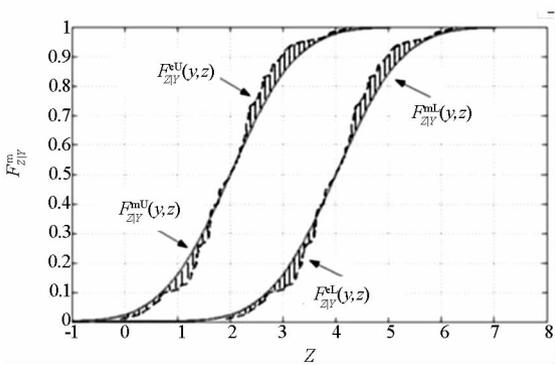


图 2 模型响应量区间分布函数和实验结果区间经验分布函数的上下界曲线

Fig. 2 Upper and lower bounds of the interval CDFs of model responses and that of experiments

分的面积趋于零。如果所建的模型与物理过程不一致,且模型与真实物理过程之间差异程度越大,则模型输出响应量区间分布函数上、下界曲线与实验结果区间经验分布函数上、下界曲线之间的差异越大,即两条实线与两条虚线之间阴影部分的面积也就越大,反之亦然。因此,通过两条实线与两条虚线之间阴影部分的面积大小,可以客观地评估模型描述真实物理过程的准确程度。即图 2 中阴影部分的面积越小,表明所建立的模型越接近真实物理过程,也就是模型的准确性越高,反之亦然。为此,将随机-区间混合不确定性模型输出响应量的区间分布函数上、下界曲线与对应的实验结果区间经验分布函数上、下界曲线之间面积定义为混合不确定性单输出模型确认指标,用来度量模型响应量与实验结果之间的差异程度。其数学表达式为:

$$d(F^m, F^e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{mU}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{mL}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| \} dz \quad (2)$$

式中: $F_Z^{mU}(y, z)$ 和 $F_Z^{mL}(y, z)$ 分别表示模型输出响应量区间分布函数的上、下界 $F_{Z|Y}^{mU}(y, z)$ 和 $F_{Z|Y}^{mL}(y, z)$, $F_Z^{eU}(y, z)$ 和 $F_Z^{eL}(y, z)$ 分别表示试验输出响应量的区间经验分布函数的上、下界 $F_{Z|Y}^{eU}(y, z)$ 和 $F_{Z|Y}^{eL}(y, z)$ 。

2.2 指标的性质

进一步分析可以看出,构建的模型确认指标具有下列数学性质。

1) 非负性。由于式(2)的被积函数为非负函数,因此模型确认指标 $d(F^m, F^e)$ 为非负数。

2) 对称性。由于

$$d(F^m, F^e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{mU}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{mL}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| \} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{eU}(y, z) - F_Z^{mU}(y, z)| + |F_Z^{eL}(y, z) - F_Z^{mL}(y, z)| \} dz = d(F^e, F^m)$$

混合不确定性模型确认指标 $d(F^m, F^e)$ 具有对称性。

3) 三角不等性。由于

$$d(F^{m1}, F^{m2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{m1U}(y, z) - F_Z^{m2U}(y, z)| + |F_Z^{m1L}(y, z) - F_Z^{m2L}(y, z)| \} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |[F_Z^{m1U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)] - [F_Z^{m2U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)]| + |[F_Z^{m1L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)] - [F_Z^{m2L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)]| \} dz \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{m1U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{m2U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{m1L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| + |F_Z^{m2L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| \} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{m1U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{m1L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| \} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |F_Z^{m2U}(y, z) - F_Z^{eU}(y, z)| + |F_Z^{m2L}(y, z) - F_Z^{eL}(y, z)| \} dz = d(F^{m1}, F^e) + d(F^{m2}, F^e)$$

随机-区间混合不确定性模型确认指标 $d(F^m, F^e)$ 具有三角不等性。

4) 理想模型指标趋零性。在理想情况下,当且仅当所建的数学模型与真实物理过程完全一致时,如果试验样本量趋于无穷,则随机-区间混合不确定性模型输出响应量区间分布函数的上、下界与试验输出响应量的区间经验分布函数的上、下界趋于重合,即式(2)表示的 $d(F^m, F^e)$ 收敛于零。

2.3 指标的求解

由式(2)可知,所提模型确认指标求解的核心是确定模型输出响应量区间分布函数和实验结果区间经验分布函数的上、下界,依据大数定理,

运用 Monte Carlo 数字模拟法,该指标的求解过程可概括为 6 个步骤。

步骤 1:离散区间变量向量。将区间变量向量 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1})$ 在其取值区间内均匀的离散化为 N_1 个向量 $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_1}) (i = 1, 2, \dots, N_1)$ 。

步骤 2:确定实验数据的经验分布函数集。在每一个离散点 \mathbf{y}_i 处,通过实验得到对应的 M_R^e 个输出观测值 $z_k^e | \mathbf{y}_i (i = 1, 2, \dots, M_R^e)$,并计算它们的经验分布函数集 $F_{Z|Y=y_i}^e(z) (i = 1, 2, \dots, N_1)$ 。

步骤 3:确定实验数据的区间经验分布函数上、下界。依据步骤 2 求得的 N_1 个区间变量离散点处不同的 $F_{Z|Y=y_i}^e(z)$,求得经验分布函数集 $F_{Z|Y=y_i}^e(z) (i = 1, 2, \dots, N_1)$ 的上界 $F_{Z|Y}^{eU}(y, z)$ 和下界 $F_{Z|Y}^{eL}(y, z)$ 。

步骤 4:求解模型响应量的分布函数集。在每一个离散点 \mathbf{y}_i 处,根据随机输入向量 \mathbf{X} 的联合概率密度产生样本容量为 M_R^m 的样本,计算对应的模型输出响应量的样本 $z_k^m | \mathbf{y}_i (i = 1, 2, \dots, M_R^m)$,进而求得对应于 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}_i$ 的分布函数集 $F_{Z|Y=y_i}^m(z) (i = 1, 2, \dots, N_1)$ 。

步骤 5:求解模型响应量区间分布函数上、下界。类似步骤 3,可求得模型输出响应量分布函数集 $F_{Z|Y=y_i}^m(z) (i = 1, 2, \dots, N_1)$ 的上界 $F_{Z|Y}^{mU}(y, z)$ 和下界 $F_{Z|Y}^{mL}(y, z)$ 。

步骤 6:通过式(2)计算随机-区间混合不确定性模型确认指标 $d(F^m, F^e)$ 。

3 算例分析

针对提出的随机-区间混合不确定性模型确认指标,下面通过 1 个数值算例和 2 个工程算例验证所提指标的可行性和有效性。

3.1 数字算例

为了初步验证所提指标的可行性和有效性,设计了这个随机变量和区间变量共存的数字算例。在本算例中,假定实验数据通过式(3)获取。

$$y^e(x, \theta) = \sin(2x - 0.5\pi\theta) + \cos(\theta + 0.25\pi) + 0.2x + \varepsilon_e \quad (3)$$

式中: $X \in X^I = [3, 6]$ 为区间变量, $\theta(\theta = 1.5)$ 为模型参数, $\varepsilon_e \sim N(0, 0.2^2)$ 为实验响应量的测量误差。此外,设计与该物理实验对应的 6 个预测模型(见表 1),它们被分为 2 个测试组。

表 1 测试组的数学模型

Tab.1 Mathematical models in test cases

测试组	编号	公式
第 1 组	1	$y^{m1}(x) = y^e(x, \theta = 1.5)$
	2	$y^{m2}(x) = y^e(x, \theta = 1.4)$
	3	$y^{m2}(x) = y^e(x, \theta = 1.3)$
第 2 组	4	$y^{m4}(x) = y^e(x, \theta \sim N(1.5, 0.15^2))$
	5	$y^{m4}(x) = y^e(x, \theta \sim N(1.5, 0.3^2))$
	6	$y^{m4}(x) = y^e(x, \theta \sim N(1.4, 0.3^2))$

测试 1:第 1 组测试由 3 个模型组成。它们与实验模型式(3)相比,模型 1 与实验模型相同;模型 2 中的 θ 小于实验模型中的 θ ;模型 3 中的 θ 小于模型 2 中的 θ 。由此可定性地推断出,在第 1 组测试的 3 个模型中,模型 1 最优,其次是模型 2,最后是模型 3。这组测试主要是用来验证在各模型参数不同情况下新指标的可行性和有效性。

本测试中,从区间变量 X 的下限 3 开始,每间隔 0.01 取一个 x 值,即通过区间 $[3, 6]$ 得到 $N_1 = 300$ 个区间变量的名义值。对于区间变量的每一个名义值 $x_i (i = 1, 2, \dots, N_1)$,通过式(3)获得 $M_R^e = 1000$ 个数据作为试验样本,再通过第 1 组测试中的 3 个模型分别获得 $M_R^m = 10\ 000$ 个对应的模型输出样本。按照 3.3 部分提出的指标求解方法和步骤,求解各模型的指标值,并把结果列入表 2。

表 2 数字算例的指标计算结果

Tab.2 Model validation metric results of numerical test case

模型	测试 1 指标值	模型	测试 2 指标值
1	0.017 5	4	0.034 4
2	0.139 4	5	0.162 6
3	0.225 9	6	0.181 9

由表 2 可以清晰地看出,模型 1 的指标值最小,模型 2 次之,而模型 3 的指标值最大,即通过模型确认指标结果可以定量地判断出模型 1 最优,模型 2 次之,最后模型 3 最差,通过指标结果得到结论与定性分析结果相同。此外,由指标的理想模型指标趋零性可知,如果模型与真实物理过程相同,则该模型的指标值将收敛于零。但从表 2 可以看出,模型 1 的指标值并不为零,产生这一情况的原因并不是指标本身存在缺陷,而是在指标求解过程中, $F_{Z|Y}^m(y, z)$ 和 $F_{Z|Y}^e(y, z)$ 的上、

下界均是通过有限样本估计产生,难免会存在一定的误差。如果继续增加模型和试验输出响应量的样本量,提高它们所服从的 CDF 的准确性,那么它们的误差将会减少甚至消除,最终模型 1 的指标值将会趋于零。因此,在模型参数存在差异的情况下,所建指标能够有效地度量不同模型与物理实验之间的差异程度,正确判别与实验结果一致性较好的预测模型。

测试 2:第 2 组测试也由 3 个模型组成。这 3 个模型中的参数 θ 均为随机变量。与实验模型相比,模型 4 和模型 5 中参数 θ 的均值与实验模型参数 θ 相同,皆为 1.5,但模型 5 中 θ 的方差比模型 4 中 θ 的方差大;而模型 5 和模型 6 中参数 θ 的方差相同,但模型 6 中参数 θ 的均值比模型 5 中参数 θ 的均值小。由此可以定性判断输出,模型 4 优于模型 5,模型 5 的优于模型 6。该组测试任务是:当模型参数的 CDF 区别很小时,验证新指标是否能够对 3 个模型的准确性进行客观评估。

同理,在测试 2 中,从区间变量 X 的下限 3 开始,每间隔 0.01 取一个 x 值,得到 $N_1 = 300$ 个区间变量的名义值。对于每一个区间变量的名义值,通过式(3)分别获得 $M_R^c = 1000$ 个数据作为试验样本,再通过第 2 组测试中的 3 个模型分别获得 $M_R^m = 10\ 000$ 个对应的模型输出样本,然后求解各模型的指标值,结果见表 2。

由表 2 可知,模型 4 的指标值最小,模型 5 次之,而模型 6 的指标值最大,即通过模型确认指标的结果可以定量地判断出模型 4 优于模型 5,模型 5 优于模型 6,这一判断结论与定性分析的结论完全一致。因此,当模型参数的 CDF 区别很小时,所建新指标能够有效地给出 3 个模型的准确性评估结果。

3.2 悬臂梁算例

如图 3 所示的矩形截面悬臂梁, L 表示梁的

长度、 b 表示梁截面宽度、 h 表示截面厚度、 E 表示材料的弹性模量,它们皆为随机变量,分布参数见表 3。梁的自由端承受的集中力 F 为区间变量, $F \in F^I = [1000\text{ N}, 1400\text{ N}]$ 。输出响应量为挠度 y_B ,它的实验数据由解析方程式(4)产生,其测量误差为 $\varepsilon_e \sim N(0, 0.005^2)$ 。

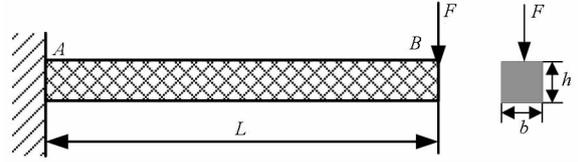


图 3 悬臂梁结构

Fig. 3 Diagram of the cantilever beam

$$y_B = \frac{4FL^3}{Ebh^3} + \varepsilon_e \tag{4}$$

表 3 试验模型输入变量的分布参数

Tab. 3 Distribution parameters of the test model inputs

随机变量	分布类型	均值	变异系数
E/Pa	正态	2.9×10^7	0.05
b/cm	正态	2.448 7	0.08
h/cm	正态	3.888 4	0.08
L/cm	正态	100	0.08

考虑各种不确定性因素的影响,现建有 3 个悬臂梁数学模型。虽然它们具有相同的解析表达式,且各输入变量具有相同的分布类型,但它们的分布参数具有一定差异,具体数据见表 4。由表 4 可以看出,与实验表达式相比,模型 1 与实验模型完全相同,模型 2 中的随机变量的变异系数发生了变化,模型 3 不仅随机变量变异系数发生了变化,而且均值也发生了变化。因此,可以定性判断出模型 1 优于模型 2,模型 2 优于模型 3。

表 4 数学模型输入变量的分布参数

Tab. 4 Distribution parameters of mathematical models inputs

随机变量	分布类型	模型 1		模型 2		模型 3	
		均值	变异系数	均值	变异系数	均值	变异系数
E	正态	2.9×10^7	0.05	2.9×10^7	0.05	2.9×10^7	0.05
b	正态	2.448 7	0.08	2.448 7	0.1	2.6	0.1
h	正态	3.888 4	0.08	3.888 4	0.1	3.9	0.1
L	正态	100	0.08	100	0.1	105	0.1

同算例1相似,在区间[1000,1400],从1000开始每间隔1取一个F值,即选取 $N_1 = 400$ 个x的名义值。然后由式(4)获取 $M_R^e = 1000$ 组实验样本,由3个数学模型分别得到 $M_R^m = 10\ 000$ 组模型输出样本,求解3个悬臂梁数学模型的指标值,结果见表5。

表5 悬臂梁模型的指标求解结果

Tab.5 Validation metric results for modes of cantilever beam

	模型1	模型2	模型3
指标值	0.014 7	0.217 9	0.366 8

从表5同样可以看出,通过所建立的指标,可以客观地给出模型1最优,模型2次之,模型3最差的评估结论。这与定性结论完全一致,从而再次表明所建立的指标在进行模型确认时具有很好的可行性和有效性。

3.3 涡轮盘算例

涡轮盘是航空发动机的一个关键转动部件,工作过程中承受着巨大的热应力和离心力。由于其机构复杂,工况恶劣,随着工作时间增长,一些部位(如榫槽槽底、销钉孔等)易因应力集中而出现裂纹。该型发动机在最大转速工作状态下,它的涡轮盘榫槽槽底所受最大载荷的实验数据由解析方程式(5)产生。

$$F = \frac{C\omega^2}{2\pi} + 2\rho\omega^2 J + \varepsilon_e \quad (5)$$

式中:C,ω,ρ和J分别表示发动机涡轮盘的系数、转动角速度、质量密度和截面惯性矩。C,ρ和J皆为随机变量,它们的分布参数见表6。转动角速度 $\omega = 2n\pi$ 为区间变量,其中 $n \in [180\text{ rad/s}, 220\text{ rad/s}]$ 为最大转动频率。 $\varepsilon_e \sim N(0, 1.1 \times 10^{10})$ 为测量误差。

表6 航空发动机涡轮盘输入变量分布参数

Tab.6 Distribution parameters of input variables of aircraft engine turbo blade

输入变量	分布类型	均值	变异系数
$\rho/(\text{kg/m}^3)$	对数正态	8240	0.1
C	对数正态	5.67	0.1
J/m^4	正态	1.22E-4	0.1

考虑不确定性因素的影响,现有3个发动机涡轮盘数学模型,虽然它们具有相同的解析表达式,且各输入变量的分布类型相同,但它们的分布

参数有一定差异,具体数据见表7。

表7 航空发动机涡轮盘模型输入变量分布参数

Tab.7 Distribution parameters of input variables of models of aero engine turbo blade

随机变量	分布类型	模型1		模型2		模型3	
		均值	变异系数	均值	变异系数	均值	变异系数
$\rho/(\text{kg/m}^3)$	对数正态	8240	0.1	8240	0.15	8240	0.15
C	对数正态	5.67	0.1	5.67	0.15	5.75	0.15
J/m^4	正态	1.22E-4	0.1	1.22E-4	0.15	1.31E-4	0.15

由表7可以看出,与实验表达式相比,模型1与实验模型完全相同,模型2中的随机变量的变异系数发生了变化,模型3中随机变量不仅变异系数发生了变化,而且均值也发生了变化。因此,可以判断模型1的准确性高于模型2,模型2的准确性高于模型3。

同理,在区间[180 rad/s, 220 rad/s]中,从180开始每间隔1取一个n值,即选取 $N_1 = 40$ 个n的名义值。然后由式(5)获取 $M_R^e = 1000$ 组实验样本,由3个数学模型分别得到 $M_R^m = 10\ 000$ 组模型输出样本,求解3个航空发动机涡轮盘模型的指标值,结果见表8。

表8 航空发动机涡轮盘模型确认指标计算结果

Tab.8 Model validation metric results of aero engine turbo blade

	模型1	模型2	模型3
指标值	0.017 4	0.129 4	0.235 1

从表8可以看出,依据提出的模型确认新指标能够客观地定量判断模型1的准确性高于模型2,模型2的准确性高于模型3。这与定性结论相互一致,从而再次表明所建新指标在进行模型确认时可行有效。

3.4 模型确认指标的风险分析

尽管以上3个算例表明当模型响应量和实验样本量充足时,提出的指标在随机-区间混合不确定性模型确认方面可行有效,但当样本量不足时,所提指标具有一定的评估风险。下面以算例1中的第1组测试为例,对其评估风险进行分析。设 M_R^m 和 M_R^e 分别为模型和实验输出响应量的样本量。

3.4.1 M_R^e 固定, M_R^m 变化

从区间下限3开始,每间隔0.01取一个区间

变量值,即在区间 $[3, 6]$ 中选取 $N_1 = 300$ 个区间变量的名义值。对应于每一个区间变量名义值,由式(3)分别产生 $M_R^e = 1000$ 个实验样本,由表 1 中第 1 组测试的 3 个模型分别得到 M_R^m 个相应的模型输出样本,求解模型的指标值。指标值随 M_R^m 的变化情况如图 4 所示。

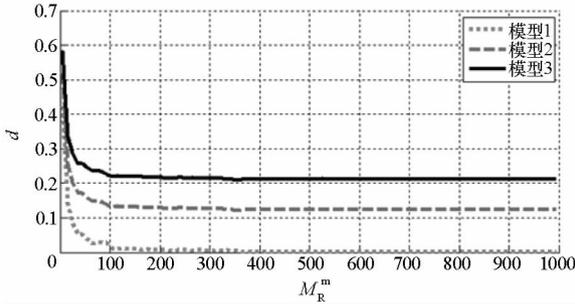


图 4 模型确认指标 d 随 M_R^m 的变化曲线

Fig. 4 Model validation metric d versus the M_R^m

从图 4 可以看出,随着模型响应量的样本量 M_R^m 增大,模型确认指标值 d 迅速减小,从 $M_R^m > 100$ 时开始,指标值 d 开始趋于收敛到一个固定值。这表明 $M_R^m > 100$ 时,模型响应量的计算结果趋于它们的解析解,且样本量 M_R^m 越大,模型响应量的计算结果和指标值越接近理论值。但当 $M_R^m < 50$ 时,通过模型确认指标对不同的模型的准确性进行判断,会存在错判误判的风险。因此,运用所提方法进行模型确认时,要尽量获得充足的样本。

3.4.2 M_R^m 固定, M_R^e 变化

同样, $N_1 = 300$, 对应于每一个区间变量名义值,为了保证模型响应量计算结果接近理论值,由表 1 中第 1 组测试中的 3 个模型分别得到 $M_R^m = 10\ 000$ 个对应的模型输出样本,再由式(3)分别产生 M_R^e 个实验样本,求解 3 个模型的指标值。指标值随 M_R^e 的变化情况如图 5 所示。

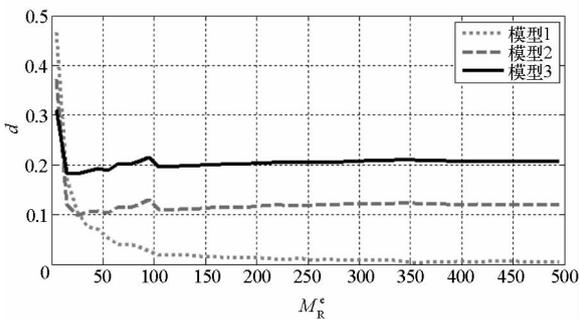


图 5 模型确认指标 d 随 M_R^e 的变化曲线

Fig. 5 Model validation metric d versus the M_R^e

从图 5 可知,随着实验观测数据 M_R^e 的增大,

模型确认指标 d 迅速减小并趋于收敛。当 $M_R^e < 60$ 时,模型确认指标 d 的计算结果存在相互交叉重叠现象。这表明在实验样本小于 60 时,通过模型确认指标对不同模型的优劣进行判断,会存在一定的错判误判风险。产生这一问题是试验数据量过少时,物理试验结果所服从经验分布函数难以准确估计所致。但当实验样本量大于 100 时,该指标能够客观地评估不同数学模型与实验的一致性。

4 结论

本文依据概率方法和区间理论,运用在区间变量固定情况下,随机-区间混合不确定性模型输出响应量为服从某一分布函数的随机变量这一特点,将文献[6]中面积指标,推广到随机-区间混合不确定性单输出模型确认中。运用随机-区间混合不确定性模型与实验输出响应量的区间 CDF 上、下界之间的面积差异,定义了一种新的模型确认指标。理论和算例分析结果表明,在模型和实验样本充足的情况下,该指标能够有效地解决随机输入变量和区间输入变量共存且相互独立的混合不确定性单输出模型确认问题。但当模型或实验的样本量较少时,运用该指标对不同的混合不确定性模型的优劣进行评判时,会存在一定的错判误判风险。因此,运用所提方法进行模型确认时,要尽量获得充足的样本,以便有效控制错判误判风险。

参考文献 (References)

- [1] Oberkampf W L, Roy C J. Verification and validation in scientific computing [M]. USA: Cambridge University Press, 2010.
- [2] Oberkampf W L, Barone M F. Measures of agreement between computation and experiment: validation metrics [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 217(1): 5-36.
- [3] Oberkampf W L, Sindir M, Conlisk A. Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations [M]. USA: American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1998.
- [4] Xiong Y, Chen W, Tsui K L, et al. A better understanding of model updating strategies in validating engineering models [J]. Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 189(15/16): 1327-1337.
- [5] Messer M, Panchal J H, Krishnamurthy V, et al. Model selection under limited information using a value of information based indicator [J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(12): 1-13.
- [6] Ferson S, Oberkampf W L. Validation of imprecise probability models [J]. International Journal of Reliability and Safety, 2009, 3(1/2/3): 3-22.
- [7] Ferson S, Oberkampf W L, Ginzburg L. Model validation and

- predictive capability for the thermal challenge problem [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(29/30/31/32): 2408–2430.
- [8] Li W, Chen W, Jiang Z, et al. New validation metrics for models with multiple correlated responses [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 127: 1–11.
- [9] Zhao L F, Lu Z Z, Yun W Y, et al. Validation metric based on Mahalanobis distance for models with multiple correlated responses [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2017, 159: 80–89.
- [10] 赵录峰, 吕震宙, 张磊刚, 等. 多输出模型确认中的混合矩指标[J]. *国防科技大学学报*, 2015, 37(6): 61–68. ZHAO Lufeng, LYU Zhenzhou, ZHANG Leigang, et al. Mixed moment validation metric for models with multivariate output[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2015, 37(6): 61–68. (in Chinese)
- [11] Kennedy M C, O'Hagan A. Bayesian calibration of computer models [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2001, 63(3): 425–464.
- [12] Bayarri M J, Berger J O, Paulo R, et al. A framework for validation of computer models [J]. *Technometrics*, 2007, 49(2): 138–154.
- [13] Arendt P D, Apley D W, Chen W, et al. Improving identifiability in model calibration using multiple responses[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2012, 134(10): 100909.
- [14] Arendt P D, Apley D W, Chen W. Quantification of model uncertainty: calibration, model discrepancy, and identifiability [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2012, 134(10): 100908.
- [15] Rebba R, Mahadevan S. Validation of models with multivariate output [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91(8): 861–871.