

考虑地球非球形引力摄动影响的自由段弹道解析解*

常晓华

(北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

摘要:针对地球非球形引力摄动影响下的自由段弹道快速计算问题,在非正交坐标系内建立考虑 J_2 项摄动的地球引力作用下的运动微分方程,在轨道坐标系内建立扰动引力作用下的运动微分方程,并计算天向扰动引力加速度对应的质量偏差,进而通过椭圆轨道以修正 J_2 项摄动运动微分方程;在建立上述运动微分方程解析解的基础上,给出了地心坐标系内弹道飞行器位置和绝对速度的表达式,从而提出了 J_2 项摄动引力和扰动引力作用下的自由段弹道解析计算方法。仿真分析表明:该方法具有较高的计算效率,落点位置偏差小于 20 m,满足弹道飞行器高精度实时制导、轨迹预测等应用需求。

关键词: J_2 项摄动;扰动引力;解析解;弹道飞行器

中图分类号: V448.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2018)04-080-07

Analytical solution for free flight trajectory considering earth non-spherical gravitation perturbation

CHANG Xiaohua

(Beijing Institute of Astronautical System Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: In order to solve the fast calculation of the free trajectory considering the effects of the earth non-spherical gravitation, the differential equations of motion under the earth gravitation including the J_2 -perturbation were established in the non-orthogonal coordinate system, and the differential equations of motion under disturbing gravity were established in the orbital coordinate system. The acceleration of upward disturbing gravity was equivalent to the mass deviation of the earth, and introduced into the standard elliptical orbit. The differential equations under J_2 -perturbation were modified, and the parameters of the position and velocity were calculated under the analytical solution. The simulation results show that the analytic solution has a higher efficiency, and the position error of impact point is within 20 meters. The analytic solution satisfies the requirement of the real-time guidance and orbit forecast.

Key words: J_2 -perturbation; disturbing gravity; analytical solution; ballistic vehicle

弹道飞行器的运动可分为主动段、自由段和再入段,其中自由段的射程和飞行时间占全弹道的 80% ~ 90%^[1]。自由段飞行弹道的快速精确计算广泛应用于弹道飞行器的高精度制导和轨迹预测中。

对于远程弹道飞行器而言,自由段运动只考虑地球引力作用,且引力位函数满足拉普拉斯方程,其球谐函数级数表达式^[2]为:

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\phi) \right] \quad (1)$$

也可写为:

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n \bar{P}_n(\sin\phi) \right] +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\phi) \quad (2)$$

其中: $\mu = fM$, f 为万有引力常数, M 为地球质量; a_e 为地球赤道平均半径; r 为地心距; ϕ 和 λ 为地心纬度和经度; \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} 为完全规格化引力位系数; $\bar{P}_{nm}(\sin\phi)$ 为规格化勒让德伴随函数; n, m 为勒让德函数的阶次。

在远程弹道飞行器弹道计算中,正常引力仅考虑均质圆球和 J_2 项摄动的影响,其与实际地球引力的差称为扰动引力^[1-2]。可见,地球非球形引力包含了 J_2 项摄动引力和扰动引力。

对于自由段运动轨迹,国内外学者先后研究了均质圆球下的解析解^[1]、考虑 J_2 项摄动引力的

* 收稿日期:2017-05-13

基金项目:国家部委基金资助项目(613222)

作者简介:常晓华(1982—),男,河北定州人,高级工程师,博士,E-mail:changxh1982@126.com

近似解析解^[3-10]、基于状态空间摄动的被动段扰动引力影响分析方法^[11]。

目前,对于扰动引力对自由段飞行弹道影响的研究,主要围绕扰动引力计算的精确性和快速性展开^[12-17],对扰动引力作用下自由段轨迹计算的精确性依赖于弹道数值积分,其计算效率较低,难以满足高精度制导和轨迹预测等强实时性应用需求。

本文从弹道飞行器自由段动力学角度出发,提出了同时考虑 J_2 项摄动引力和扰动引力的地球非球形引力摄动影响下的自由段弹道近似解析解计算方法,并通过数值仿真对该方法进行验证。

1 地球非球形引力加速度

不考虑弹道飞行器的质量,地球非球形引力引起的加速度包含 J_2 项摄动引起的引力加速度和扰动引力加速度。

1.1 J_2 项摄动引力加速度

由于 J_2 项摄动的影响,地球引力加速度 \mathbf{g} 偏离地心方向。将地球引力加速度 \mathbf{g} 投影在地心矢径 \mathbf{r} 和地球自转 $\boldsymbol{\omega}_e$ 方向,有:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{g}'\mathbf{r}^0 + \mathbf{g}_{\omega_e}\boldsymbol{\omega}_e^0 \\ \mathbf{g}'_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2}J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 5\sin^2\phi) \right] \\ \mathbf{g}_{\omega_e} = -3\frac{fM}{r^2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin\phi \end{cases} \quad (3)$$

可见, J_2 项摄动引起的引力加速度为:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{rJ_2} = -\frac{3}{2}\frac{fM}{r^2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 5\sin^2\phi) \\ \mathbf{g}_{\omega_e J_2} = \mathbf{g}_{\omega_e} = -3\frac{fM}{r^2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin\phi \end{cases} \quad (4)$$

1.2 扰动引力加速度

通常,在北天东坐标系内描述地球扰动引力加速度。

北天东坐标系 $O_N - x_N y_N z_N$:坐标原点 O_N 为弹道飞行器所在空间位置, y_N 轴与过原点的地心矢径 \mathbf{r} 的方向一致, x_N 指向北极且与 y_N 垂直, z_N 指向东且与 x_N, y_N 构成右手直角坐标系。

在北天东坐标系内,扰动引力加速度的球谐函数表达式^[2]为:

$$\begin{cases} \delta g_\phi = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{d\bar{P}_{nm}(\sin\phi)}{d\phi} \\ \delta g_r = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N (n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\phi) \\ \delta g_\lambda = -\frac{1}{\cos\phi} \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (\bar{C}_{nm}^* \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\phi) \end{cases} \quad (5)$$

其中, N 为球谐函数的最高阶,且有:

$$\bar{C}_{nm}^* = \begin{cases} 0 & n=2, m=0 \\ \bar{C}_{nm} & \text{其他情形} \end{cases}$$

由式(5)可知,利用球谐函数计算自由段任一点的扰动引力加速度,计算量较大。为提高自由段扰动引力计算效率,可采用有限元逼近法^[11,16]。

2 运动微分方程

由于 J_2 项摄动引起的引力加速度较大,而扰动引力加速度较小,其对自由段弹道的影响是随飞行时间逐渐凸显的。因此,为了更加准确地计算 J_2 项摄动引力和扰动引力的影响,分别在非正交坐标系和轨道坐标系内建立弹道飞行器运动微分方程。

2.1 考虑 J_2 项摄动的运动微分方程

针对考虑 J_2 项摄动时的地球引力,在非正交坐标系内分析弹道飞行器的受力,并建立相应的运动微分方程。

图1中, K 点为自由段运动起始点, \mathbf{r}_k 和 \mathbf{v}_k^A 为该点位置矢量和绝对速度矢量, ϕ_k 为该点地心纬度; \mathbf{r} 为自由段弹道任一点的位置矢量(即该点的地心矢径);定义由初始点位置矢量 \mathbf{r}_k 、绝对速度矢量 \mathbf{v}_k^A 所构成的平面为初轨道平面, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_k^A$ 是初轨道平面与过 K 点地球子午面间的二面角。

非正交坐标系 $O_1 - x_1 y_1 z_1$:坐标原点 O_1 为自由段运动起始点, x_1 轴和 y_1 轴在初始轨道平面内, y_1 轴与 \mathbf{r}_k 重合, x_1 轴垂直于 y_1 轴且指向运动方向, z_1 轴与 $-\boldsymbol{\omega}_e$ 方向一致。在该坐标系内, P 点的位置矢量 \mathbf{r} 可以表示为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{z}_1 的矢量和。其中, \mathbf{r}_1 端点为 P_1 , \mathbf{z}_1 端点为 P ; ϕ 和 ϕ_1 分别为 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_1 的地心纬度, \mathbf{r}_k 至 \mathbf{r}_1 的地心角为 β 。

在非正交坐标系内建立弹道飞行器运动微分方程组^[6]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{p} \\ \frac{d^2 \zeta}{d\beta^2} + \zeta = 3J_2 \frac{a_E^2}{p} \eta_0 E(\beta) \\ \frac{d^2 \delta \eta}{d\beta^2} + \delta \eta = \frac{1}{p} \left\{ 3\zeta E(\beta) + \frac{3}{2} J_2 a_E^2 \eta_0^2 [1 - 5E^2(\beta)] \right\} \\ \eta = \eta_0 + \delta \eta \\ \frac{dt}{d\beta} = \frac{1}{h\eta^2} \end{cases} \quad (6)$$

其中: $h = |\mathbf{r}_K \times \mathbf{v}_K^A|$, $p = \frac{h^2}{fM}$; $\eta = 1/r_1$; $\zeta = z_\pi/r_1$;

$E(\beta) = \sin\phi_K \cos\beta + \cos\phi_K \sin\beta \cos\hat{\alpha}_K^A$

可见,式(6)中的第2、第3子式即为 J_2 项摄动引起的微分方程。

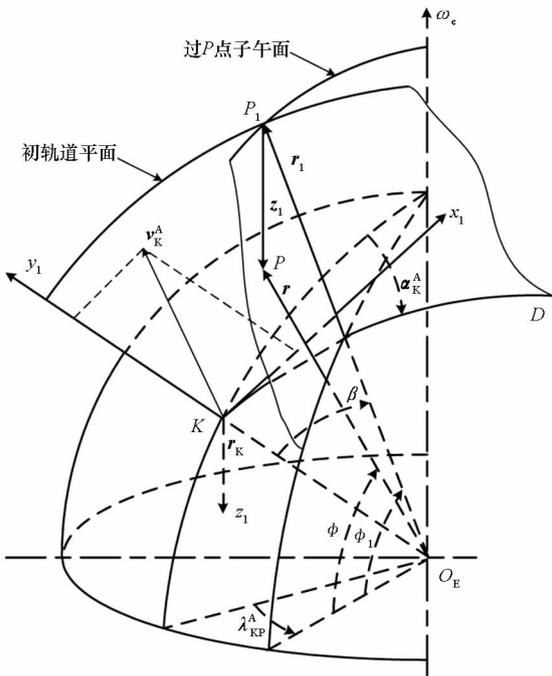


图1 非正交坐标系几何关系

Fig.1 Geometrical relationship of non-orthogonal coordinate system

2.2 扰动引力引起的运动微分方程

扰动引力为空间矢量,其大小和方向决定于弹道飞行器所处的空间位置。为精细化分析扰动引力对自由段弹道的影响,采用逐段逼近策略,在轨道坐标系内建立扰动引力引起的运动微分方程。

轨道坐标系 $O_0 - x_0 y_0 z_0$: 坐标原点 O_0 为自由段分段内运动起始点,起始点位置矢量和绝对速度矢量确定的平面为轨道平面, x_0 轴在轨道平面内指向运动方向, y_0 轴与当前位置矢量方向一致, z_0 轴与 x_0 轴、 y_0 轴构成右手直角坐标系。

根据北天东坐标系和轨道坐标系的定义可得,北天东坐标系至轨道坐标系的转换矩阵 $\mathbf{T}_N^0 = \mathbf{M}_2[\hat{\alpha}_K^A]$, 因此扰动引力加速度在轨道坐标系内的分量为:

$$\begin{bmatrix} \delta g_{x_0} \\ \delta g_{y_0} \\ \delta g_{z_0} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_N^0 \begin{bmatrix} \delta g_\phi \\ \delta g_r \\ \delta g_\lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

扰动引力加速度分量 δg_{y_0} 与飞行器所在位置的地心矢径方向一致,根据万有引力定律,可表示为质量偏差 δM 引起的加速度,即:

$$\delta g_{y_0} = -\frac{f\delta M}{r_K^2} \quad (8)$$

此时,轨道平面内的运动是在中心引力体质量 $M' = M + \delta M$ 作用下的椭圆轨道,其微分方程为:

$$\frac{d^2 \eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{p'} \quad (9)$$

式中, $p' = \frac{h^2}{fM'} = \frac{h^2}{f(M + \delta M)}$ 。

对于扰动引力分量 δg_{x_0} 和 δg_{z_0} , 分别影响轨道平面内沿 x_0 轴方向的运动和垂直于轨道平面沿 z_0 轴方向的运动,在自由段分段内表现为匀加速直线运动,其微分方程为:

$$\begin{cases} \delta v_{x_0} = \delta g_{x_0} \\ \delta v_{z_0} = \delta g_{z_0} \\ \delta s_{x_0} = \delta v_{x_0} \\ \delta s_{z_0} = \delta v_{z_0} \end{cases} \quad (10)$$

2.3 考虑地球非球形引力的运动微分方程

由式(6)和式(9)可知,扰动引力加速度分量 δg_{y_0} 对椭圆轨道运动的影响,将进一步影响考虑 J_2 项摄动的运动。综合式(6)、式(9)和式(10)可得,考虑地球非球形引力的运动微分方程组为:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{p'} \\ \frac{d^2 \zeta}{d\beta^2} + \zeta = 3J_2 \frac{a_E^2}{p'} \eta_0 E(\beta) \\ \frac{d^2 \delta \eta}{d\beta^2} + \delta \eta = \frac{1}{p'} \left\{ 3\zeta E(\beta) + \frac{3}{2} J_2 a_E^2 \eta_0^2 [1 - 5E^2(\beta)] \right\} \\ \eta = \eta_0 + \delta \eta \\ \frac{dt}{d\beta} = \frac{1}{h\eta^2} \\ \delta a_{x_0} = \delta g_{x_0} \\ \delta a_{z_0} = \delta g_{z_0} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \delta v_{x_E} \\ \delta v_{y_E} \\ \delta v_{z_E} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^E \cdot \begin{bmatrix} \delta v_{x_0} \\ 0 \\ \delta v_{z_0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

P 点北天东坐标系至地心坐标系的转换矩阵为:

$$\mathbf{T}_N^E = \mathbf{T}_E^{NT} = (\mathbf{M}_2[-90^\circ] \cdot \mathbf{M}_1[\phi_P] \cdot \mathbf{M}_3[-(90^\circ - \lambda_P)])^T \quad (20)$$

考虑 J_2 项摄动影响, 弹道飞行器在 P 点, 其绝对速度在地心坐标系内的分量为:

$$\begin{bmatrix} v_{x_{E_P}} \\ v_{y_{E_P}} \\ v_{z_{E_P}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_N^E \cdot \begin{bmatrix} v_{x_{N_P}}^A \\ v_{y_{N_P}}^A \\ v_{z_{N_P}}^A \end{bmatrix} \quad (21)$$

综合考虑 J_2 项和扰动引力摄动影响后, 弹道飞行器在 P' 点, 其速度参数在地心坐标系内的分量为:

$$\begin{bmatrix} v_{x_{E_{P'}}} \\ v_{y_{E_{P'}}} \\ v_{z_{E_{P'}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x_{E_P}} \\ v_{y_{E_P}} \\ v_{z_{E_P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta v_{x_E} \\ \delta v_{y_E} \\ \delta v_{z_E} \end{bmatrix} \quad (22)$$

由 P' 点的位置参数 $x_{E_{P'}}$ 、 $y_{E_{P'}}$ 、 $z_{E_{P'}}$ 可计算该点的地心纬度 $\phi_{P'}$ 、经度 $\lambda_{P'}$ 、地心距 $r_{P'}$, 则地心坐标系至 P' 点北天东坐标系的转换矩阵为:

$$\mathbf{T}_{E_{P'}}^N = \mathbf{M}_2[-90^\circ] \cdot \mathbf{M}_1[\phi_{P'}] \cdot \mathbf{M}_3[-(90^\circ - \lambda_{P'})] \quad (23)$$

从而可得 P' 点在北天东坐标系内弹道飞行器的绝对速度:

$$\begin{bmatrix} v_{x_{N_{P'}}}^A \\ v_{y_{N_{P'}}}^A \\ v_{z_{N_{P'}}}^A \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{E_{P'}}^N \cdot \begin{bmatrix} v_{x_{E_{P'}}} \\ v_{y_{E_{P'}}} \\ v_{z_{E_{P'}}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

5 落点位置偏差计算

为描述考虑地球非球形引力摄动影响的自由段解析解计算精度, 将自由段飞行弹道直接延续至落点, 这里给出落点位置偏差的计算方法。

利用解析解计算得到的落点相对于发射点的射程角 β 和方位角 α 为:

$$\begin{cases} \beta = \arccos[\sin\phi_0 \sin\phi_c + \cos\phi_0 \cos\phi_c \cos(L_c - L_0)] \\ \alpha = \arcsin \frac{\cos\phi_c \sin(L_c - L_0)}{\sin\beta} \end{cases} \quad (25)$$

式中, (L_0, ϕ_0) 为发射点经度和地心纬度, (L_c, ϕ_c) 为落点经度和地心纬度。

同理, 利用式(25)可计算数值积分法得到的落点相对于发射点的 β^{\sim} 和方位角 α^{\sim} , 则解析解落点的纵横向偏差为:

$$\begin{cases} \Delta L = R^* (\beta - \beta^{\sim}) \\ \Delta H = R^* \sin\beta^{\sim} (\alpha - \alpha^{\sim}) \end{cases} \quad (26)$$

其中, R^* 为地球平均半径。

解析解计算的弹道飞行器落点位置偏差为:

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta L)^2 + (\Delta H)^2} \quad (27)$$

6 仿真分析

为验证所提出的考虑地球非球形引力摄动影响的自由段解析解, 将 12 000 km 射程的飞行弹道自由段按 $\Delta\beta = 1^\circ$ 进行分段, 对应的扰动引力由 360 阶 EGM96 球谐函数模型计算得到, 在此基础上分别分析不同发射方位角、不同发射点大地纬度下的解析解落点位置偏差。

固定发射点(大地纬度 0° 、经度 0° 、大地高 0 m), 发射方位角由 -180° 至 180° 变化时解析解计算的落点偏差如图 3 所示; 发射点经度和大地高固定(分别为 100° 和 100 m), 发射点大地纬度由 0° 至 80° 变化时解析解计算的落点偏差如图 4 所示。

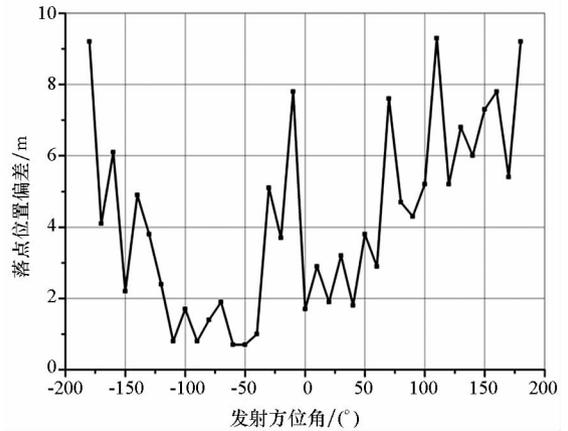


图 3 不同发射方位角下的解析解计算精度

Fig. 3 Precision of the analytic solution under different launching azimuth

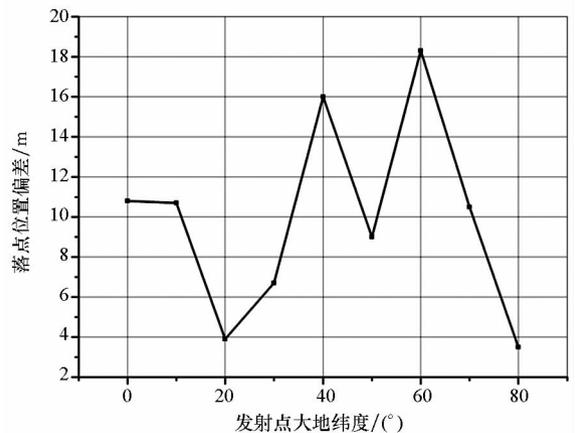


图 4 不同发射点大地纬度下的解析解计算精度

Fig. 4 Precision of the analytic solution under different geodetic latitude of launching point

由图3和图4计算结果可知,所提出的弹道飞行器自由段解析解计算精度较高,落点位置偏差小于20 m,对不同飞行弹道具有较强的适应性。

进一步,针对发射点大地纬度为 60° 时的自由段飞行弹道,深入分析引起自由段解析解落点位置偏差的影响因素。图5~7给出了北天东坐标系内扰动引力三分量随时间变化曲线。

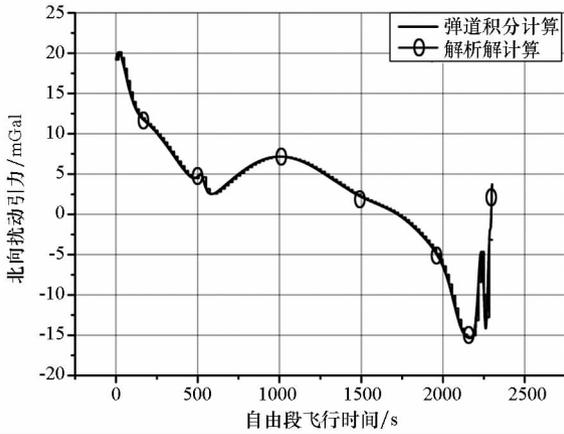


图5 北向扰动引力

Fig. 5 Northern disturbing gravity

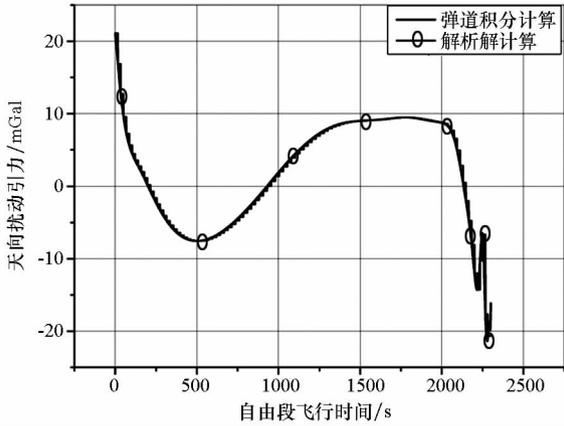


图6 天向扰动引力

Fig. 6 Upward disturbing gravity

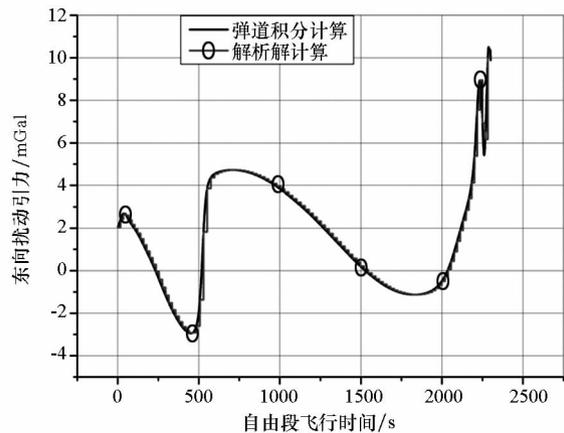


图7 东向扰动引力

Fig. 7 Eastern disturbing gravity

为进一步提高解析解计算精度,可根据实际需要适当增加自由段分段数,缩短分段内的飞行时间,从而降低扰动引力的近似误差。

需要说明的是,仿真分析中采用球谐函数法计算自由段扰动引力,若将自由段解析解与扰动引力快速计算方法(如有限元逼近法)相结合,可进一步提高计算效率。

7 结论

针对弹道飞行器自由段弹道快速计算问题,在非正交坐标系和轨道坐标系内建立了运动微分方程,在地心坐标系内计算飞行器的位置和绝对速度等弹道参数,建立了同时考虑 J_2 项摄动引力和扰动引力的地球非球形引力摄动影响下的自由段弹道近似解析解。数值仿真分析结果表明,该方法具有较高的计算精度和计算效率,对不同飞行弹道具有较强的适应性,满足远程弹道飞行器高精度制导和轨迹预测等强实时性任务需求。

参考文献 (References)

- [1] 贾沛然, 陈克俊, 何力. 远程火箭弹道学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
JIA Peiran, CHEN Kejun, HE Li. Long-range rocket ballistics[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997. (in Chinese)
- [2] 龙乐豪. 总体设计(上)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
LONG Lehao. General design (volume I) [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1989. (in Chinese)
- [3] 朱龙根. 改进的 Barrar 型中间轨道[J]. 国防科技大学学报, 1985, 7(2): 61-75.
ZHU Longgen. Modified Barrar-type intermediate orbit[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1985, 7(2): 61-75. (in Chinese)
- [4] 李晓明. 经典 f、g 级数的修正法[J]. 国防科技大学学报, 1991, 13(2): 59-67.
LI Xiaoming. A correcting method for classical f and g series[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1991, 13(2): 59-67. (in Chinese)
- [5] Kozai Y. The motion of a close earth satellite [J]. The Astronomical Journal, 1959, 64(9): 367-377.
- [6] 李连仲. 弹道飞行器自由飞行轨道的解析算法[J]. 宇航学报, 1982, 13(1): 1-17.
LI Lianzhong. An analytic method for solving the equations of free flight trajectory of ballistic vehicle [J]. Journal of Astronautics, 1982, 13(1): 1-17. (in Chinese)
- [7] 陈世年. 控制系统设计[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
CHEN Shinian. Control system design [M]. Beijing: Astronautic Publishing House, 1989. (in Chinese)
- [8] 任莹. 自由飞行时摄动方程的状态转移矩阵的解析解[J]. 中国空间科学技术, 1983, 3(1): 1-16.
REN Xuan. An statetransition analytical solution for free flight

- perturbation equations [J]. Chinese Space Science and Technology, 1983, 3(1): 1-16. (in Chinese)
- [9] 郑伟, 汤国建. 弹道导弹自由段解算的等高约束解析解[J]. 宇航学报, 2007, 28(2): 269-272.
ZHENG Wei, TANG Guojian. Contour restricted analytical solution for free flight trajectory of ballistic missile [J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(2): 269-272. (in Chinese)
- [10] 常晓华, 杨宇和, 张鸣, 等. 任意大地高约束下的弹道飞行器自由段解析解[J]. 导弹与航天运载技术, 2016(5): 62-65, 73.
CHANG Xiaohua, YANG Yuhe, ZHANG Ming, et al. Analytical solution of arbitrary geodetic height restricted for free flight trajectory of ballistic vehicle [J]. Missiles and Space Vehicles, 2016(5): 62-65, 73. (in Chinese)
- [11] 郑伟, 汤国建. 扰动引力场中弹道导弹飞行力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
ZHENG Wei, TANG Guojian. Flight dynamics of ballistic missile in gravity anomaly field [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. (in Chinese)
- [12] 赵东明, 吴晓平. 弹道扰动引力的有限元逼近算法[J]. 测绘学院学报, 2002, 19(2): 99-101.
ZHAO Dongming, WU Xiaoping. The method of finite element approximation of the trajectory disturbing gravity [J]. Journal of Institute of Surveying and Mapping, 2002, 19(2): 99-101. (in Chinese)
- [13] 郑伟, 钱山, 汤国建. 弹道导弹制导计算中扰动引力的快速赋值[J]. 飞行力学, 2007(3): 42-44, 48.
ZHENG Wei, QIAN Shan, TANG Guojian. A gravity anomaly rapid calculation method in ballistic missile guidance [J]. Flight Dynamics, 2007(3): 42-44, 48. (in Chinese)
- [14] 王继平, 王明海, 张志辉. 扰动引力的神经网络逼近算法[J]. 宇航学报, 2008, 29(1): 385-390.
WANG Jiping, WANG Minghai, ZHANG Zhihui. Approximation of the disturbing gravity using neural network [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(1): 385-390. (in Chinese)
- [15] 谢愈, 郑伟, 汤国建. 弹道导弹全程扰动引力快速赋值方法[J]. 弹道学报, 2011(3): 18-23.
XIE Yu, ZHENG Wei, TANG Guojian. Research on fast assignment of gravity disturbance for full-range trajectory of ballistic missile [J]. Journal of Ballistics, 2011(3): 18-23. (in Chinese)
- [16] Zhou H, An X Y, Zheng W, et al. Fast local representation of gravity anomaly along flight trajectory [J] // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2016, 230(7): 1201-1215.
- [17] Belykin G, Cramer R. Toward multiresolution estimation and efficient representation of gravitational fields [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2002, 84(1): 87-104.