doi:10.11887/j.cn.201806009 http://journal.nudt.edu.cn

初始误差和制导工具误差估计的非线性方法*

李 冬[1],魏 超[1],周萱影[2]
(1. 中国人民解放军91550部队,辽宁 大连 116023;2. 国防科技大学 文理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:准确估计初始误差和制导工具误差是机动发射飞行器精度鉴定必须解决的重要问题之一,提出了一种基于非线性模型的误差估计新方法。给出了平台初始失准角向定向误差的转换方法,采用不动点迭代法实现真实视加速度的精确计算,将真实发射系的轨道参数表示为初始误差和工具误差的非线性函数,结合外测数据建立了同时估计初始误差、工具误差、外测系统误差、遥外测时间零点偏差的非线性模型,避免了初始误差的线性化近似。给出了Bayes极大后验估计方法,利用非线性模型和先验信息获得误差的最优估计,证明了估计方法的收敛性。仿真结果表明,所提方法提高了初始误差和工具误差的估计精度,并实现了测量数据的自校准。

关键词:初始误差;制导工具误差;非线性模型;Bayes极大后验估计

中图分类号:V448 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2018)06-061-07

Estimation of initial error and guidance instrumentation error based on nonlinear model

LI Dong[1], *WEI Chao*[1], *ZHOU Xuanying*[2]
(1. The PLA Unit 91550, Dalian 116023, China;
2. College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The accurate estimation of the initial error and the guidance instrumentation error plays a key role in the precision assessment of the maneuvering launched vehicle, so a new estimation method based on nonlinear model was proposed. The platform initial angle error was transformed into the orientation error. The true apparent acceleration was accurately calculated by using the fixed point iteration method. Then, the trajectory parameters of the truth launch coordinate were represented by a nonlinear function with the initial error and the guidance instrumentation error. A nonlinear model was constructed by using the exterior trajectory measurements. This model can simultaneously estimate the initial error, the guidance instrumentation error, the measurement systematic error, and the time-zero deviation between telemetry data and exterior data, and it can avoid the linear approximation of the initial error. The Bayes MAP (maximum a posterior) estimation is given to obtain the optimal estimation of these errors by using the nonlinear model and the prior information, and it is proved to be convergent. Experimental results show that the proposed method improves the estimation accuracy of the initial error and the guidance instrumentation error when compared with the linear method and other nonlinear method. Furthermore, the proposed method can also achieve the self-calibration between different measurements.

Key words: initial error; guidance instrumentation error; nonlinear model; Bayes maximum posterior estimation

制导工具误差是影响飞行器命中精度的重要因素之一,飞行器精度鉴定通常利用遥、外测数据分离出特殊轨道的制导工具误差,将其折算到最大射程轨道上,进而获得全程轨道的命中精度[1-2]。与固定发射飞行器相比,机动发射飞行器还会受到初始定位误差、平台调平对准误差和初始速度误差的影响,这些初始误差与制导工具误差耦合在一起,共同引起落点偏差。研究表明,初始误差带来的落点偏差在量级上与制导工具误差相当[3]。研究初始误差和制导工具误差的估计方法,实现这两种误差的准确分离,对分析和评定机动发射飞行器的命中精度有重要意义。

许多学者对机动发射飞行器误差分离的模型及求解方法开展了研究工作。文献[4]在不考虑制导工具误差的前提下建立了估计初始误差的线性模型,文献[5]在此基础上建立了同时估计初始误差和制导工具误差的线性模型,并通过仿真实验验证了模型的正确性。文献[6]提出了利用飞行初段短时间的遥外差数据估计初始定位误差的方法,通过使用地面测试数据减小制导工具误

* 收稿日期:2017-10-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61703408)
作者简介:李冬(1983—),男,新疆奎屯人,工程师,博士,E-mail:nudtlidong@163.com

差对初始误差估计的影响。文献[7]在分离初始误差的线性模型中考虑了对平台初始失调角的估计。文献[8]利用进化策略对误差分离的线性模型进行寻优求解。以上研究都是误差估计的线性方法,此类方法对误差模型作了线性化处理,给模型求解带来一定的线性近似误差。另外,线性方法需要全程高精度轨道参数,而在飞行初段和级间段,受观测条件的限制和发动机火焰、震动的影响,外测设备无法获得测量数据或得到的数据精度很低,导致这些时段解算的轨道参数精度很差,也会降低误差估计的精度。文献[9]绕过了轨道参数的解算,直接由外测数据建立误差估计的非线性模型,无须使用飞行初段和级间段的测量数据,比线性方法更具优势。然而,文中对初始误差仍然作了线性化处理,另外,在构造初始误差的环境函数矩阵时没有考虑初始误差对重力加速度的影响,对发射方位角误差的估计精度不高。本文考虑将真实发射系下的轨道参数表示为初始误差和制导工具误差的非线性函数,进而利用外测数据模型建立精确的非线性模型,既可避免对初始误差作复杂的线性化处理,又可免去解算轨道参数的过程。

本文针对机动发射飞行器初始误差和制导工具误差的估计问题,首先推导了平台初始失准角向定向误差的转换关系式,然后给出了真实发射系轨道参数的计算方法,利用外测数据模型建立了关于初始误差、工具误差、遥外测时间零点偏差和外测系统误差的非线性模型,在此基础上给出了误差分离的 Bayes 估计方法,并证明了该方法的收敛性,最后通过仿真实验检验了误差估计方法的性能。

1 初始误差和制导工具误差估计的非线性模型

机动载体发射的飞行器,依据载体惯导系统提供的定位参数(大地纬度 B_0、大地经度 L_0、大地高程 H_0)、定向参数(天文纬度 B_T、天文经度 L_T、天文射击方位角 A_T)和初始速度参数 $\boldsymbol{V}_0=(v_{x0},v_{y0},v_{z0})^{\mathrm{T}}$ 进行制导计算。载体惯导系统的测量误差以及弹上惯导平台的调平对准误差导致定位、定向、初始速度参数与真实值存在偏差,称这个偏差为初始误差,它是造成落点偏差的重要因素之一。将初始误差分别记为 ΔB、ΔL、ΔH、ΔB_T、ΔL_T、ΔA_T 和 $\Delta\boldsymbol{V}=(\Delta v_x,\Delta v_y,\Delta v_z)^{\mathrm{T}}$,以 (B_0,L_0,H_0) 确定原点并以 (B_T,L_T,A_T) 确定三个坐标轴指向的发射惯性系称为理论发射惯性系,相应地,由真实定位参数 $(B_0+\Delta B,L_0+\Delta L,H_0+\Delta H)$ 和真实定向参数 $(B_T+\Delta B_T,L_T+\Delta L_T,A_T+\Delta A_T)$ 确定的发射惯性系称为真发射惯性系。发射零时刻,与理论发射惯性系重合的发射系称为理论发射系,与真发射惯性系重合的发射系称为真发射系。此外,还需定义平台坐标系,它的原点与真发射惯性系的原点重合,坐标轴与三个陀螺仪的敏感轴平行。

1.1 平台初始失准角向定向误差的转换

制导工具误差中的平台初始失准角 $(k_{p0x},k_{p0y},k_{p0z})$ 与定向误差 $(\Delta B_T,\Delta L_T,\Delta A_T)$ 存在耦合关系,无法将它们进行有效分离,本文考虑把平台初始失准角归算为定向误差,不估计平台初始失准角,这样,在发射零时刻,平台坐标系就与真发射惯性系重合。将真发射系和理论发射系向地心系的旋转矩阵分别记为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$,令 $\boldsymbol{R}_x(\gamma)$、$\boldsymbol{R}_y(\gamma)$ 和 $\boldsymbol{R}_z(\gamma)$ 分别为绕 x、y、z 轴旋转 γ 角的旋转矩阵,有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{R}_z(\pi/2-L_T-\Delta L_T)\boldsymbol{R}_x(-B_T-\Delta B_T)\times\\
&\quad\ \boldsymbol{R}_y(\pi/2+A_T+\Delta A_T)\\
\widetilde{\boldsymbol{M}}&=\boldsymbol{R}_z(\pi/2-L_T)\boldsymbol{R}_x(-B_T)\boldsymbol{R}_y(\pi/2+A_T)
\end{aligned}
$$

于是,理论发射系向真发射系的旋转矩阵为 $\boldsymbol{M}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}$。也可认为理论发射系向真发射系依照 z、y、x 轴的顺序旋转的三个欧拉角为 k_{p0z}、k_{p0y}、k_{p0x},这样就有如下关系式

$$\boldsymbol{M}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{R}_x(k_{p0x})\boldsymbol{R}_y(k_{p0y})\boldsymbol{R}_z(k_{p0z})$$

上式左右两边分别作关于 $(\Delta B_T,\Delta L_T,\Delta A_T)$ 和 $(k_{p0x},k_{p0y},k_{p0z})$ 的泰勒展开,并忽略高阶小项,可得平台初始失准角向初始误差的转换关系式为

$$
\begin{cases}
\Delta B_T=-k_{p0x}\sin A_T-k_{p0z}\cos A_T\\
\Delta L_T=k_{p0x}\sec B_T\cos A_T-k_{p0z}\sec B_T\sin A_T\\
\Delta A_T=k_{p0x}\tan B_T\cos A_T-k_{p0y}-k_{p0z}\tan B_T\sin A_T
\end{cases}
\tag{1}
$$

1.2 真实发射系轨道参数的求解

飞行器惯导平台输出的遥测数据为平台坐标系下的视速度测量 $\boldsymbol{W}_p(t)=(w_{px}(t),w_{py}(t),w_{pz}(t))^{\mathrm{T}}$,对其进行数值微分后可获得遥测视加速度 $\dot{\boldsymbol{W}}_p(t)=(\dot{w}_{px}(t),\dot{w}_{py}(t),\dot{w}_{pz}(t))^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{W}}_p(t)$ 与真发射惯性系下的视速度 $\boldsymbol{W}(t)=(w_x(t),w_y(t),w_z(t))^{\mathrm{T}}$、视加速度 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)=(\dot{w}_x(t),\dot{w}_y(t),\dot{w}_z(t))^{\mathrm{T}}$ 有如下关系式[10]:

$$\dot{\boldsymbol{W}}_p(t)-\dot{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{W}(t),\dot{\boldsymbol{W}}(t))\boldsymbol{C}$$

式中,$\boldsymbol{D}$ 为加速度域环境函数矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为制导工具误差。

构造如下不动点迭代格式:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{W}}^{(0)}(t) = \dot{\boldsymbol{W}}_p(t)\\ \dot{\boldsymbol{W}}^{(i+1)}(t) = \dot{\boldsymbol{W}}_p(t) - \boldsymbol{D}\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(i)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(i)}(t)\right)\boldsymbol{C}\end{cases} \tag{2}$$

对于给定的制导工具误差 $\boldsymbol{C}$，可由上式求解 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 和 $\boldsymbol{W}(t)$。为 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 定义范数：

$$\|\dot{\boldsymbol{W}}(t)\| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\sqrt{\dot{w}_x^2(t) + \dot{w}_y^2(t) + \dot{w}_z^2(t)}$$

其中，T 为轨道参数时长，定义映射 P：

$$\dot{\boldsymbol{W}} \mapsto P\dot{\boldsymbol{W}} = \dot{\boldsymbol{W}}_p(t) - \boldsymbol{D}\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}(t)\right)\boldsymbol{C}$$

由于制导工具误差 $\boldsymbol{C}$ 的值很小，映射 P 在集合 $A = \{\dot{\boldsymbol{W}}(t) \mid \|\dot{\boldsymbol{W}}(t) - \dot{\boldsymbol{W}}_p(t)\| < \alpha_1\}$ 内是压缩映射（α_1 为某一正数），即存在 $0 < \alpha_2 < 1$，使得

$$\|P\dot{\boldsymbol{W}}^{(1)} - P\dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}\| \leqslant \alpha_2 \|\dot{\boldsymbol{W}}^{(1)} - \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}\|,\quad \forall\, \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}, \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)} \in A \tag{3}$$

将 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 列记为 $\boldsymbol{D}_i$，$\boldsymbol{C}$ 的第 i 项记为 C_i，可知

$$\begin{aligned}\|P\dot{\boldsymbol{W}}^{(1)} - P\dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}\| &= \left\|\boldsymbol{D}\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(t)\right)\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(t)\right)\boldsymbol{C}\right\|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N}\left\|\boldsymbol{D}_i\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(t)\right)C_i - \boldsymbol{D}_i\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(t)\right)C_i\right\|\\ &\leqslant N\max_i\left\|\boldsymbol{D}_i\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(1)}(t)\right)C_i - \boldsymbol{D}_i\left(\int_0^t \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(s)\mathrm{d}s, \dot{\boldsymbol{W}}^{(2)}(t)\right)C_i\right\|\end{aligned} \tag{4}$$

其中，T 一般不超过 400 s，当考虑 21 个主要制导工具误差项时，根据 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的取值范围以及 $\boldsymbol{D}$ 的形式，取 $\alpha_1 = 100$，$\alpha_2 = 0.01$，利用式(4)可推出式(3)成立。由压缩映射原理，迭代式(2)是能够收敛的。仿真实验表明，该方法具有较快的收敛速度，一般经过 2 ~ 5 次迭代即可收敛。

$\boldsymbol{W}(t)$ 与真发射系下的轨道参数（包括位置参数 $\boldsymbol{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ 和速度参数 $\dot{\boldsymbol{X}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^{\mathrm{T}}$）满足如下关系式[11]：

$$\boldsymbol{W}(t) = \dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)[\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0] + \boldsymbol{\Psi}(t)\dot{\boldsymbol{X}}(t) - \int_0^t \boldsymbol{\Psi}(s)\boldsymbol{g}(s)\mathrm{d}s - \dot{\boldsymbol{\Psi}}(0)\boldsymbol{R}_0 - \dot{\boldsymbol{X}}(0) \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为真发射系到真发射惯性系的旋转矩阵，$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Theta}(t)\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{\Theta}(t) = \boldsymbol{R}_z(-\omega t)$，$\omega$ 为地球自转角速度，$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{M}^{-1}X_0$，$X_0$ 为真发射系原点的地心直角坐标，

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{cases}(N_G + H_0 + \Delta H)\cos(B_0 + \Delta B)\cos(L_0 + \Delta L)\\ (N_G + H_0 + \Delta H)\cos(B_0 + \Delta B)\sin(L_0 + \Delta L)\\ [N_G(1 - e^2) + H_0 + \Delta H]\sin(B_0 + \Delta B)\end{cases},$$

$N_G = a[1 - e^2\sin^2(B_0 + \Delta B)]^{-1/2}$，$a$ 和 e 分别为地球的赤道半径和偏心率，$\boldsymbol{g}(t)$ 为真发射系下的重力加速度，$\boldsymbol{g}(t) = g_r\boldsymbol{e}_r + g_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{e}_r = [\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0]/r$，$r = \|\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0\|$，$g_r = -\mu[1/r^2 + 1.5a^2J_2(1 - 5\sin^2\varphi)/r^4]$，$g_z = -3\mu a^2 J_2\sin\varphi/r^4$，$\mu$ 为地球引力常数，J_2 为地球引力位二阶带谐系数，

$\varphi = \arcsin[(\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_z/r]$，

$$\boldsymbol{e}_z = \begin{cases}\cos(B_{\mathrm{T}} + \Delta B_{\mathrm{T}})\cos(A_{\mathrm{T}} + \Delta A_{\mathrm{T}})\\ \sin(B_{\mathrm{T}} + \Delta B_{\mathrm{T}})\\ -\cos(B_{\mathrm{T}} + \Delta B_{\mathrm{T}})\sin(A_{\mathrm{T}} + \Delta A_{\mathrm{T}})\end{cases}。$$

对式(5)两边微分可得

$$\dot{\boldsymbol{W}}(t) = \ddot{\boldsymbol{\Psi}}(t)[\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0] + 2\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{\Psi}(t)\ddot{\boldsymbol{X}}(t) - \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{g}(t) \tag{6}$$

发射零时刻，飞行器在真发射系下的位置和速度为 $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{V}_0 + \Delta\boldsymbol{V}$，利用式(6)可建立如下满足初值条件的微分方程组：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{X}/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{X}}(t)\\ \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{X}}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)[\dot{\boldsymbol{W}}(t) - 2\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)\dot{\boldsymbol{X}}(t)] - \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\ddot{\boldsymbol{\Psi}}(t)[\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{R}_0] + \boldsymbol{g}(t)\\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{0}\\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{V}_0 + \Delta\boldsymbol{V}\end{cases} \tag{7}$$

在已知 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 的条件下，求解该微分方程组即可得到真发射系的轨道参数 $\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)$。

1.3　外测数据建模

t 时刻，飞行器在地心系下的位置和速度分别记为 $\tilde{\boldsymbol{X}}_e(t)$ 和 $\tilde{\dot{\boldsymbol{X}}}_e(t)$，则有

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{X}}_e(t) = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}(t)\\ \tilde{\dot{\boldsymbol{X}}}_e(t) = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{X}}(t)\end{cases} \tag{8}$$

设 Δt 为遥测发射时间零点相对外测零点的偏差[12]，将 $\tilde{\boldsymbol{X}}_e(t)$，$\tilde{\dot{\boldsymbol{X}}}_e(t)$ 平移 Δt 后可得到以外测零点为基准的位置 $\boldsymbol{X}_e(t)$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)$，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_e(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}_e(t - \Delta t)\\ \dot{\boldsymbol{X}}_e(t) = \tilde{\dot{\boldsymbol{X}}}_e(t - \Delta t)\end{cases} \tag{9}$$

外测数据包括飞行器相对测量设备的方位

角、俯仰角、距离和径向速度。设 t 时刻飞行器在设备测量系下的位置为 $\boldsymbol{X}_s(t)=(x_s(t),y_s(t),z_s(t))^{\mathrm{T}}$，速度为 $\dot{\boldsymbol{X}}_s(t)=(\dot{x}_s(t),\dot{y}_s(t),\dot{z}_s(t))^{\mathrm{T}}$，地心系向测量系的旋转矩阵为 $\boldsymbol{G}$，设备的站址坐标为 $\boldsymbol{X}_{s0}$，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_s(t)=\boldsymbol{G}[\boldsymbol{X}_e(t)-\boldsymbol{X}_{s0}]\\ \dot{\boldsymbol{X}}_s(t)=\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)\end{cases}\tag{10}$$

方位角、俯仰角、距离和径向速度测量分别记为 $A(t)$、$E(t)$、$\boldsymbol{R}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{R}}(t)$，则有

$$\begin{cases}A(t)=\arctan[z_s(t)/x_s(t)]+g_A(t,\beta)+\varepsilon_A(t)\\ E(t)=\arctan[y_s(t)/\sqrt{x_s^2(t)+z_s^2(t)}]+\\ \qquad g_E(t,\beta)+\varepsilon_E(t)\\ \boldsymbol{R}(t)=\|\boldsymbol{X}_s(t)\|+g_R(t,\beta)+\varepsilon_R(t)\\ \dot{\boldsymbol{R}}(t)=\dot{\boldsymbol{X}}_s(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_s(t)/\|\boldsymbol{X}_s(t)\|+g_{\dot{R}}(t,\beta)+\varepsilon_{\dot{R}}(t)\end{cases}\tag{11}$$

式中，$g_A(t,\beta)$、$g_E(t,\beta)$、$g_R(t,\beta)$ 和 $g_{\dot{R}}(t,\beta)$ 为测量的系统误差，β 为系统误差系数；$\varepsilon_A(t)$、$\varepsilon_E(t)$、$\varepsilon_R(t)$ 和 $\varepsilon_{\dot{R}}(t)$ 为测量噪声。将 t 时刻的所有测量组成的向量记为 $\boldsymbol{y}(t)$，由式(10)～(11)可知，$\boldsymbol{y}(t)$ 是关于 $\boldsymbol{X}_e(t)$、$\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)$ 和 β 的函数，则 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{y}(t)=f(\boldsymbol{X}_e(t),\dot{\boldsymbol{X}}_e(t),\beta)+\boldsymbol{\varepsilon}(t)\tag{12}$$

式中，f 是以 $\boldsymbol{X}_e(t)$、$\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)$ 和 β 为变量的非线性函数，$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 为测量噪声向量。

1.4　非线性模型的建立

取定制导工具误差 $\boldsymbol{C}$，由式(2)能够唯一确定 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$，取定初始误差 $\alpha=(\Delta B,\Delta L,\Delta H,\Delta B_{\mathrm{T}},\Delta L_{\mathrm{T}},\Delta A_{\mathrm{T}},\Delta \boldsymbol{V})^{\mathrm{T}}$，将 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 代入微分方程组(7)，并采用四阶龙格－库塔法对其求解，即可得到 $\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)$，取定 Δt，由式(8)～(9)可以得到 $\boldsymbol{X}_e(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)$，于是式(12)中的 $f(\boldsymbol{X}_e(t),\dot{\boldsymbol{X}}_e(t),\beta)$ 就是关于制导工具误差 $\boldsymbol{C}$、初始误差 α、遥外时间零点偏差 Δt 和系统误差系数 β 的非线性函数，令 $\boldsymbol{\theta}=(C,\alpha,\Delta t,\beta)^{\mathrm{T}}$，式(12)可表示为

$$\boldsymbol{y}(t)=f(t,\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

设外测数据的采样时刻为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，令 $\boldsymbol{Y}=(y(t_1),y(t_2),\cdots,y(t_n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})=(f(t_1,\boldsymbol{\theta}),f(t_2,\boldsymbol{\theta}),\cdots,f(t_n,\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}=(\varepsilon(t_1),\varepsilon(t_2),\cdots,\varepsilon(t_n))^{\mathrm{T}}$，则估计初始误差、制导工具误差、外测系统误差和遥外时间零点偏差的非线性模型表示为：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{\xi}\tag{13}$$

2　初始误差和制导工具误差的估计方法

在飞行器发射前，通常通过地面测试获得制导工具误差的先验信息，于是可利用能够融入先验信息的 Bayes 极大后验估计[13]获得模型(13)中 $\boldsymbol{\theta}$ 的最优估计。$\boldsymbol{\theta}$ 关于测量 $\boldsymbol{Y}$ 的后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y})$ 表示为

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y})=\frac{p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{\int p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}$$

式中，$p(\boldsymbol{\theta})$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验概率密度函数，$p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})$ 为测量 $\boldsymbol{Y}$ 的似然函数，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的 Bayes 极大后验估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\arg\sup_{\boldsymbol{\theta}}p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y})=\arg\sup_{\boldsymbol{\theta}}\{p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})\}\tag{14}$$

假设模型(13)中测量噪声 $\boldsymbol{\xi}$ 服从均值为零，协方差矩阵为 $\boldsymbol{P}_\xi$ 的高斯分布，且 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验分布服从均值为 $\boldsymbol{\theta}_0$ 方差为 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ 的高斯分布，则有 $p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})=\mathrm{N}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{P}_\xi)$，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{N}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}})$，令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})=&[\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\xi^{-1}[\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{F}(\theta)]+\\&(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)\end{aligned}$$

由式(14)可得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}&=\arg\sup_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathrm{N}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{P}_\xi)\mathrm{N}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}})\}\\&=\arg\sup_{\boldsymbol{\theta}}\{\exp[-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})/2]\}\\&=\arg\min_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

对于上述极值问题，采用高斯牛顿迭代法求解，令

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\{\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\xi^{-1}[\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})]+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0-\boldsymbol{\theta})\}\tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta})=\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\xi^{-1}\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$，设置最大迭代次数 M 和收敛阈值 $\delta>0$，δ 为小量，高斯牛顿迭代法的步骤如下：

步骤1： 令 $i=0$，迭代初值取为先验均值，即 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}=\boldsymbol{\theta}_0$。

步骤2： 由式(15)计算 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})$。

步骤3： 采用一维搜索法计算 $\tilde{\lambda}=\arg\min_{0\leqslant\lambda\leqslant1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}+\lambda\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}))$，令 $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}+\tilde{\lambda}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})$，若 $|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)})-S(\boldsymbol{\theta}^{(i)})|<\delta$ 或 $i>M$，迭代结束，输出结果 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$，否则，令 $i=i+1$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)}$，转到步骤2。

下面分析高斯牛顿迭代法的收敛性。

由 $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ 的构造可知，对于任意的 i，有 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i+1)})\leqslant\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})\leqslant\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})$。令 Ω 为包含集合 $\{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})\leqslant\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})\}$ 的有界闭集，对 Ω 做出假

设:Ω 上的点 θ_1 和 θ_2,如果 $\boldsymbol{S}(\theta_1)=\boldsymbol{S}(\theta_2)$,且 $\nabla\boldsymbol{S}(\theta_1)=\nabla\boldsymbol{S}(\theta_2)$,则有 $\theta_1=\theta_2$。$\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})\}$ 是单调递减有下界的序列(下界为 0),因而存在极限:

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})=\boldsymbol{S}^*$$

因为 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i)}\}\subset\Omega$,则 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i)}\}$ 存在收敛的子列 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i_k)}\}$,即 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\theta}^{(i_k)}=\boldsymbol{\theta}^*$,$\boldsymbol{\theta}^*\in\Omega$。由 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})$ 的连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)=\boldsymbol{S}^*$$

下面证明 $\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\theta}^*$ 为稳定点。令 $\boldsymbol{\rho}(\lambda)=S(\boldsymbol{\theta}^*+\lambda\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^*))$,则有

$$\rho'(0)=\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^*) \tag{16}$$

因为

$$\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)=-2\{\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\xi^{-1}[\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}^*)]+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0-\boldsymbol{\theta}^*)\}$$

由式(15)和式(16)可得

$$\rho'(0)=-0.5\,\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*) \tag{17}$$

其中,$\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\xi^{-1}\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 为半正定矩阵,$\boldsymbol{P}_\theta^{-1}$ 为正定矩阵,则 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 为正定矩阵,如果 $\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)\neq\boldsymbol{0}$,由式(17)知 $\rho(0)<0$,那么存在一个充分小的正数 λ',使得 $\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}^*+\lambda'\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 满足 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}')<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)$。因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)}+\lambda'\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)}))=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}')$,则存在充分大的正整数 K,使得对所有的 $k>K$, $j>K$,有 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_j)}+\lambda'\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i_j)}))<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)})$,根据步骤 3 中 $\tilde{\lambda}$ 的取法,有 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_j+1)})\leqslant\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_j)}+\lambda'\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}^{(i_j)}))<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{(i_k)})$,当 $i_k>i_j+1$ 时,就会与 $\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}(i))\}$ 序列单调递减相矛盾,所以 $\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)=\boldsymbol{0}$。

如果 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i)}\}$ 的另一个子序列 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i_j)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{\theta}^{**}$,同样可以证明 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{**})=\boldsymbol{S}^*$,$\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^{**})=\boldsymbol{0}$,由 Ω 的假设条件可知 $\boldsymbol{\theta}^{**}$ 与 $\boldsymbol{\theta}^*$ 应为同一个点,故高斯牛顿迭代法得到 $\{\boldsymbol{\theta}^{(i)}\}$ 必定收敛到一个稳定点 $\boldsymbol{\theta}^*$。

式(15)中的 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta})$ 为正定矩阵,其逆矩阵是存在的。实际情况表明,$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta})$ 呈现一定的病态性,导致矩阵求逆误差较大,进而影响了高斯牛顿迭代法的收敛。为缓解矩阵病态性,对 $\boldsymbol{\theta}$ 做规范化处理,即利用 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^{\mathrm{T}}$ 的每个元素的范围 $|\theta_i|\leqslant d_i$,构造对角矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_m)$,令 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\theta}$,将求解 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计转化为求解 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 的估计。

3　仿真算例及结果分析

仿真中考虑的制导工具误差包括 21 个主要影响项,仿真遥测数据 $\boldsymbol{W}_p(t)$ 由真实视速度 $\boldsymbol{W}(t)$ 加上 $\int_0^t\boldsymbol{D}(\boldsymbol{W}(s),\dot{\boldsymbol{W}}(s))\mathrm{d}s$ 而产生,其中,制导工具误差的真值 $\boldsymbol{C}$ 根据先验分布随机生成。初始误差无先验信息,其中,定位误差的真值取为 $\Delta B=36''$,$\Delta L=-36''$,$\Delta H=3$ m,定向误差的真值取为 $\Delta B_{\mathrm{T}}=36''$,$\Delta L_{\mathrm{T}}=-36''$,$\Delta A_{\mathrm{T}}=60''$,初始速度误差的真值取为 $\Delta v_x=0.1$ m/s,$\Delta v_y=0.05$ m/s,$\Delta v_z=0.1$ m/s。遥外测时间零点偏差的真值取 0.001 s。利用真实轨道参数和站址坐标产生 14 个方位角、14 个俯仰角、10 个距离、9 个径向速度测量通道的仿真外测数据,对每个测量通道上加入随机误差,在其中的 4 个距离、2 个方位角和 2 个俯仰角测量通道加入常值系统误差,飞行初段 0 ~ 10 s 无有效的测量数据。

为验证本文所提方法的性能,将计算结果与线性方法(方法一)、文献[9]的非线性方法(方法二)进行比较,其中,方法一采用文献[5]中的线性误差模型,估计方法采用 Bayes 方法。方法一和方法二的仿真条件与本文方法相同,方法一所使用的前 10 s 的轨道参数由遥测数据外推产生,后 10 s 由外测数据融合解算获得。由于方法二不估计定向误差 ΔB_{T} 和 ΔL_{T},需增加对平台初始失准角 k_{p0x} 和 k_{p0z} 的估计,并利用式(1)将 k_{p0x} 和 k_{p0z} 的估计结果转化成 ΔB_{T} 和 ΔL_{T},以便于和另外两种方法进行比对。下面给出 100 次蒙特卡洛仿真实验的统计结果。

误差比例定义为:|估计值 - 真值|/真值。表 1 给出了制导工具误差估计的平均误差比例,可以看出,本文方法在九个误差项上的估计精度相对于方法一有较大幅度的提高,并且大多数项的估计精度优于方法二。如果以误差比例小于等于 0.4 作为判断估计好项的标准,则方法一有 5 项估计得不好,方法二有 6 项估计得不好,而本文方法只有 2 项估计得不好。

初始误差估计的均方根误差如表 2 所示,可以看出,本文方法对初始误差的估计精度都比其他两种方法高,如果将初始定位误差换算成距离度量单位,方法一、方法二和本文方法对初始定位误差的估计精度分别为 0.86 m、4.15 m 和 0.10 m。定向误差的估计精度相对定位误差偏低很多,这是因为定向误差与制导工具误差项中的加速度计安装误差角存在较强的复共线性,导致误差估计模型关于定向误差具有不适定性,影响了定向误差的估计精度,而定位误差与制导工具误差的复共线性较弱,模型关于定位误差是良定的,估计精度很高。

表 1 制导工具误差估计的误差比例

Tab. 1 Ratio of estimation error to truth value for guidance instrumentation error

制导误差项	方法一	方法二	本文方法
1	0.073 08	0.168 43	0.074 32
2	0.003 17	0.071 01	0.003 85
3	0.017 60	0.007 63	0.002 78
4	3.014 81	6.078 54	0.379 33
5	0.383 71	0.261 97	0.028 07
6	0.172 93	0.725 46	0.045 99
7	0.073 81	0.241 79	0.075 37
8	0.031 42	1.176 00	0.030 98
9	0.018 10	0.025 67	0.015 61
10	0.866 98	0.234 48	0.118 16
11	0.220 21	0.311 28	0.033 34
12	0.085 63	0.194 88	0.074 83
13	8.703 50	4.358 72	0.810 86
14	13.648 89	6.674 53	2.133 32
15	3.675 28	8.894 53	0.269 84
16	0.000 45	0.001 08	0.000 38
17	0.000 42	0.070 98	0.000 39
18	0.001 32	0.061 53	0.001 27
19	0.000 72	0.003 67	0.000 73
20	0.000 19	0.000 25	0.000 22
21	0.000 19	0.000 16	0.000 19

表 2 初始误差估计的均方根误差

Tab. 2 Root mean square error of initial error estimate

初始误差项	方法一	方法二	本文方法
$\Delta B/('')$	0.028 00	0.113 09	0.002 88
$\Delta L/('')$	0.003 96	0.093 15	0.001 08
$\Delta H/\mathrm{m}$	0.013 62	0.053 45	0.022 29
$\Delta B_T/('')$	3.706 95	6.346 43	1.531 08
$\Delta L_T/('')$	0.840 40	9.534 80	0.635 04
$\Delta A_T/('')$	7.580 26	5.772 23	4.186 08
$\Delta v_x/(\mathrm{m/s})$	0.009 94	0.005 95	0.001 72
$\Delta v_y/(\mathrm{m/s})$	0.092 14	0.003 75	0.001 36
$\Delta v_z/(\mathrm{m/s})$	0.057 00	0.007 96	0.004 47

方法一对模型作了线性化近似,会带来一些线性化误差,飞行初段缺失的轨道参数用遥测数据补齐,与真实值会有一定的差别,此外,融合解算的级间段轨道参数的精度不是很高[14],这些因素都会影响该方法的估计精度。方法二在构造环境函数矩阵时,没有考虑初始误差对重力的影响,引入了一定的模型误差,作了关于初始误差的线性化近似,也有一定的线性化误差。本文方法避免了上述这些问题,所以估计精度会优于其他两种方法。

方法一、方法二和本文方法对遥外测时间零点偏差估计的均方根误差分别是 1.86E－5 s、1.82E－5 s 和 1.85E－5 s,估计精度相当。

表 3 是自校准法[15]和本文方法对外测系统误差估计的平均误差比例,可以看出,本文方法对外测系统误差的估计精度接近于自校准法,估计的误差比例不超过 0.04,表明该方法仍能有效分离出外测系统误差,从而也可实现外测数据的自校准。经过统计,各测量通道的残差数据的均值接近于零,方差接近于测量噪声的方差,并且残差数据随时间没有明显的变化趋势,限于篇幅,这里只给出一个距离测量和一个俯仰角测量的残差曲线图(见图 1 和图 2)。

表 3 外测系统误差估计的误差比例

Tab. 3 Ratio of estimation error to truth value for measurement systematic error

外测系统误差项	自校准法	本文方法
1	0.036 21	0.037 35
2	0.038 84	0.039 99
3	0.012 01	0.010 20
4	0.003 73	0.003 59
5	0.012 50	0.013 39
6	0.013 10	0.012 75
7	0.002 48	0.002 64
8	0.033 08	0.030 06

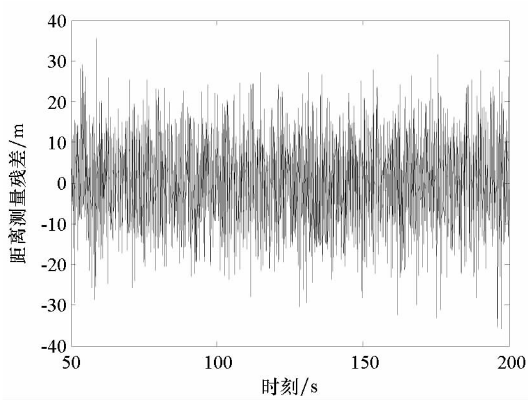

图 1 距离测量的残差曲线

Fig. 1 Residual error of distance measurement

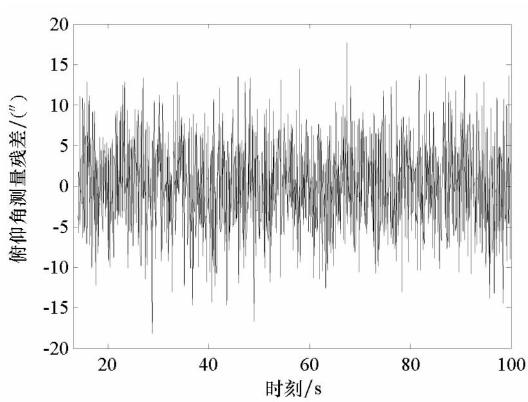

图 2 俯仰角测量的残差曲线

Fig. 2 Residual error of elevation measurement

4　结论

本文提出了一种基于非线性模型的初始误差和制导工具误差估计的新方法,该方法无须全程外测轨道参数,能够克服飞行初段和级间段外测轨道精度不高的困难,不需要对初始误差作线性化处理,可避免引入线性化误差,还能估计外测设备的系统误差,实现测量数据的自校准。仿真结果表明,对初始误差和制导工具误差的估计精度优于线性方法和其他非线性方法,测量数据系统误差的估计精度与传统的自校准法相当。本文方法可以为机动发射飞行器的命中精度评估提供理论和技术支撑。

如果没有制导工具误差的任何先验信息,本文非线性模型具有较强的病态性,初始误差和制导工具误差部分项的估计结果严重失真,下一步将研究无先验信息条件下误差估计的非线性方法。

参考文献(References)

[1] 段晓君, 周海银, 姚静. 精度评定的分解综合及精度折合[J]. 弹道学报, 2005, 17(2): 42 – 48.
DUAN Xiaojun, ZHOU Haiyin, YAO Jing. The decomposition and integration technique of fire dispersion index and conversion of impact deviation[J]. Journal of Ballistics, 2005, 17(2): 42 – 48. (in Chinese)

[2] 徐德坤, 杨华波, 张士峰, 等. 制导工具误差折合的遗传主成分方法[J]. 航天控制, 2007, 25(6): 22 – 26.
XU Dekun, YANG Huabo, ZHANG Shifeng, et al. A genetic principal components for conversion of guidance instrumentation system error[J]. Aerospace Control, 2007, 25(6): 22 – 26. (in Chinese)

[3] 郑小兵, 董景新, 孟令晶, 等. 潜地导弹初始定位误差估算方法[J]. 中国惯性技术学报, 2009, 17(2): 127 – 131.
ZHENG Xiaobing, DONG Jingxin, MENG Lingjing, et al. Estimation of initial positioning error in submarine-to-ground missile[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(2): 127 – 131. (in Chinese)

[4] 杨华波, 张士峰, 胡正东, 等. 海基导弹初始误差分离建模与参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(6): 931 – 933, 937.
YANG Huabo, ZHANG Shifeng, HU Zhengdong, et al. Modeling and parameter estimation for initial launched parameter error of warship-missile[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(6): 931 – 933, 937. (in Chinese)

[5] 杨华波, 张士峰, 蔡洪, 等. 考虑初始误差的制导工具误差分离建模与参数估计[J]. 宇航学报, 2007, 28(6): 1638 – 1642.
YANG Huabo, ZHANG Shifeng, CAI Hong, et al. Modeling and parameters estimation of guidance instrumentation systematic error and initial launched parameters error for marine-missile[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(6): 1638 – 1642. (in Chinese)

[6] 郑小兵, 董景新, 孟令晶, 等. 基于遥外差数据估算初始定位误差的新方法[J]. 中国惯性技术学报, 2010, 18(6): 680 – 685.
ZHENG Xiaobing, DONG Jingxin, MENG Lingjing, et al. New method to estimate initial positioning error based on telemetry-tracking deviation data[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2010, 18(6): 680 – 685. (in Chinese)

[7] 张仲毅, 张耐民, 荣晶晶, 等. 动基座发射飞行器初始误差分离线性建模及仿真[J]. 导弹与航天运载技术, 2013(4): 43 – 47.
ZHANG Zhongyi, ZHANG Naimin, RONG Jingjing, et al. Linear modeling and simulation for initial error separation of vehicle launched on moving base[J]. Missiles and Space Vehicles, 2013(4): 43 – 47. (in Chinese)

[8] 韩成柱, 梁红, 张志国. 一种基于 CMA-ES 的制导工具误差分离方法研究[J]. 航天控制, 2017, 35(4): 48 – 51, 72.
HAN Chengzhu, LIANG Hong, ZHANG Zhiguo. Research of the guidance instrument error separation based on the CMA-ES[J]. Aerospace Control, 2017, 35(4): 48 – 51, 72. (in Chinese)

[9] 姚静, 段晓君, 周海银. 海态制导工具系统误差建模与参数估计[J]. 弹道学报, 2005, 17(1): 33 – 39.
YAO Jing, DUAN Xiaojun, ZHOU Haiyin. Modeling and parameters estimation of marine guidance instrumentation systematic error[J]. Journal of Ballistics, 2005, 17(1): 33 – 39. (in Chinese)

[10] 王正明, 周海银. 制导工具系统误差估计的新方法[J]. 中国科学 E 辑:技术科学, 1998, 28(2): 160 – 167.
WANG Zhengming, ZHOU Haiyin. A new method for estimating guidance instrumentation systematic error[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 1998, 28(2): 160 – 167. (in Chinese)

[11] 胡正东, 杨华波, 张士峰, 等. 潜射导弹初始误差与制导工具误差分离研究[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(3): 46 – 48.
HU Zhengdong, YANG Huabo, ZHANG Shifeng, et al. Research on separation of initial error and guidance instrumentation error in submarine launched missile[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles, and Guidance, 2006, 26(3): 46 – 48. (in Chinese)

[12] 董琳琳, 郑小兵, 张志国, 等. 遥外测时间零点一致性分析及修正方法[J]. 中国惯性技术学报, 2010, 18(3): 374 – 377.
DONG Linlin, ZHENG Xiaobing, ZHANG Zhiguo, et al. Consistency analysis and correction method for telemetry and tracking data time-zero[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2010, 18(3): 374 – 377. (in Chinese)

[13] Candy J V. Bayesian signal processing: classical, modern, and particle filtering methods[M]. USA: Wiley-Interscience, 2009: 19 – 22.

[14] Liu J Y, Zhu J B, Xie M H. Trajectory estimation with multi-range-rate system based on sparse representation and spline model optimization[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010, 23(1): 84 – 90.

[15] 王正明, 易东云, 周海银, 等. 弹道跟踪数据的校准与评估[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999: 283 – 315.
WANG Zhengming, YI Dongyun, ZHOU Haiyin, et al. Calibration and evaluation of trajectory data[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1999: 283 – 315. (in Chinese)