

固体推进剂黏弹性本构模型及其有限元应用研究*

崔辉如, 申志彬, 李海阳

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:基于时温等效原理和WLF方程建立推进剂黏弹性泊松比主曲线方程,进而建立考虑时间温度相关泊松比的推进剂本构模型。基于增量有限元方法,采用完全显式积分算法推导增量形式的黏弹性本构方程。根据MSC.Marc用户子程序编程规则,确定本构模型对应的一致切线刚度矩阵从而实现本构模型的有限元应用。先后通过固化降温以及点火增压工况,分别采用黏弹性泊松比以及弹性泊松比对药柱结构进行应力应变力学响应分析,并对比不同类型泊松比对应应力应变场的影响。研究方法和结果可为发动机药柱的精细结构完整性分析提供参考。

关键词:固体推进剂;黏弹性泊松比;二次开发;本构模型;有限元法

中图分类号:V435 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)05-027-06

Study on viscoelastic constitutive model of solid propellant and its implementation in finite element method

CUI Huiru, SHEN Zhibin, LI Haiyang

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The viscoelastic Poisson's ration master curve of solid propellant was established on the basis of the time-temperature equivalence principle and WLF equation, and then the viscoelastic constitutive model of solid propellant was proposed. The viscoelastic constitutive model in incremental form was deduced on the basis of the incremental finite element method and by adopting the fully explicit integration method. The constitutive model was realized in finite element software by using the consistent tangent stiffness acquired according to the programming rules of user subroutine in MSC.Marc. The stress-strain mechanical response of solid propellant grains was analyzed by using the viscoelastic and the elastic Poisson's ration under solidification process and ignition pressurization process. Furthermore, the effects of different kind of Poisson's rations on the stress-strain field were compared. The method and result can provide a reference for the structural integrity analysis of engine grain.

Key words: solid propellant; viscoelastic Poisson's ration; secondary development; constitutive model; finite element method

固体推进剂是典型的黏弹性材料,其泊松比在材料参数中扮演着重要的角色。试验结果显示^[1],推进剂黏弹性泊松比是与时间、温度、纵向应变水平以及预紧力相关的量。仿真结果表明^[2-3],推进剂泊松比在千分位上的变化会对结构分析带来重要的影响。然而,在实际发动机结构分析中,推进剂黏弹性泊松比常被处理成常数。由以上分析可知,这样的假设势必会带来不合理的分析结果。因此,利用黏弹性泊松比替代弹性泊松比进行结构分析是非常有必要的。

一些专家学者对不同弹性泊松比下推进剂药柱结构时间-温度相关的力学响应进行了分析,结果表明^[2-3],当泊松比从不可压情况下的泊松比变化到可压情况下的泊松比时,泊松比对药柱

结构分析会有特别严重的影响。尽管以上分析说明了泊松比对结构分析的影响,但是黏弹性泊松比对药柱结构的影响分析依旧没有解决。Deng等^[4]研究了考虑时间相关泊松比的非线性黏弹性本构模型,并采用增量有限元方法对推进剂药柱结构进行了有限元分析。仿真结果表明,弹性泊松比计算得出的应力应变结果比黏弹性泊松比计算得出的小得多。但是,Deng等在研究中利用的由Pan等^[5]测量得到的黏弹性泊松比是非常高的,并且在200 s内达到了平衡泊松比0.499 64,相比于分析中十年的贮存时间,200 s的时间可以完全忽略。此外,在他们的分析中,泊松比的温度相关性并没有考虑。因此,有必要利用测量得到的泊松比数据开展与时间以及温度相关的黏弹性

* 收稿日期:2017-06-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11132012)

作者简介:崔辉如(1991—),男,江苏东台人,博士研究生,E-mail:15651710682@163.com;

李海阳(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:lihaiyang@nudt.edu.cn

泊松比对推进剂药柱结构分析影响的研究。

1 考虑黏弹性泊松比的三维黏弹性本构模型

1.1 黏弹性泊松比和松弛模量主曲线

数字图像相关方法^[1]是一种非接触式的高精度的图像测量技术,该方法避免了传统接触式双引伸计方法带来的附加刚度,同时还提高了泊松比的测量精度。数字图像相关方法利用电荷耦合元件记录被测物变形前后表面的两幅数字散斑图,对数字散斑图进行有关的运算,找到相关系数最大的极值点,进而求出位移和变形。基于数字图像相关方法对六组不同温度条件(70 ℃、50 ℃、20 ℃、0 ℃、-15 ℃、-30 ℃)下的固体推进剂黏弹性泊松比进行测量,测量结果显示固体推进剂的泊松比既是时间的函数,又是温度的函数。类似于松弛模量,泊松比随时间与温度的变化关系亦符合时温等效原理,可以利用构建松弛模量主曲线的方法构建泊松比主曲线。图 1(a)所示为对数坐标系中不同温度条件下 HTPB (hydroxyl-terminated polybutadiene) 复合固体推进剂的泊松比的曲线分布(图中 t 代表时间,其单位为 s),可以发现,不同温度下的泊松比曲线有着相似的规律,这为利用时温等效原理构建泊松比主曲线提供了直观的证据。

图 1(b)中的散点为根据不同温度下的移位因子将泊松比的测量结果进行平移得到的在参考温度下的新的点。利用最小二乘法拟合出了泊松比主曲线,其参考温度为 20 ℃。

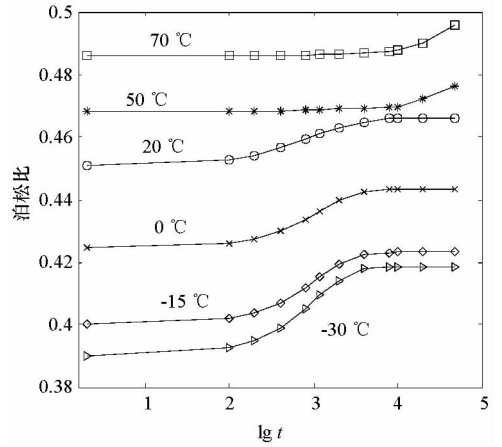
此外,将黏弹性泊松比表示为 Prony 级数形式:

$$\nu(t) = \nu_0 + \sum_{n=1}^{N_p} \nu_n (1 - e^{-\frac{t}{\tau_n}}) \quad (1)$$

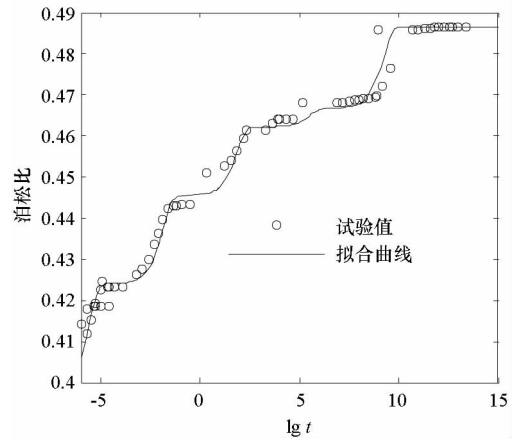
或者类似的:

$$\nu(t) = \nu_\infty - \sum_{n=1}^{N_p} \nu_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \quad (2)$$

其中, ν_0 是初始泊松比, ν_∞ 是平衡泊松比, N_p 是 Prony 级数项数, t 代表时间, τ_n 和 ν_n 为待定系数。



(a) 对数坐标下的黏弹性的松比
(a) Viscoelastic Poisson's ratio under logarithmic coordinates



(b) 参考温度 20 ℃ 下的黏弹性泊松比主曲线
(b) Master curve of viscoelastic Poisson's ratio under reference temperature of 20 ℃

图 1 黏弹性泊松比在不同坐标系下的曲线分布
Fig.1 Curve distribution of viscoelastic Poisson's ratio under different coordinate systems

表 1 给出了该主曲线的 Prony 级数参数,其中级数项数取 5。

为了能够描述固体推进剂泊松比在工作范围内任意温度的变化规律,需要利用 WLF^[6] 方程进行任意温度的转换。利用最小二乘法拟合 WLF 方程,拟合结果显示,WLF 方程系数 $C_1 = -22.89$ 和 $C_2 = -109.43$ 。

表 1 黏弹性泊松比主曲线 Prony 级数系数

Tab.1 Parameters in the Prony series for viscoelastic Poisson's ratio master curve

	N_p					
	0	1	2	3	4	5
τ_n^v/s		2.78×10^{-6}	1.39×10^{-2}	69.54	3.48×10^5	1.74×10^9
ν_n	0.398 2	0.025 9	0.021 3	0.016 8	0.004 5	0.019 9

文献[7]中提到,在同一试验中同时测量出黏弹性材料的两项力学参数是较为完备的参数测量方法。本文在进行固体推进剂泊松比的测量时,采用的试验方法为松弛试验,在测量泊松比的同时也进行了松弛模量的测量。类似地,表2给出了松弛模量主曲线的 Prony 级数形式 $E(t) = E_0 - \sum_{n=1}^{N_E} E_n(1 - e^{-t/\tau_n^E})$ 中的参数,级数项数 N_E 取5项,参考温度为 20 ℃。其中, E_0 是初始松弛模量, t 代表时间, τ_n^E 和 E_n 为待定系数。

同样为了能够描述固体推进剂松弛模量在工作范围内任意温度的变化规律,需要利用 WLF 方程进行任意温度的转换。利用最小二乘法拟合 WLF 方程,拟合结果显示, WLF 方程系数 $C_1 = 15.23$ 和 $C_2 = 334.52$ 。

1.2 考虑黏弹性泊松比的应力应变关系

通过对推进剂本构模型进行 Laplace 变换,考虑黏弹性泊松比的黏弹性本构^[8]可以表示成:

$$\sigma_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}(t) \quad (3)$$

其中, δ_{ij} 为克罗内克符号,偏应力 $S_{ij}(t)$ 和球应力 $\sigma_{kk}(t)$ 可以表示为

$$S_{ij}(t) + \int_{-\infty}^t \nu(\theta - \theta') \frac{\partial S_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_{-\infty}^t E(\xi - \xi') \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

$$\sigma_{kk}(t) - 2 \int_{-\infty}^t \nu(\theta - \theta') \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_{-\infty}^t E(\xi - \xi') \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

其中,

$$\hat{\varepsilon}_{kk} = \varepsilon_{kk} - 3\alpha\Omega \quad (6)$$

θ 和 ξ 表示折算时间, Ω 表示温度变化, α 为热膨胀系数, ε_{kk} 为体积应变。

根据卷积积分的原理,式(4)和式(5)可以化简为:

$$S_{ij}(t) + \nu(\theta)S_{ij}(0) + \int_0^t \nu(\theta - \theta') \frac{\partial S_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = E(\xi)e_{ij}(0) + \int_0^t E(\xi - \xi') \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}(t) - 2\nu(\theta)\sigma_{kk}(0) - 2 \int_0^t \nu(\theta - \theta') \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ = E(\xi)\hat{\varepsilon}_{kk}(0) + \int_0^t E(\xi - \xi') \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

2 含黏弹性泊松比的黏弹性本构的增量形式及一致切线刚度矩阵

2.1 本构关系的离散化

为了在有限元软件应用上述本构关系,实现数值计算,需要对本构模型进行离散化。首先时间区间 $[0, t]$ 可以划分为若干个分析时间步,即:

$$[0, t] = \bigcup_n [t_n, t_{n+1}], \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1} \quad (9)$$

类似地,折算时间 $\theta(t)$ 和 $\xi(t)$ 也划分为相应的时间步:

$$[0, \theta] = \bigcup_n [\theta_n, \theta_{n+1}], \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \Delta \theta_{n+1} \quad (10)$$

$$[0, \xi] = \bigcup_n [\xi_n, \xi_{n+1}], \quad \xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \xi_{n+1} \quad (11)$$

同理,可以得到离散化的本构方程:

$$\Delta \sigma_{ij}(t_{m+1}) = \Delta S_{ij}(t_{m+1}) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta \sigma_{kk}(t_{m+1}) \quad (12)$$

其中:

$$\Delta S_{ij}(t_{m+1}) = S_{ij}(t_{m+1}) - S_{ij}(t_m) \quad (13)$$

$$\Delta \sigma_{kk}(t_{m+1}) = \sigma_{kk}(t_{m+1}) - \sigma_{kk}(t_m) \quad (14)$$

2.2 数值积分策略

在每个时间步结束时,黏弹性应变 $e_{ij}(t)$ 和 $\hat{\varepsilon}_{kk}(t)$ 通常通过对应变率的数值积分的方法求得^[9-10]:

$$\varepsilon_{ve}^{n+1} = \varepsilon_{ve}^n + [(1 - \beta) \frac{d\varepsilon_{ve}}{dt} |_{t_n} + \beta \frac{d\varepsilon_{ve}}{dt} |_{t_{n+1}}] \Delta t_{n+1} \quad (15)$$

其中, ε_{ve} 代表黏弹性应变, $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$, β 表示时间步参数。 $\beta = 0$ 代表完全显示积分, $\beta = 1$ 代表完全隐式积分,此外当 $\beta > 0$ 时,都代表隐式积分。

表2 松弛模量主曲线 Prony 级数系数

Tab.2 Parameters in the Prony series for relaxation modulus master curve

	N_E					
	0	1	2	3	4	5
τ_n^E/s		6.676×10^{-3}	0.178	4.746	126.578	3375.273
E_n/MPa	74.467	49.22	16.51	4.69	1.97	1.09

因为在计算中考虑了黏弹性泊松比,在一个时间步结束,求解黏弹性应力张量增量 $\Delta S_{ij}(t)$ 和 $\Delta \sigma_{kk}(t)$ 依旧需要用到数值积分。

类似地,一个时间步结束时,黏弹性应力的计算通常通过对应力变化率的数值积分的方法求得:

$$\sigma_{ve}^{n+1} = \sigma_{ve}^n + \left[(1-\beta) \frac{d\sigma_{ve}}{dt} \Big|_n + \beta \frac{d\sigma_{ve}}{dt} \Big|_{n+1} \right] \Delta t_{n+1} \quad (16)$$

其中, σ_{ve} 代表黏弹性应力。

对于完全显式积分算法是非常容易编程实现的并且每一个时间步花费的计算内存较少。尽管会出现一些数值不稳定的现象,但是大多数的黏弹性问题^[11-15]都采用了这一算法。隐式算法每一步的计算需要消耗更多的时间,但是其计算数值比较稳定^[16-17]。尽管隐式算法很少面临数值不稳定的情况,但是对于非线性黏弹性问题,它要比显式算法消耗更多的计算时间^[9-10]。此外,还有其他的一些算法,介于完全显式与隐式算法之间,比如半显式算法^[18]、半隐式算法^[19]、显-隐式算法^[20]以及预校正显-隐式算法^[21]也被用来处理非线性黏弹性问题。然而,这类算法针对三维非线性黏弹性问题而言编程比较复杂并且会产生不收敛的现象。基于以上分析,本文将采用完全显式算法进行数值积分。

2.3 一致切线刚度矩阵

在有限元软件 MSC. Marc 二次开发程序中,基于应力更新的一致切线刚度矩阵是求解问题的

关键。此外,一致切线刚度矩阵的优劣还会决定迭代的速率。小变形条件下,在 t_{m+1} 时刻,一致切线刚度矩阵有以下形式:

$$C_{ijkl}(t_{m+1}) = \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}(t_{m+1})}{\partial \Delta \varepsilon_{kl}(t_{m+1})} \quad (17)$$

由于材料各向同性的属性,有以下关系式成立:

$$C_{2222}(t_{m+1}) = C_{3333}(t_{m+1}) = C_{1111}(t_{m+1}) \quad (18)$$

$$C_{2233}(t_{m+1}) = C_{1133}(t_{m+1}) = C_{1122}(t_{m+1}) \quad (19)$$

$$C_{2323}(t_{m+1}) = C_{1313}(t_{m+1}) = C_{1212}(t_{m+1}) \quad (20)$$

3 考虑黏弹性泊松比的药柱结构力学响应分析

为了研究黏弹性泊松比对药柱结构力学响应的的影响,本节利用上文推导的增量形式的本构关系以及一致切线刚度矩阵,编写了相应的用户子程序;基于 MSC. Marc 软件二次开发技术,分析了两种常见工况下发动机结构的应力应变响应。为了简化模型,利用发动机结构的对称性,采用了发动机结构的 1/16 模型进行分析。在发动机头部,对称面上施加了相应的位移约束。整个发动机结构有限元模型如图 2 所示,其中总的节点数为 44 579,正六面体单元数为 38 444。发动机药柱的泊松比及松弛模量的参数采用第 1 节中的数据处理结果,壳体 and 绝热层以及药柱的其他力学参数如表 3 所示。为了对比黏弹性泊松比与弹性泊松比计算结果的差异,由规范 QJ 3228-2005 测得的泊松比 $\nu = 0.498$,将作为弹性泊松比计算的输入参数。

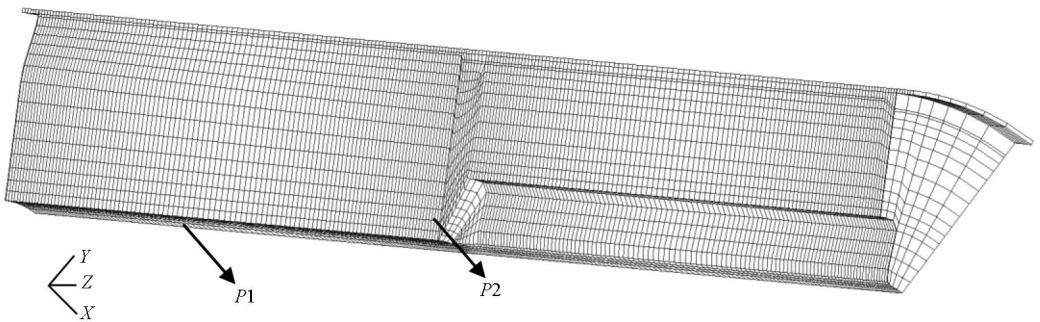


图 2 发动机整体有限元模型

Fig. 2 Finite element mesh of the solid rocket motor

表 3 发动机材料相关力学参数

Tab. 3 Basic material parameters of solid rocket motor

材料参数	壳体	绝热层	药柱
E/MPa	65 232	6.5	—
ν	0.116	0.49	—
α/K^{-1}	1×10^{-6}	1.3×10^{-4}	1.01×10^{-4}
$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1500	1100	1807

3.1 固化降温工况

固化降温是推进剂药浆在一定的时间和温度条件下完成固化交联的过程。固化过程中的固化时间和固化温度是主要的控制参数,高的固化温度容易造成较大的热应力,对后续装药的结构带来不良影响。所以,在固化降温阶段对发动机结构进行分析对指导固化过程有着重要的意义。

考虑零应力温度 58 ℃,在 1 d 内降低至室温 20 ℃,温度变化曲线参考经验方程为:

$$T(t) = T_1 - (T_1 - T_r)(1 - e^{-6.8 \times 10^{-5}t}) \quad (21)$$

其中, T_1 为零应力温度,即 58 ℃; T_r 为室温,即 20 ℃。

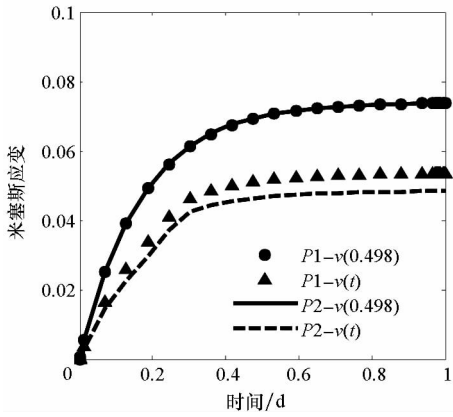
图3所示为固化降温过程中,药柱表面P1和P2点处米塞斯应变和米塞斯应力随时间的变化曲线。由图可以发现,定泊松比条件下的米塞斯应变和米塞斯应力计算一直大于黏弹性泊松比条件下的计算结果,并且随着时间的推移,结果差异越大。黏弹性泊松比条件下计算结果比定泊松比条件下计算结果小的原因主要是黏弹性泊松比计算条件下,泊松比远远小于0.498,这一点可以从第1.1节的黏弹性泊松比主曲线中看出。

化为:

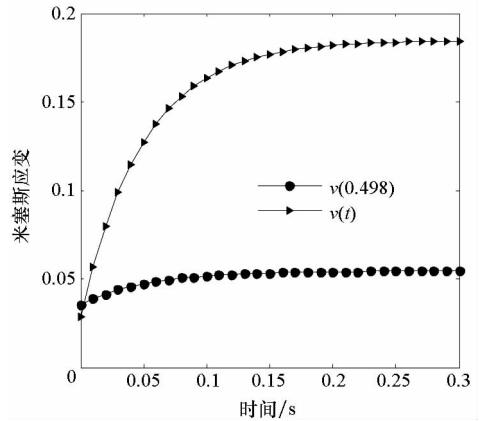
$$P(t) = P_0(1 - e^{-kt}) \quad (22)$$

其中, P_0 为内压的峰值, k 为调节系数。为分析方便,内压峰值 P_0 取 6 MPa,压力调节系数取 20,分析时间为 0.3 s。此外,在点火增压之前,发动机已经经历固化降温阶段(在 1 d 内由 58 ℃ 降温至 20 ℃)以及升温阶段(在 2 h 内由 20 ℃ 升温至 40 ℃),即高温 40 ℃ 点火。

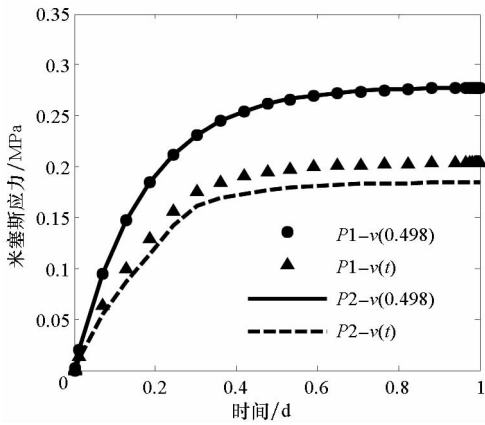
图4所示为点火增压过程中,药柱表面P2点处米塞斯应变和米塞斯应力随时间的变化曲线。由图可以发现,黏弹性泊松比条件下的米塞斯应变和米塞斯应力随时间变化的曲线在很短时间内超过了定泊松比条件下的计算结果,随着时间的推移,结果之间的差异越大;在 0.3 s 时,黏弹性泊松比条件下的米塞斯应变是定泊松比条件下的 3.41 倍,米塞斯应力是定泊松比条件下的 4.86 倍。造成这一现象的原因同样是在点火过程中药柱的黏弹性泊松比远远小于 0.498。



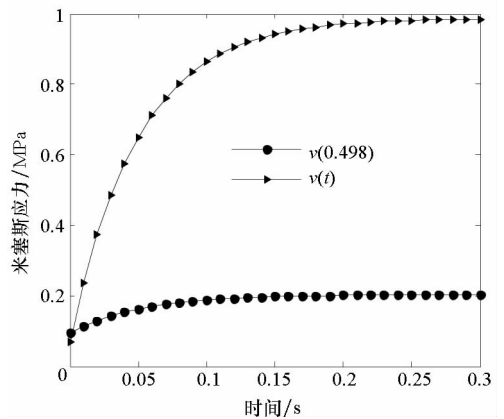
(a) 米塞斯应变时间变化曲线
(a) Von Misses strain versus time



(a) 米塞斯应变时间变化曲线
(a) Von Misses strain versus time



(b) 米塞斯应力时间变化曲线
(b) Von Misses stress versus time



(b) 米塞斯应力时间变化曲线
(b) Von Misses stress versus time

图3 固化降温阶段计算结果对比

Fig. 3 Comparison of results under solidification process

3.2 点火增压工况

点火增压过程是发动机结构分析中最为危险的工况之一。点火增压过程中,燃烧室内压力变化过程比较复杂,一般而言,可将压力变化曲线简

图4 点火增压阶段计算结果对比
Fig. 4 Comparison of results under ignition pressurization process

4 结论

基于时温等效原理对不同温度条件下测得的推进剂的泊松比时间相关曲线进行平移,利用 WLF 方程对平移后的泊松比主曲线进行数据拟合,得到了推进剂泊松比在 20 °C 条件下的泊松比主曲线方程。通过将考虑黏弹性泊松比的推进剂非线性黏弹性本构模型离散化,得到了增量形式的非线性黏弹性本构模型以及该模型的一致切线刚度矩阵。基于 MSC. Marc 二次开发技术,编写了该模型的用户子程序,通过两个算例分析了黏弹性泊松比对药柱结构力学响应分析的影响。计算结果表明:

1) 对于温度载荷而言,定泊松比条件下的米塞斯应变和米塞斯应力计算一直大于黏弹性泊松比条件下的计算结果,原因是在温度载荷下,泊松比越大,药柱结构的应力应变响应越明显。

2) 对于压力载荷而言,定泊松比条件下的米塞斯应变和米塞斯应力计算远小于黏弹性泊松比条件下的计算结果,原因是在压力载荷下,泊松比越小,药柱结构的应力应变响应越明显。这一点在关于定泊松比对结构分析影响的文献[2-3]中可以找到明显的计算实例。

参考文献 (References)

- [1] Cui H R, Tang G J, Shen Z B. Study on the viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method [J]. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2016, 41(5): 835-843.
- [2] Chyuan S W. Studies of Poisson's ratio variation for solid propellant grains under ignition pressure loading [J]. *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, 2003, 80(12): 871-877.
- [3] Chu H T, Chou J H. Poisson ratio effect on stress behavior of propellant grains under ignition loading [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2011, 27(3): 662-667.
- [4] Deng B, Shen Z B, Duan J B, et al. Finite element method for viscoelastic medium with damage and the application to structural analysis of solid rocket motor grain [J]. *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2014, 57(5): 908-915.
- [5] Pan B, Yuan J Y, Yu L P, et al. Determination of viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using an accuracy-enhanced 2D digital image correlation technique [J]. *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2016, 40(6): 821-830.
- [6] Williams M L, Landel R F, Ferry J D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids [J]. *Journal of American Chemical Society*, 1955, 77(14): 3701-3707.
- [7] Tschoegl N W, Knauss W G, Emri I. Poisson's ratio in viscoelasticity: a critical review [J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2002, 6(1): 3-51.
- [8] 邓斌. 考虑变泊松比、老化和损伤的固体发动机药柱黏弹性分析 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2014.
- [9] DENG Bin. Viscoelastic analysis of solid rocket motor grain considering time-dependent Poisson's ratio, aging and damage effects [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014. (in Chinese)
- [9] Waszczyszyn Z. Computational methods and plasticity: LR-583 [R]. Netherlands: Delft University of Technology, 1989.
- [10] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method, vol II: solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity [M]. USA: McGraw-Hill College, 1991.
- [11] Corigliano A, Mariani S. Identification of a constitutive model for the simulation of time-dependent interlaminar debonding processes in composites [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2002, 191(17/18): 1861-1894.
- [12] Lai J, Bakker A. 3-D schapery representation for nonlinear viscoelasticity and finite element implementation [J]. *Computational Mechanics*, 1996, 18(3): 182-191.
- [13] Enelund M, Mähler L, Runesson K, et al. Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36(16): 2417-2442.
- [14] Daniel W J T. Three-dimensional orthotropic viscoelastic finite element model of a human ligament [J]. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2001, 4(3): 265-279.
- [15] Qu X L, Wang Y, Fu G Y, et al. Efficiency and accuracy verification of the explicit numerical manifold method for dynamic problems [J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2014, 48(3): 1131-1142.
- [16] Deng B, Xie Y, Tang G J. Three-dimensional structural analysis approach for aging composite solid propellant grains [J]. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2014, 39(1): 117-124.
- [17] Beijer J G J, Spooemaker J L. Solution strategies for FEM analysis with nonlinear viscoelastic polymers [J]. *Computers and Structures*, 2002, 80(14/15): 1213-1229.
- [18] Hoppe R H W, Linsenmann C. The finite element immersed boundary method for the numerical simulation of the motion of red blood cells in microfluidic flows [M]. Netherlands: Springer, 2013.
- [19] Buechler M A, Luscher D J. A semi-implicit integration scheme for a combined viscoelastic-damage model of plastic bonded explosives [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014, 99(1): 54-78.
- [20] Baaijens F P T, Selen S H A, Baaijens J P W, et al. Viscoelastic flow past a confined [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1997, 68: 173-203.
- [21] Fahmy M A. Implicit-explicit time integration DRBEM for generalized magneto-thermoelasticity problems of rotating anisotropic viscoelastic functionally graded solids [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(1): 107-115.