doi:10.11887/j.cn.201804018

http://journal. nudt. edu. cn

轴承装配误差及预紧量对导引头伺服机构谐振频率影响与分析。

于乃辉^{1,2},梁科山¹,吴 伟¹,曹玉君¹ (1. 国防科技大学智能科学学院,湖南长沙 410073;

2. 中国人民解放军 31636 部队, 云南 昆明 650300)

摘 要:为了在精密装调过程中对导引头伺服机构的动态特性进行准确预测,采用理论建模的方法确定 了轴承微量装配参数与伺服机构谐振频率的定量关系。基于 Hertz 接触理论,建立5自由度轴承刚度模型, 并将微量装配误差对轴承刚度矩阵的影响进行建模和分析;采用 Timoshenko 梁理论推导弹性阶梯轴单元矩 阵,并确定系统特征值和特征向量的求解方法;采用 MATLAB/GUI 建立伺服机构谐振频率分析系统,并搭建 实验系统对理论模型进行验证。分析和实验结果表明,所建立的分析方法可以对轴承的微量装配误差引起 的谐振频率变化进行比较准确的计算,解决了目前伺服机构精密装调过程中动态特性预测的难题。

关键词:导引头伺服机构;轴承装配误差;谐振频率;轴承刚度矩阵;Timoshenko梁理论

中图分类号:TP273 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2018)04-112-09

Impact and analysis of bearing installation errors and pre-tightening amount on the resonant frequency of seeker servo mechanism

YU Naihui^{1,2}, LIANG Keshan¹, WU Wei¹, CAO Yujun¹

(1. College of Artificial Intelligence, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. The PLA Unit 31636, Kunming 650300, China)

Abstract: To predict the dynamic characteristics of seeker servo mechanism in the process of precision assembly, the quantitative relationship between the micro assembly parameters and the resonance frequency of servo mechanism was built by using the theoretical modeling method. Based on the Hertz contact theory, a five-degree-of-freedom bearing stiffness model was established and the influence of the micro assembly errors on the bearing stiffness matrix was modeled and analyzed. Using the theory of Timoshenko beam, the cell matrix of elastic multi-diameter shaft was derived. The method of solving the eigenvalue and eigenvector of the whole system was determined. An analysis system for resonant frequency of servo mechanism was established through using MATLAB/GUI and the experimental system was established to verify the theoretical model. The analysis and experimental results show that the established analytical method and system can accurately calculate the resonant frequency variation caused by the micro-assembly errors of bearing. This method solves the problem of dynamic characteristic prediction in the process of precision assembly of servo mechanism.

Key words: seeker servo mechanism; bearing installation errors; resonant frequency; bearing stiffness matrix; theory of Timoshenko beam

伺服机构的谐振频率是导引头系统重要的动态特性指标,其大小对导引头的控制带宽具有决定性的影响,从而直接决定了导引头的视线稳定精度、干扰力矩抑制能力及振动抑制能力^[1]。在结构设计中,高刚度/质量比材料的选择、负载的轻量化设计、质量分布及结构的优化设计等是提高伺服机构谐振频率的最主要手段^[2-3]。同时,伺服机构是由多个零部件集成装配而成,装配过程中不可避免的配合误差及装配参数的调整也是改变其动态特性的重要工艺过程。另外,装配参数的调整不但会改变伺服机构动态特性,也会对

其摩擦力矩^[4]、回转精度^[5]产生耦合影响。由于 装配参数对伺服机构性能影响的复杂性,国内的 导引头生产部门长期将这种微量影响当成工艺问 题来处理,装配质量控制基本依赖于装调技师的 经验,从而导致装配质量不稳定、反复测试和重复 调整等问题。

伺服机构装配误差是指伺服机构的轴承、框架、齿轮等因加工、装配形成的偏转、偏移或偏心 误差。虽然微量装配误差及装配参数对伺服机构 动态特性影响并不像改变材料或结构那么显著, 但其造成的谐振频率小范围变化已经引起了国内

* 收稿日期:2017 - 11 - 10
 基金项目:国家自然科学基金资助项目(51675527)
 作者简介:于乃辉(1986—),男,山东青岛人,博士,E-mail:yunaihui@126.com;
 梁科山(通信作者),男,副教授,博士,E-mail:nudtlks@163.com

外学者的重视。Lee 等^[6]建立了轴承偏心的转子 系统的动力学模型,并分析了不同类型的径向偏 心及偏心量对系统谐振频率的影响。Ertas 和 Vance^[7]建立了角接触轴承转子系统的实验系 统,实验研究了角接触轴承外圈和内圈偏转对轴 承刚度及转子系统谐振频率的影响。Ishida 等^[8] 则对轴承与轴承座的间隙对转子系统动态特性的 影响进行了分析,并进行了实验验证。Gunduz 等^[9]建立了双列滚子轴承转子系统的动力学模 型,分析了轴承预紧力对系统模态的影响,通过实 验证明,轴承的径向和轴向预紧力都会极大地改 变转子系统的振动特性。目前,由于影响因素众 多、理论建模困难,装配误差对伺服机构动态性能 影响的研究大多采用实验验证的方法,而验证结 论一般只适用于某种类型的伺服机构。因此,采 用理论建模方法,建立统一的伺服机构装配误差 和动态特性的关系是进一步提高系统动态特性及 质量的关键步骤。

现代导弹技术的快速发展对导引头的稳定 精度和动态特性提出了越来越高的要求,因微 量装配误差导致的伺服机构性能波动和质量不 稳定问题逐渐成为导引头性能发展的瓶颈。本 文以研究轴承装配误差对伺服机构动态特性的 影响为目标,通过建立装配误差—系统矩阵— 动态特性的映射关系,分析轴承径向偏移、偏转 及轴向预紧位移对伺服机构谐振频率和模态的 影响。提出谐振频率的快速计算方法,逐步解 决目前伺服机构精密装配过多依赖技师经验和 模糊调整等问题。

基于转子动力学的伺服机构系统描述 及系统方程

伺服机构很多装配参数会对其谐振频率或模态产生影响,但所有参数变化都反映在伺服机构系统质量矩阵、系统刚度矩阵及系统阻尼矩阵中。如图1所示,如果忽略活动线缆、辅助配件,并将探测器简化为规则的圆柱体,伺服机构单个转轴可以看成由弹性轴、负载及轴承组成的轴承-转子系统组成,其中负载包含探测器、力矩电机的转子及角度传感器的内圈。

如图2所示,把弹性轴直径变化处、负载质 心及轴承中心在弹性轴所对应位置作为关键节 点,将弹性轴有限元化,并根据几何尺寸和物理参 数确定每个单元的质量、刚度及阻尼矩阵,与轴承 刚度、阻尼矩阵(忽略轴承质量)及负载质量进行 综合,可以得到系统动力学方程。



图 2 轴承 - 转子系统有限元分析模型



根据转子动力学理论,伺服机构单轴的动力 学方程可表示为^[10]:

 $M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t)$ (1) 式中: $M = M_t + M_r$ 为系统的质量矩阵, M_t 为横向

移动引起的质量矩阵, M_r 为转动惯量引起的质量 矩阵; $K = K_s + K_b$ 为系统刚度矩阵, K_s 和 K_b 分别 为轴的刚度矩阵和轴承刚度矩阵; $C = D + \omega G$ 为 系统的阻尼矩阵,D 为比例阻尼,轴承阻尼一般也 采用比例阻尼,即 $D_b = \sigma K_b, \sigma$ 为瑞利比例阻尼系 数, ω 为转速,G 为陀螺效应矩阵;q 为自由度。 在齐次状态下,式(1)的特征值和特征向量即为 系统的谐振频率和模态。

2 装配误差及预紧量对轴承刚度矩阵影 响分析

伺服机构框架不可避免的加工误差以及零件 装配过程中的结合面配合误差会导致轴承内、外 圈之间发生微量的偏移和偏转,另外轴向预紧力 和负载也会使轴承内、外圈之间产生轴向和径向 偏移。上述原因必然造成轴承内、外圈之间5个 自由度的变形,包括3个方向的偏移和2个方向 的偏转,从而改变轴承的刚度、阻尼矩阵。

2.1 面向几何参数的轴承刚度模型

如图 3 所示,假设轴承各方向所受载荷为 $F_{b} = \{F_{bx} \ F_{by} \ F_{bz} \ M_{bx} \ M_{by}\}^{T},其对应的变形为$ $\delta_{b} = \{\delta_{bx} \ \delta_{by} \ \delta_{bz} \ \theta_{bx} \ \theta_{by}\}^{T}$ 。

根据弹性力学关系,轴承所受的载荷 $F_{\rm b}$ 必然是其变形 $\delta_{\rm b}$ 的函数,因此轴承的刚度矩阵为:





图 3 轴承受力分析及坐标系定义

Fig. 3 Force analysis and frame definition for the bearing

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\theta_{x}} & k_{x\theta_{y}} \\ k_{yy} & k_{yz} & k_{y\theta_{x}} & k_{y\theta_{y}} \\ k_{zz} & k_{z\theta_{x}} & k_{z\theta_{y}} \\ \text{symmetric} & k_{\theta_{x}\theta_{x}} & k_{\theta_{x}\theta_{y}} \\ & & & & & & & \\ \end{bmatrix}$$
(2)

为了求出轴承的刚度矩阵,首先需要建立 F_b 与 δ_b 的函数关系式。由每个滚动体的法向载荷 Q_j ,通过轴承的静力学关系可以推导出轴承所受载荷 F_b ,如下:

$$\begin{cases} \begin{cases} F_{\rm hx} \\ F_{\rm by} \\ F_{\rm hz} \end{cases} = \sum_{j=1}^{z} Q_{j} \begin{cases} \cos\alpha_{j} \cos\phi_{j} \\ \cos\alpha_{j} \sin\phi_{j} \\ \sin\alpha_{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{\rm hx} \\ M_{\rm hy} \end{cases} = \sum_{j=1}^{z} r_{p} Q_{j} \sin\alpha_{j} \begin{cases} \sin\phi_{j} \\ -\cos\phi_{j} \end{cases}$$

$$(3)$$

其中:α_j为轴承受载后的压力角;r_p为轴承内圈 滚道曲率中心到轴承中心的距离。

从轴承的单个滚动体的弹性力学关系入手, 根据 Harris 的理论^[11],球轴承的单个滚动体与轴 承外圈、轴承内圈形成一个弹性系统,其载荷 - 变 形关系为:

$$Q_{n,j} = K_n \left[\delta(\phi_j) \right]^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

式中: ϕ_j 为每个滚珠的角位置,从+x轴逆时针方向开始; $\delta(\phi_j)$ 是位于 ϕ_j 的滚动体的变形量; $Q_{n,j}$ 是位于 ϕ_j 的滚动体的法向载荷; K_n 是轴承内圈 – 滚动体 – 外圈的有效刚度系数,是轴承材料和几何参数的函数。

如图 4 所示,可以得到轴承变形与每个滚珠的弹性变形量 $\delta(\phi_j)$ 的关系为:

$$\delta(\phi_j) = \begin{cases} A(\phi_j) - A_0 & \delta(\phi_j) > 0\\ 0 & \delta(\phi_j) \le 0 \end{cases}$$
(5)

式中: A_0 是轴承未受载时,轴承内圈滚道曲率中 心 o_a 及外圈滚道曲率中心 o_i 之间的距离; $A(\phi_j)$ 是轴承受载后,在 ϕ_j 处轴承内圈滚道曲率中心 o_a



图 4 球轴承滚动体弹性变形关系 Fig. 4 Elastic deformation relation of rolling body for ball bearing

及外圈滚道曲率中心 o' 之间的距离,

$$A(\phi_j) = \sqrt{\left(\delta_{zj}^t\right)^2 + \left(\delta_{rj}^t\right)^2} \tag{6}$$

其中, $\delta_{z_i}^{t} = A_0 \sin \alpha_0 + \delta_{z_i}$, $\delta_{r_i}^{t} = A_0 \cos \alpha_0 + \delta_{r_i}$; δ_{z_i} 、 δ_{r_i} 分别为滚动体的轴向、径向变形, α_0 是轴承的初始 接触角。 δ_{z_i} 和 δ_{r_i} 用轴承的总位移向量 δ_b 表示为:

$$\begin{cases} \delta_{zj} = \delta_{bz} + r_p \left\{ \theta_{bx} \sin(\phi_j) - \theta_{by} \cos(\phi_j) \right\} \\ \delta_{ij} = \delta_{bx} \cos(\phi_j) + \delta_{by} \sin(\phi_j) - r_L \end{cases}$$
(7)

其中, r_L 是轴承径向游隙。

通过式(3)~(7)可以得到 K_b 的 25 个分量 的代数表达式,如:

$$k_{xx} = K_n \sum_{j=1}^{z} \frac{\left[A(\phi_j) - A_0\right]^n \cos^2 \phi_j \left[\frac{nA(\phi_j)(\delta_{ij}^t)^2}{A(\phi_j) - A_0} + A(\phi_j)^2 - (\delta_{ij}^t)^2\right]}{A(\phi_j)^3}$$

2.2 轴承装配误差及参数对轴承刚度矩阵影响 分析

下面以71803角接触轴承为例进行分析。其 主要参数如表1所示。

表1 71803 角接触轴承参数

Tab. 1 Parameters of angular contact bearing 71803

几何参数	参数值	几何参数	参数值
外径/mm	26	内滚道直径/mm	19.110 9
内径/mm	17	外滚道直径/mm	23.889 1
宽度/mm	5	初始接触角/(°)	15
滚珠数量	15	内滚道曲率系数	0.56
球径/mm	2.381 0	外滚道曲率系数	0.54

假设轴承已经初步预紧,即轴承游隙为0且 轴承滚动体与滚道恰好接触,以此作为分析的零 点。轴承z向预紧量变化范围为0~0.01 mm,其

 $\times 10^{5}$ 8

6

4

2

他变形分量为0,轴向位移对轴承刚度矩阵的影 响如图5所示。

由图5可以看出,随着预紧量的增加,轴承刚 度增加明显。0 mm 到 0.002 mm 刚度迅速增加, 之后平滑增加。x向和y向分量远远大于轴向(z向)分量,这与轴承接触角大小有关。





从图5和图6的对比可以看出:相同偏移量 下,只有径向偏移的轴承刚度要小于只有轴向偏 移的轴承刚度。因为轴承只发生径向偏移,意味 着受载的滚动体数量减少,轴承刚度自然下降。x 方向的线刚度大于 y 方向,角刚度则相反。

假设轴承安装完成后,存在 x、y 方向的偏移误 差分别为0.01 mm, x, y方向的偏转误差分别为5 s,计算结果如图7所示。随着轴向预紧的增加,轴承 刚度矩阵呈现复杂的变化趋势。但总体而言,随着

预紧位移的增加,轴承 x 向和 y 向的径向线刚度和 角刚度会逐渐趋于相同,只从刚度方面考虑,轴承轴 向预紧力会部分消除其装配误差造成的影响。

由以上的分析可以看出,轴承轴向预紧量对 增加轴承刚度最为重要,虽然径向偏移和偏转误 差也会增加该方向上轴承的刚度,但其同样会减 小相反方向轴承的刚度。在伺服机构装配过程 中,尽可能减小轴承装配误差并合理调整预紧量 是提高轴承刚度的必然选择。



Fig. 7 Influence of axial pretension on bearing stiffness matrix when installation error is present

3 伺服机构弹性阶梯轴有限元建模

如果图 2 中的弹性阶梯轴每个单元都视为规则圆柱体,则每个单元的质量 M_i 、刚度 K_{si} 及陀螺力矩阵 G_i 都可以由 Timoshenko 梁理论^[12]计算得到。

如图 8 所示,对于某一单元 Ei,如果不考虑 z 方向转动和移动,则每个节点有 4 个自由度,每个 单元的变形向量为:

$$\boldsymbol{q}_{i} = (\underbrace{u_{xi} \ u_{yi} \ \theta_{xi} \ \theta_{y}}_{\text{T} \triangleq i}, \underbrace{u_{x(i+1)} \ u_{y(i+1)} \ \theta_{x(i+1)} \ \theta_{y(i+1)}}_{\text{T} \triangleq i})$$





由于 xz, yz 平面自由度的质量、刚度矩阵并 不存在耦合,将其按照平面进行分组:

$$\boldsymbol{q}_{i} = \left(\underbrace{u_{xi} \ \theta_{yi} \ u_{x(i+1)} \ \theta_{y(i+1)}}_{xz \overline{\Psi} \overline{\Pi}} \underbrace{u_{yi} \ \theta_{xi} \ u_{y(i+1)} \ \theta_{x(i+1)}}_{yz \overline{\Psi} \overline{\Pi}}\right)$$
(9)

因此系统的变形向量为:

$$q = \begin{cases} q_{xz[2(N+1)\times1]} \\ q_{yz[2(N+1)\times1]} \\ \end{cases}_{[4(N+1)\times1]} \\ = \begin{cases} [u_{x1} \quad \theta_{y1} \quad u_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \cdots \quad u_{x(N+1)} \quad \theta_{y(N+1)}]^{\mathrm{T}} \\ [u_{y1} \quad \theta_{x1} \quad u_{y2} \quad \theta_{x2} \quad \cdots \quad u_{y(N+1)} \quad \theta_{x(N+1)}]^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

$$(10)$$

假设每个单元相对于旋转坐标系的变形向 量为:

$$\boldsymbol{q}_{irot} = (U_{xi} \ \boldsymbol{\Theta}_{yi} \ U_{x(i+1)} \ \boldsymbol{\Theta}_{y(i+1)} \ U_{yi} \ \boldsymbol{\Theta}_{xi} \ U_{y(i+1)} \ \boldsymbol{\Theta}_{x(i+1)})$$
(11)

则单元的应变能表示为:

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2} \int_0^l E I_x (U''_x)^2 + E I_y (U''_y) \, \mathrm{d}z \quad (12)$$

式中:l为单元长度;E为弹性模量; I_x 和 I_y 为转动惯量。

 $q_i 与 q_{int}$ 的关系可以通过旋转变化得到,其径向变形分量为:

$$\begin{cases} U_x = \cos(\omega t + \psi_0) u_x + \sin(\omega t + \psi_0) u_y \\ U_y = -\sin(\omega t + \psi_0) u_x + \cos(\omega t + \psi_0) u_y \end{cases}$$
(13)

式中, ψ。为初始相位角。

根据 Lalanne 和 Ferraris 得到的特征形状函数^[13]可以得到 u 与各变形分量的关系:

$$\begin{cases} u_x = N_1 u_{xi} + N_2 u_{x(i+1)} + N_3 \theta_{xi} + N_4 \theta_{x(i+1)} \\ u_y = N_1 u_{yi} + N_2 u_{y(i+1)} + N_3 \theta_{yi} + N_4 \theta_{y(i+1)} \end{cases}$$
(14)

其中, $N_1 = 1 - 3z^2/l^2 + 2z^3/l^3$, $N_2 = 3z^2/l^2 - 2z^3/l^3$, $N_3 = -z + 2z^2/l - z^3/l^2$, $N_4 = z^2/l - z^3/l^2_{\circ}$

将式(14)和式(13)代入式(12),并整理 得到:

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{si} \boldsymbol{q}_i \qquad (15)$$

整理得到的 K_{si}即为单元刚度矩阵,如果考虑 剪切效应,则 K_{si}为:

$$\boldsymbol{K}_{si} = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{K}_1 \tag{16}$$

其中,

$$\mathbf{K}_{0} = \frac{EI}{l^{3}(1 + \Phi)} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & & & \\ 6l & 4l^{2} & -6l & 2l^{2} & & \mathbf{0} \\ -12 & -6l & 12 & -6l & & \mathbf{0} \\ 6l & 2l^{2} & -6l & 4l^{2} & & & \\ & & & 12 & 6l & -12 & 6l \\ & & & & 6l & 4l^{2} & -6l & 2l^{2} \\ & & & & -12 & -6l & 12 & -6l \\ & & & & 6l & 2l^{2} & -6l & 4l^{2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{1} = \frac{EI}{l^{3}(1 + \Phi)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & l^2 & 0 & -l^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -l^2 & 0 & l^2 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & l^2 & 0 & -l^2 \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -l^2 & 0 & l^2 \end{bmatrix}$$

 $Φ = 24(1 + ν) I/(κAl^2)$ 为横向剪切系数,其中 κ 为 Timoshenko 剪切修正系数, κ = 6(1 + ν)(1 + s²)²/[(7 + 6ν)(1 + s²)² + (20 + 12ν)s²], s = d_o/d_i, d_i, d_o 为空心轴的内、外直径, ν 为泊松比, I 为转轴的惯性矩。

单元的动能为:

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_0^1 (\dot{u}_x + \dot{u}_y) dz + \dots + \frac{1}{2}\rho \int_0^1 (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + 2I_z \omega_z^2) dz \quad (17)$$

式中, ρ为材料密度。

通过整理式(17)可以得到单元的质量矩阵 *M_i*和陀螺力矩阵*G_i*。

4 轴承-转子系统的谐振频率求解

假设在转速为ω时,系统特征方程的自由 解为:

$$q(t) = \varphi e^{\lambda t} \quad q(t), \varphi \in \mathbf{R}^{N}$$
(18)

式中,λ 为特征值。

将上式代入式(1),得到:

$$\chi(\lambda)\varphi = 0 \tag{19}$$

其中, $\chi(\lambda) = (\lambda^2 M + \lambda C + K)$ 称为动态刚度。

方程 $|\chi(\lambda)| = |\lambda^2 M + \lambda C + K| = 0$ 的特征 值有 2N 个,对应的特征向量分为右特征向量 φ_r (由 $\chi(\lambda_r) \varphi_r = 0$ 求出)和左特征向量 ϕ_r (由 $\phi_{r\chi}^{T}(\lambda_r) = 0$ 求出)。

 $\chi(\lambda)$ 的逆为系统频率响应函数矩阵 $H(\omega)$,即: $H(\omega) = \chi^{-1}(i\omega) = (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1}$

其可以表示为特征值和特征向量的函数:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{r=1}^{N} \frac{a_{r} \boldsymbol{\varphi}_{r} \boldsymbol{\phi}_{r}^{\mathrm{T}}}{i\boldsymbol{\omega} - \lambda_{r}} + \frac{\overline{a}_{r} \overline{\boldsymbol{\varphi}}_{r} \overline{\boldsymbol{\phi}}_{r}^{\mathrm{T}}}{i\boldsymbol{\omega} - \overline{\lambda}_{r}} \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$$

$$(21)$$

式中,a_r为比例系数。

另外,为了方便求解,对式(1)进行状态空间 变换,令:

$$z(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

则式(1)变换为:

$$S\dot{z}(t) + Bz(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$
(22)

其中, $S = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} C & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}$ 。

令
$$z(t) = \tilde{\varphi}_{p} e^{\lambda_{p} t} = \begin{bmatrix} \lambda_{p} \varphi_{p} \\ \varphi_{p} \end{bmatrix} e^{\lambda_{p} t}$$
,将其代人

式(1),可以得到系统的 2N 个特征值 λ_p 和特征 向量 φ_p 对,即:

$$\lambda_p S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_p + \boldsymbol{B} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_p = 0 \tag{23}$$

将式(23)写成矩阵形式为:

$$S\Pi\Lambda + B\Pi = 0 \tag{24}$$

其中, $\Pi = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 & \tilde{\phi}_2 & \cdots & \tilde{\phi}_{2N} \end{bmatrix}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2N})$ 。对式(24)进行求解,得到系统的特

征值和特征向量,即系统的谐振频率和模态。

5 装配误差对系统动态特性影响实例分析 及实验研究

5.1 谐振频率理论分析

基于上述理论,采用 MATLAB/GUI 建立面向 装配的伺服机构谐振分析系统。

下面以图 9 所示系统进行仿真分析。负载 1 质量为 0.68 kg,负载 2 质量为 6.6 kg,负载 3 质量 为 1.2 kg;轴承为两个 71803 角接触轴承。弹性阶 梯轴假设无中心孔,材料为合金钢,密度7.7× 10³ kg/m³,弹性模量 2.1×10¹¹ N/m²,泊松比 0.28。 阶梯轴主要尺寸(单位:mm)如图 10 所示。

假设轴承安装完成后,两个轴承的内圈分别 存在 x、y 方向的偏移误差为 0.01 mm,x、y 方向的 偏转误差为 5 s。两个轴承采用背对背安装方式, 其轴向预紧量为 0.02 mm,采用第 2 节的理论得 到轴承刚度矩阵为:

 $\begin{bmatrix} 6.99 \times 10^4 & 3.02 \times 10^3 & 4.13 \times 10^3 \\ & 7.43 \times 10^4 & 2.93 \times 10^4 \\ & 2.09 \times 10^4 \end{bmatrix}$ symmetric

将图 2 所示关键节点作为单元节点,并将阶 梯轴分为 28 个单元,轴承所在节点分别为第 6 和 第 26。通过仿真计算,得到系统的频率响应曲线 如图 11 所示,前六阶谐振频率为:156.57 Hz、 164.77 Hz、226.50 Hz、238.38 Hz、2258.95 Hz、 2259.13 Hz。模态计算结果如图 12 所示,图中白 色曲线为模态形状。由图 12 可以看出,一、二阶 模态为横向位移,三、四阶模态为径向偏转,五、六 阶模态为阶梯轴的弯曲变形。



pre-tightening amount is 0.02 mm







图 10 阶梯轴主要尺寸



-8.73×10^{3}	-2.19×10^{5}
2.69×10^{5}	8.73×10^{3}
1.56×10^{5}	-8.75×10^{3}
1.43×10^{6}	5.20×10^{4}
	9.85 × 10^5

由以上分析可以看出,轴承接触刚度是决定 旋转轴模态的最主要因素,前四阶模态都与轴承 刚度分量的大小有关。



(a) 一、二阶模态(a) The first and second order modal



(b) 三、四阶模态(b) The third and fourth order modal





(c)五、六阶模态(c) The fifth and sixth order modal



假设轴承的轴向预紧量从 0 mm 增加到 0.2 mm,增加间距为 0.02 mm,其前四阶谐振频 率的变化趋势如图 13 所示。可以看出,随着轴承 轴向预紧量的增加系统的谐振频率并不是线性增 加,由于轴承各分量的耦合作用,其各阶谐振频率 存在波动增长的趋势。

由以上的仿真分析可以看出,本文所建立的 伺服机构数值有限元算法可以快速地得到装配参 数对伺服机构谐振频率及模态的定量关系,这对 伺服机构的精密装配极为重要。





5.2 实验研究

为了对理论模型进行验证,采用 dSPACE 搭 建伺服机构半实物仿真系统并采用加速度传感器 对其进行扫频实验。实验只针对伺服机构方位 轴,方位轴由两个 71803 角接触轴承支撑,并由力 矩电机直接驱动。采用光电编码器对旋转角度进 行反馈,并限制方位轴在±30°内旋转。

实验采用千分表对方位轴轴承的装配误差及 预紧量进行测量。安装完成后,前轴承内圈相对 于外圈的偏移量为 0.005 mm(x 方向)和 0.006 mm (y方向)。后轴承内圈相对于外圈的偏移量为 -0.007 mm(x方向)和0.004 mm(y方向)。

在轴承没有任何预紧的情况下,其扫频结果如图 14 所示。实验结果为 5 次测量结果的平均 值。可以看出:由于轴承游隙的存在,旋转轴存在 低阶模态,方位轴一阶谐振频率为 18.40 Hz,二 阶谐振频率为 75.50 Hz。





随着轴承轴向预紧量的升高,其一阶谐振频 率逐渐增大。当轴承预紧量增加到 0.02 mm,即 轴承 完 全 消 隙 时,其 一 阶 谐 振 频 率 增 加 到 104.50 Hz。通过第 5.1 节的理论计算模型,得到 同样 装 配 误差 的 伺 服 机 构 一 阶 谐 振 频 率 为 110.62 Hz,实验结果与理论分析的结果基本 吻合。

由于电机和驱动器扫频能力的限制,无法对 更高阶的谐振频率进行实验验证。但通过以上实 验结果可以看出,本文所提出的理论模型可以比 较准确地预测在一定装配误差下的伺服机构谐振 频率。

6 结论

以建立装配参数与伺服机构谐振频率定量关 系为目标,对轴承刚度矩阵和弹性阶梯轴的单元 矩阵进行了详细的建模和分析。建立了5自由度 轴承刚度模型,并分析了轴承装配参数对轴承不 同刚度分量的影响。基于 Timoshenko 梁理论建 立了弹性阶梯轴单元矩阵,推导得到系统的特征 值和特征向量的数值计算方法,通过与轴承刚度 矩阵的综合得到伺服机构单轴谐振频率分析系 统。最后,采用 dSPACE 建立伺服机构的半实物 仿真系统,并对理论分析结果进行了实验验证,通 过实验可以看出:在轴承完全消隙的情况下,建立 的理论模型可以对转轴谐振频率进行比较准确的 预测。总之,本文所建立的谐振频率分析系统可 以快速地得到装配参数与谐振频率的定量关系, 这对研究微量的装配误差对伺服机构谐振频率的 影响具有重要意义。

参考文献(References)

- Hilkert J M, Amil D L. Structural effects and techniques in precision pointing and tracking systems: a tutorial overview[J]. Proceedings of the SPIE, 2010, 7696(3): 231 – 239.
- [2] Doyle K B. Optimal structural design of the airborne infrared imager[J]. Proceedings of SPIE, 1995, 2542: 11 - 22.
- [3] 马宏垒. 二框二轴光电稳定平台结构设计研究及有限元 分析[D]. 长春:吉林大学, 2011.
 MA Honglei. The structural design research and finite element analysis on two gimbals and two axis opto-electronic platform[D]. Changchun: Jilin University, 2011. (in Chinese)
- [4] 安静涛. 空间角接触球轴承摩擦力矩理论分析及实验研究[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2016.

AN Jingtao. Theoretical analysis and experimental study of space angle contact ball bearing frictional torque [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2016. (in Chinese)

- [5] 黎启胜,张映梅,卢永刚,等.精密离心机结构安装误差 对主轴回转精度的影响[J].机械设计与制造,2012(2): 58-60.
 LI Qisheng, ZHANG Yingmei, LU Yonggang, et al. Effect of assembly error of precision centrifuge structure on rotary precision of main spindle [J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(2): 58-60. (in Chinese)
- [6] Lee Y S, Lee C W. Modelling and vibration analysis of misaligned rotor-ball bearing systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 224(1): 17-32.
- [7] Ertas B H, Vance J M. Effect of static and dynamic misalignment on ball bearing radial stiffness [J]. Journal of Propulsion and Power, 2004, 20(4): 634 - 647.
- [8] Ishida Y, Inagaki M, Ejima R, et al. Nonlinear resonances and self-excited oscillations of a rotor caused by radial clearance and collision [J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 57(4): 593-605.
- [9] Gunduz A, Dreyer J T, Singh R. Effect of bearing preloads on the modal characteristics of a shaft-bearing assembly: experiments on double row angular contact ball bearings[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 31: 176 – 195.
- [10] Didier J, Sinou J J, Faverjon B. Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties [J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(3): 671-703.
- [11] Harris T A, Kotzalas M N. Rolling bearing analysis: essential concepts of bearing technology [M]. 5th ed. USA: CRC Press, 2007.
- [12] Nelson H D. A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory [J]. Journal of Mechanical Design, 1980, 102(4): 793-803.
- [13] Lalanne M, Ferraris G. Rotordynamics prediction in engineering [M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1990.