

采用自适应简化不确定性卡尔曼滤波算法的飞行器导航控制方案*

张恒浩

(中国运载火箭技术研究院 研究发展中心, 北京 100076)

摘要:针对飞行器绕本体轴高速旋转的飞行过程出现的严重耦合干扰问题和大角加速度和大角速度测量问题,提出了一种自适应简化不确定性卡尔曼滤波算法。该算法使用超球面分布采样点和线性转移等方法简化算法采样计算和采样点的权值计算,提高算法效率;利用模型噪声和线性方程,通过一步预测进行自适应设计,计算滤波值和误差方差矩阵;使用次优噪声估计器推算过程噪声;对过程噪声进行正定判定,防止算法发散。仿真结果表明,这一改进的自适应简化不确定性卡尔曼滤波算法能够有效减少滚转角解算误差和耦合干扰,提高飞行器着陆点的精度。

关键词:正定矩阵;耦合干扰;采样;次优估计;角速度解算;解耦控制

中图分类号:V448 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2018)06-141-10

Aero-craft's navigation and control based on adaptive simple uncertain Kalman filter algorithm

ZHANG Henghao

(Research and Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: Aimed at the problems which are serious couple interference and measure high angular velocity and angular acceleration when the aero-craft is circumrotating highly about itself, a new ASUKF (adaptive simple uncertain Kalman filter) algorithm was put forward. The ASUKF algorithm used hyper-spherical distribution and linear displace to accomplish simple sampling calculation and weight value calculation, and improved the algorithm's efficiency. Characteristics of noise and linear equation were employed to finish self-adapting control. The ASUKF algorithm used sub-optimal estimation to compute procedural noise, and was judged that it is positive to prevent the algorithm invalidation. The simulation result shows that the ASUKF algorithm can reduce roll angle's error and couple interference and improve aero-craft's landing precision.

Key words: positive matrix; couple interference; sampling; sub-optimal estimation; angular velocity calculation; decoupling control

飞行器在飞行过程中可以通过绕其纵轴进行周期性旋转来解决产品加工过程中结构和气动的不对称性、偏心误差对落点精度的影响和飞行器静不定等问题。得益于这些优点,飞行器飞行时的自旋控制得到广泛应用。但是飞行器本体自旋运动在解决上述问题的同时,也给飞行器的俯仰通道和偏航通道带来严重的耦合问题。高速自旋给飞行器本体引入了大角加速度和大角速度,需要对飞行器导航和控制系统提出新的设计要求。

现阶段国内外解决飞行器高速自旋耦合问题时主要采用无陀螺捷联惯性导航系统以及加速度计的量测系统进行解算。目前工程上主要使用无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)算法解算飞行器本体的角加速度和角速度。但是本文研究的飞行器要求发射方式不受发射位置、发

射姿态等约束条件限制,同时需要保证随时快速发射。UKF算法只在一定发射位置和发射姿态条件范围内有效。为解决这一问题,在UKF算法基础上进行改进,加入预先优化校正解算,形成不确定性卡尔曼滤波(Uncertain Kalman Filter, Un-KF)算法。Un-KF算法可以确保飞行器发射条件不受限制,但是当飞行器本体自旋速度变快时,为保证角加速度和角速度的测量准确性,量测系统的结构会越来越复杂,导致解算算法复杂并延长计算时间。同时,量测结构的复杂性导致滤波算法的状态矩阵、量测矩阵的设计及噪声统计特征产生不确定性,从而产生发散现象,影响Un-KF算法的效率和准确性。现阶段客户使用的飞行器采用Un-KF算法可以保证在任意情况下发射后一段时间内飞行器飞行轨迹和飞行姿态正

* 收稿日期:2017-09-13

基金项目:国家部委基金资助项目(250501030202)

作者简介:张恒浩(1982—),男,河北石家庄人,高级工程师,博士,E-mail:zhanghenghao1982@163.com

确,但是在客户要求的全程飞行距离内无法保证着陆精度或者无法以正确姿势着陆的飞行器实际飞行失败率大约为 15%,半实物仿真过程的失败率为 9% ~ 10%。

针对上述工程中出现的问题,本文提出一种自适应简化不确定性卡尔曼滤波(Adaptive Simple Uncertained Kalman Filter, ASUKF)算法。

1 模型设计

飞行器在飞行过程中需要自身进行快速旋转来保持姿态稳定,后面将需要自身进行快速旋转来保持飞行过程中姿态稳定的飞行器简称为旋转飞行器。安装在旋转飞行器上的惯性测量元件需要通过相关的滤波算法提高角速度的解算精度。整个计算过程需要建立完整的状态方程和量测方程,并给出系统噪声的解决方法,然后解算飞行器的角速度信息,为其稳定飞行提供相关数据。本节主要设计两个 ASUKF 算法应用时需要使用的模型:角速度计算模型、噪声优化估计模型。

1.1 角速度计算模型

角速度的计算是所有旋转飞行器稳态飞行的关键因素。下面建立角速度计算的基础状态方程。

设旋转飞行器本体的角加速度为 $\dot{\omega}_k, \dot{\omega}_k$ 是一组随机变量。飞行器在飞行过程中惯性测量元件的采样时间间隔设为 T ,受到的干扰噪声为高斯白噪声 $w_k, w_k = [w_{x,k} \ w_{y,k} \ w_{z,k}]^T$,建立方程组(1)。

$$\begin{cases} \omega_k = \omega_{k-1} + T\dot{\omega}_{k-1} \\ \dot{\omega}_k = \dot{\omega}_{k-1} + Tw_{k-1} \end{cases} \quad (1)$$

其中: ω_k 为 k 时刻旋转飞行器自身的角速度; $\omega_k = [\omega_{x,k} \ \omega_{y,k} \ \omega_{z,k}]^T$; $\dot{\omega}_k$ 为 k 时刻旋转飞行器自身的角加速度, $\dot{\omega}_k = [\dot{\omega}_{x,k} \ \dot{\omega}_{y,k} \ \dot{\omega}_{z,k}]^T$ 。角速度和角加速度的下标 x, y, z 分别表示这些矢量在弹体坐标系中投影到 X, Y, Z 三个轴的代数分量。 X 轴与弹体纵轴重合,指向飞行器前方为正; Y 轴位于弹体纵向对称面内与 X 轴重合,指向上为正; Z 轴垂直于 XOY 平面,方向由右手定则确定。

将角速度和角加速度变量合在一个向量 x 中,即 $x = [\omega_{x,k} \ \omega_{y,k} \ \omega_{z,k} \ \dot{\omega}_{x,k} \ \dot{\omega}_{y,k} \ \dot{\omega}_{z,k}]^T$ 。将 x 作为旋转飞行器角速度模型中的状态变量向量,建立旋转飞行器的角速度状态方程:

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Gamma_0 w_{k-1} \quad (2)$$

式中, Φ 为状态矩阵, Γ_0 为量测矩阵,具体数

据为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}。$$

高斯白噪声 w_k 的计算如式(3)所示。

$$\begin{cases} E(w_k) = q_k \\ E(w_k w_j^T) = Q_k \delta_{kj} \end{cases} \quad (3)$$

其中, Q_k 为半正定对称矩阵, δ_{kj} 为 korenecker- δ 函数, E 为期望值, q_k 为期望向量矩阵的第 k 个向量。

因为如式(2)所示的状态方程是建立在物理运动的基础之上的,具有通用性。式(2)计算得到的输出变量是旋转飞行器的角速度和角加速度。飞行器上的惯性测量元件不能直接提供角速度和角加速度,只能提供角速度和角加速度的相关函数。式(2)计算得到的角速度和角加速度信息需要作为量测量建立量测方程,量测方程表达式如式(4)所示。

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (4)$$

式(4), $h(x_k)$ 为 k 时刻惯性测量元件输出的角速度函数, v_k 为 k 时刻的量测噪声, x_k 为状态变量, z_k 为观测变量。

方程组(5)为量测噪声的统计特性计算表达式。

$$\begin{cases} E[v_k] = q_k \\ E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj} \end{cases} \quad (5)$$

其中, R_k 为正定对称矩阵。所有工程应用惯性测量系统的量测噪声统计特性都可以使用式(5)进行计算。

现阶段工程应用的所有惯性测量元件工作时的量测方程均可以写成式(4)形式。量测方程中 $h(x_k)$ 函数的所有种类惯性测量器件的表达如式(6)所示。

$$\begin{cases} h_6(x_k) = [\dot{\omega}_{x,k} \ \dot{\omega}_{y,k} \ \dot{\omega}_{z,k}]^T \\ h_9(x_k) = [\omega_{x,k}\omega_{y,k} \ \omega_{x,k}\omega_{z,k} \ \omega_{y,k}\omega_{z,k} \ \dot{\omega}_{x,k} \\ \dot{\omega}_{y,k} \ \dot{\omega}_{z,k}]^T \\ h_{12}(x_k) = [\omega_{x,k}^2 \ \omega_{y,k}^2 \ \omega_{z,k}^2 \ \omega_{x,k}\omega_{y,k} \ \omega_{x,k}\omega_{z,k} \\ \omega_{y,k}\omega_{z,k} \ \dot{\omega}_{x,k} \ \dot{\omega}_{y,k} \ \dot{\omega}_{z,k}] \\ h_5(x_k) = \omega_{x,k}^2 \end{cases} \quad (6)$$

方程组(6)涵盖了现阶段所有工程应用常用的惯性测量系统的量测方程 $h(x_k)$ 函数的表达形

式。方程组(6)中,第一个公式表示六加速度计量测方程的 $h(\mathbf{x}_k)$ 函数;第二个公式表示九加速度计量测方程的 $h(\mathbf{x}_k)$ 函数;第三个公式表示十二加速度计量测方程的 $h(\mathbf{x}_k)$ 函数;第四个公式表示五加速度计加双陀螺的惯性测量系统量测方程的 $h(\mathbf{x}_k)$ 函数。由于旋转飞行器的角加速度在飞行过程中非线性变化,六加速度计无法满足角速度解算的相关要求。其余三种惯性测量系统的量测方程是非线性方程,工作过程中可以满足旋转飞行器角速度解算的精度要求。在工程实际应用中使用五加速度计加双陀螺的惯性测量系统。五加速度计加双陀螺惯性测量系统的具体结构如图1所示。图中, F_1, F_2, F_3 为位置安装向量, F_4, F_5 为敏感方向向量。

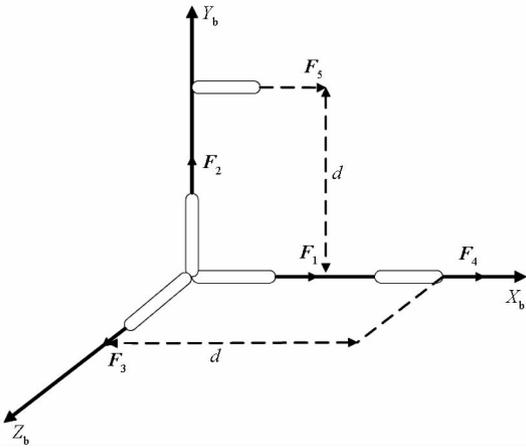


图1 五加速度计加双陀螺惯性测量系统构型图
Fig.1 Inertial measure system of five accelerations and double peg-tops

1.2 噪声优化估计模型

工程应用中,滤波发散的一个重要原因是噪声统计估计特性的不准确。由于旋转飞行器在工作过程中量测噪声已知,只需要求解过程噪声,可采用工程师 Sage 和 Husa 设计的最大后验概率(Maximum A Posteriori, MAP)次优噪声估计器(下文简称 S-H-MAP 次优噪声估计器)。该噪声估计器原理简单、实时解算效果高。当系统噪声和量测噪声有一个已知时,采用该噪声估计器可以精确得到另一个噪声的精确信息。

对状态方程(2)中的过程噪声进行最优估计,如式(7)所示。

$$\begin{cases} \Gamma \hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_{j|k} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{j-1|k}] \\ \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_k \Gamma^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [(\hat{\mathbf{x}}_{j|k} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{j-1|k} - \hat{\mathbf{q}}_k) (\hat{\mathbf{x}}_{j|k} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{j-1|k} - \hat{\mathbf{q}}_k)^T] \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\hat{\mathbf{q}}_k$ 为期望向量矩阵第 k 个向量的量测值, Γ 为无迹变换协方差矩阵, $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$ 为 k 时刻第 j 个 sigma 采样点向量。

方程组(7)涉及的最优噪声估计算法要求在旋转飞行器的整个工作过程中,滤波状态必须保持全平滑状态,并进行线性计算。这样导致整个计算过程过于复杂,无法应用到旋转飞行器上,必须进行改进处理。S-H-MAP 次优噪声估计器通过将滤波的估计计算值和一步预测值代替原有优化算法要求的全平滑值,如式(8)所示。

$$\begin{cases} \Gamma \hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [(k-1) \Gamma \hat{\mathbf{q}}_{k-1} + \hat{\mathbf{x}}_k - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1}] \\ \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_k \Gamma^T = \frac{1}{k} [(k-1) \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_{k-1} \Gamma^T + \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k - \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T] \end{cases} \quad (8)$$

旋转飞行器的噪声是时变噪声, S-H-MAP 次优噪声估计器在计算过程中重点提升时间近点的数据作用,削弱时间远点的数据作用。在计算旋转飞行器系统过程噪声的均值和方差的过程中, S-H-MAP 次优噪声估计器引入遗忘因子 d_k , 其计算过程如式(9)所示,遗忘因子的计算公式如式(10)所示。

$$\begin{cases} \Gamma \hat{\mathbf{q}}_k = (1 - d_k) \Gamma \hat{\mathbf{q}}_{k-1} + d_k (\hat{\mathbf{x}}_k - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_k \Gamma^T = (1 - d_k) \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_{k-1} \Gamma^T + d_k [\mathbf{K}_k \bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k - \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T] \end{cases} \quad (9)$$

$$d_k = \frac{1 - b}{1 - b^{k+1}} \quad 0.95 < b < 0.99 \quad (10)$$

方程组(9)所示的 S-H-MAP 次优噪声估计器是无偏估计器,但是方程组(9)中第二个方程中虽然通过减法运算保证了噪声优化器的无偏性,却牺牲了 $\hat{\mathbf{Q}}_k$ 的正定性。所以在 S-H-MAP 次优噪声估计器中引入对 $\hat{\mathbf{Q}}_k$ 的正定判据。当 $\hat{\mathbf{Q}}_k$ 是半正定矩阵时, S-H-MAP 次优噪声估计器采用方程组(9)进行计算;当 $\hat{\mathbf{Q}}_k$ 不是半正定矩阵时, S-H-MAP 次优噪声估计器采用方程组(11)进行计算。

$$\begin{cases} \Gamma \hat{\mathbf{q}}_k = (1 - d_k) \Gamma \hat{\mathbf{q}}_{k-1} + d_k (\hat{\mathbf{x}}_k - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_k \Gamma^T = \Gamma \hat{\mathbf{Q}}_{k-1} \Gamma^T - d_k (\mathbf{P}_k - \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T) \end{cases} \quad (11)$$

2 方案设计

飞行器的导航控制方案需要先测量角速度相关信息,然后通过角速度解算加速度,进而实现对飞行器导航和姿态的控制。因此,飞行器在高速

旋转过程中保持姿态稳定的导航控制方案的核心是需要研究一种兼顾精度与效率的角速度解算方法。飞行器导航控制方案重点针对 Un-KF 算法的缺点,设计 ASUKF 算法。之后,设计加速度计解算方法,从而获得角速度和加速度相关数据,进一步推导出飞行器的位置、姿态、速度等相关信息。

Un-KF 算法在进行角速度解算时,当飞行器绕本体轴转速较高时,由于滤波算法结构复杂,状态矩阵、量测矩阵等无法全程满足正定性要求,可能导致计算结果发散。同时,算法结构复杂,计算时间过多,无法满足工程应用对计算时间的要求。ASUKF 算法主要解决飞行器高速自旋状态下出现的上述问题。

ASUKF 算法通过改变采样策略以及控制状态变量的增广维数来提高旋转飞行器角速度解算的效率。

ASUKF 算法引入一种超球面分布采样方式对计算过程中采样点进行采样,通过超球面分布采样控制采样点的个数改进采样策略,从而大幅度提高算法效率。利用旋转飞行器系统模型自身的噪声特点和方程的线性特点进行自适应改进,确保其精度,从而满足旋转飞行器工作时的精度要求和效率要求。

如前所述,假设旋转飞行器的随机变量为 n 维,使用超球面分布的采样点策略:设计一个超球面,其原点为随机状态变量的均值,在球面上任意取 $n+1$ 个等权值的 Sigma 点。这些等权值的 Sigma 点可以近似描述随机变量的状态概率分布。这样状态的均值点加上在超球面上取到的 $n+1$ 个采样点组成 $n+2$ 个不确定性变换采样点。超球面分布采样算法的步骤如下所示。

步骤 1: 设定初始权值 W_0 的范围: $0 \leq W_0 \leq 1$ 。

步骤 2: 根据式(12)计算权值 W_i 的具体数值。

$$W_i = \frac{1 - W_0}{i + 1} \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (12)$$

步骤 3: 设 j 维空间中第 i 个采样点为 e_i^j , 同时给出初始化的向量序列,如式(13)所示。

$$\begin{cases} e_0^1 = 0 \\ e_1^1 = -1/\sqrt{2W_1} \\ e_2^1 = 1/\sqrt{2W_1} \end{cases} \quad (13)$$

步骤 4: 得到初始值后, e_i^j 的计算过程如式(14)所示。

$$e_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} e_0^{j-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & i = 0 \\ \begin{bmatrix} e_i^{j-1} \\ -1/\sqrt{j(j+1)W_j} \end{bmatrix} & i = 1, 2, \dots, j \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{j-1} \\ j/\sqrt{j(j+1)W_j} \end{bmatrix} & i = j + 1 \end{cases} \quad (14)$$

其中, j 维零向量用 $\mathbf{0}^j$ 表示。

因为标准的正态分布的 Sigma 集合可以通过变换表示为任意正态分布的 Sigma 集合,所以具有正态分布的 n 维随机变量 \mathbf{x} 采用超球面采样算法时,设其均值是 $\bar{\mathbf{x}}$, 均方差是 \mathbf{P}_{xx} , 其 Sigma 点在 i 时刻采样的概率为:

$$\chi_i^n = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{P}_{xx}} \mathbf{e}_i^n \quad i = 0, 1, \dots, n + 1 \quad (15)$$

由式(2)和式(4)组成的旋转飞行器系统模型中,状态向量维数用 n_x 表示,过程噪声向量维数用 n_w 表示,量测噪声向量维数用 n_v 表示。使用不确定变换在超球面进行采样,预测旋转飞行器的状态变量后对状态向量的维数进行增广控制,将增广后的状态向量维数设为 n^a , 其大小为原来状态向量维数和过程噪声向量维数之和,如式(16)所示。增广后状态变量 \mathbf{x}_k^a 和对应的方差 \mathbf{P}_k^a 如方程组(17)所示。

$$n^a = n_x + n_w \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} \end{cases} \quad (17)$$

对状态向量的维数进行增广控制后,系统模型的状态向量使用超球面分布采样方法,将式(16)、式(17)代入式(14)、式(15),得到扩展后的采样点向量序列 $e_i^{n^a}$ 。

$$e_i^{n^a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{n_x} & \mathbf{E}_x & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} \\ \mathbf{0}^{n_w} & [\mathbf{e}_w]_{n_x+1} & \mathbf{E}_w \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中: \mathbf{E}_x 是增广前状态采样序列, \mathbf{E}_x 中没有包含均值点; 向量 \mathbf{e}_w 和矩阵 \mathbf{E}_w 通过方程组(19)计算得到。

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}_w &= \left[-\frac{1}{\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)W_1}} \quad \cdots \quad -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_w)(n_x+n_w+1)W_1}} \right] \\ \mathbf{E}_w &= \begin{bmatrix} \frac{n_x+1}{\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{(n_x+2)(n_x+3)}} & \frac{n_x+2}{\sqrt{(n_x+2)(n_x+3)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_w)(n_x+n_w+1)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_w)(n_x+n_w+1)}} & \cdots & \frac{n_x+n_w}{\sqrt{(n_x+n_w)(n_x+n_w+1)}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

在 $k-1$ 时刻,等权值的 Sigma 采样点共有 n^a+2 个,具体数据通过式(20)计算得到。

$$\mathbf{x}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{n_x+1} + \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} \mathbf{E}_x & [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]_{n_w} \\ \mathbf{q}_{k-1} & [\mathbf{q}_{k-1}]_{n_x+1} + \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} [\mathbf{e}_w]_{n_x+1} & [\mathbf{q}_{k-1}]_{n_w} + \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}} \mathbf{E}_w \end{bmatrix} \quad (20)$$

对矩阵 \mathbf{x}_{k-1}^a 进行分块处理,从第 1 行到第 n_x 行设为 \mathbf{x}_{k-1}^x 矩阵,从第 n_x+1 行到第 n^a 行设为 \mathbf{x}_{k-1}^w 矩阵。则矩阵 \mathbf{x}_{k-1}^a 可表述为 $[(\mathbf{x}_{k-1}^x)^T \ (\mathbf{x}_{k-1}^w)^T]^T$ 。将式(19)代入式(20),得到 Sigma 点的一步预测值。

$$\mathbf{x}_{i,k|k-1}^{x(a)} = \begin{cases} \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} & i=0 \\ \Phi \mathbf{x}_{i,k-1}^x + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} + \Gamma \mathbf{x}_{i,k-1}^w & i=1, \dots, n_x+1 \\ \Phi \mathbf{x}_{i,k-1}^x + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} + \Gamma \mathbf{x}_{i,k-1}^w & i=n_x+2, \dots, n^a+1 \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(2),得到状态预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{n^a+1} \mathbf{W}_i \mathbf{x}_{i,k|k-1}^{x(a)} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} \quad (22)$$

从而得到一步预测方差阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{n^a+1} \mathbf{W}_i (\mathbf{x}_{i,k|k-1}^{x(a)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{x}_{i,k|k-1}^{x(a)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \\ &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \Phi^T + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} \Gamma^T \end{aligned} \quad (23)$$

当维数增广后,设量测噪声维数为 n^b ,大小为 n_x+n_v 。维数增广后,通过超球面采样得到的状态变量采样序列用分块矩阵表示,如式(24)所示。

$$\mathbf{e}_i^{n^b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x} & \mathbf{E}_x & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v} & [\mathbf{e}_v]_{n_x+1} & \mathbf{E}_v \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中: \mathbf{E}_x 是增广前的状态采样序列, \mathbf{E}_x 中没有包含均值点; \mathbf{e}_v 和 \mathbf{E}_v 通过方程组(25)得到。

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}_v &= \left[-\frac{1}{\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)W_1}} \quad \cdots \quad -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_v)(n_x+n_v+1)W_1}} \right] \\ \mathbf{E}_v &= \begin{bmatrix} \frac{n_x+1}{\sqrt{(n_x+1)(n_x+2)}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{(n_x+2)(n_x+3)}} & \frac{n_x+2}{\sqrt{(n_x+2)(n_x+3)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_v)(n_x+n_v+1)}} & -\frac{1}{\sqrt{(n_x+n_v)(n_x+n_v+1)}} & \cdots & \frac{n_x+n_v}{\sqrt{(n_x+n_v)(n_x+n_v+1)}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

此时 Sigma 采样点共有 n^b+2 个,通过式(26)计算得到。

$$\mathbf{x}_{k|k-1}^b = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{n_x+1} + \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \mathbf{E}_x & [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]_{n_v} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{R}_k} [\mathbf{e}_v]_{n_x+1} & \sqrt{\mathbf{R}_k} \mathbf{E}_v \end{bmatrix} \quad (26)$$

对矩阵 $\mathbf{x}_{k|k-1}^b$ 进行分块处理,从第 1 行到第 n_x

行设为矩阵 $\mathbf{x}_{k|k-1}^x$,从第 n_x+1 行到第 n^b 行设为矩阵 $\mathbf{x}_{k|k-1}^v$ 。矩阵 $\mathbf{x}_{k|k-1}^b$ 表示为 $[(\mathbf{x}_{k|k-1}^x)^T \ (\mathbf{x}_{k|k-1}^v)^T]^T$ 。将在超球面得到的采样点代入量测方程,整理得到方程组(27)。方程组(27)中, $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 表示量测变量的一步预测值, $\mathbf{P}_{z,k|k-1}$ 表示量测变量的一步预测方差矩阵, $\mathbf{P}_{xz,k|k-1}$ 表示状态变量预测和量测变量预测两者之间有计算关系的协方差矩阵。

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \left[W_0 + \frac{(1-W_0)n_v}{n^b+1} \right] h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{n_x+1} \frac{1-W_0}{n^b+1} h(\chi_{i,k|k-1}^x) \\ \mathbf{P}_{z,k|k-1} &= \left[W_0 + \frac{(1-W_0)n_v}{n^b+1} \right] [h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}] \cdot \\ &\quad [h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T + \sum_{i=1}^{n_x+1} \frac{1-W_0}{n^b+1} \cdot \\ &\quad [h(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}] [h(\chi_{i,k|k-1}^x) - \\ &\quad \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{P}_{x,k|k-1} &= \left[W_0 + \frac{(1-W_0)n_v}{n^b+1} \right] [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \cdot \\ &\quad [h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T + \sum_{i=1}^{n_x+1} \frac{1-W_0}{n^b+1} \cdot \\ &\quad [\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] [h(\chi_{i,k|k-1}^x) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \end{aligned} \right. \quad (27)$$

可根据方程组(28),得到整个卡尔曼滤波计算过程中的误差方差阵和滤波值。

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{z,k|k-1} (\mathbf{P}_{z,k|k-1})^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{xx,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \right. \quad (28)$$

ASUKF 算法不需要进行采样,只要对上一步计算的估计值进行线性转移,就可以得到 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}$,这样大大简化了整个滤波计算过程,能够有效提高滤波计算效率。而引入 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 、 $\mathbf{P}_{z,k|k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{x,k|k-1}$ 对算法做自适应改进,使其计算精度满足工程应用方的要求,同时计算过程只引入了旋转飞行器系统模型状态变量的 $n_x + 2$ 个采样点,保证了在自适应改进过程中算法不会因为太过复杂而影响计算效率。

综上所述,ASUKF 算法的基本步骤如下:

步骤 1:采用方程组(29)进行初始化设计。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_0 &= E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_0 &= E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] \end{aligned} \right. \quad (29)$$

步骤 2:更新运行时间,使用方程组(30),获得状态一步预测值。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \Phi \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \Gamma \mathbf{q}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{xx,k|k-1} &= \Phi \mathbf{P}_{xx,k-1} \Phi^T - \Gamma \mathbf{q}_{k-1} \Gamma^T \end{aligned} \right. \quad (30)$$

步骤 3:使用方程组(19)计算超球面的 Sigma 采样点 $\chi_{i,k|k-1}$,共 $n_x + 2$ 个。同时使用方程组(31)计算这些采样点对应的权值。

$$\left\{ \begin{aligned} W'_0 &= W_0 + \frac{(1-W_0)n_v}{n_x+n_v+1} \\ W'_i &= \frac{1-W'_0}{n_x+n_v+1} \end{aligned} \right. \quad (31)$$

步骤 4:使用方程组(32)更新量测向量中的

相关变量。

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} &= \sum_{i=1}^{n_x+1} W'_i h(\chi_{i,k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{z,k|k-1} &= \sum_{i=1}^{n_x+1} W'_i [h(\chi_{i,k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}] \cdot \\ &\quad [h(\chi_{i,k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{P}_{xz,k|k-1} &= \sum_{i=1}^{n_x+1} W'_i [\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \cdot \\ &\quad [h(\chi_{i,k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T \end{aligned} \right. \quad (32)$$

步骤 5:使用方程组(33)计算得到卡尔曼滤波计算需要使用的误差方差和滤波值。

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{xz,k|k-1} (\mathbf{P}_{z,k|k-1})^{-1} \\ \tilde{\mathbf{z}}_k &= \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \\ \mathbf{x}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{z}}_k \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{xx,k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \right. \quad (33)$$

步骤 6:根据方程组(8)采用 S-H-MAP 次优噪声估计器计算过程噪声的均值和方差。

步骤 7:判断过程噪声矩阵是否正定,如矩阵满足半正定性,则采用方程组(9)解算角速度;如矩阵不满足半正定性,则采用方程组(11)解算角速度。

步骤 8:判断解算时间是否结束,是则程序结束,否则跳转到第 2 步继续解算旋转飞行器角速度。

ASUKF 算法的工作过程如图 2 所示。

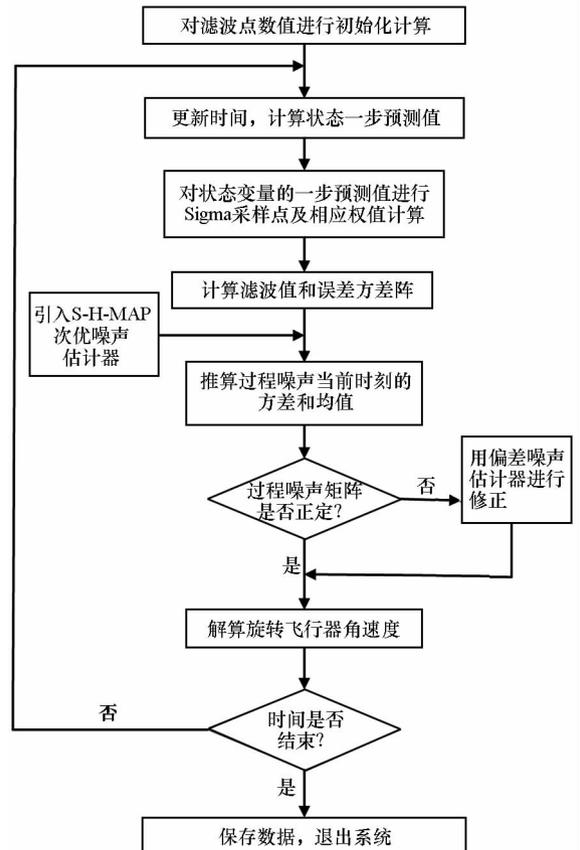


图 2 ASUKF 算法流程图

Fig. 2 Flow graph of ASUKF algorithm

ASUKF 算法设计完成后,可以有效解算角速度和角加速度。飞行器导航控制方案引入惯性坐标系和本体坐标系,在 ASUKF 算法解算角速度后,任意加速度计单轴方向的加速度输出表达式如式(34)所示。

$$f = [A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r] \cdot \theta \quad (34)$$

式中: A 是飞行器质心处的比力矢量; $\omega \times (\omega \times r)$ 是飞行器的向心加速度; $\dot{\omega} \times r$ 是飞行器的切向加速度; θ 是三维列向量,表示飞行器加速度计敏感矢量方向, θ 中的三个量分别是敏感方向与本体坐标系坐标轴的夹角。

通过式(34)计算得到飞行器加速度后得到飞行器的速度、位置和姿态相关信息。

3 仿真验证

仿真算例采用某一旋转飞行器进行半实物仿真分析。根据客户要求,飞行器初始速度为 1200 m/s,初始引入的加速度计噪声大小为 $100 \mu g$,加速度计距离原点的安装误差为 0.05 m,飞行器飞行时间为 300 s,算法解算延时不得超过 4‰,飞行距离需超过 240 km,飞行器着陆点的圆概率误差要求在 20 m 以内。

将飞行器的滚转角转速分别设为匀速 5 r/s、10 r/s、15 r/s、20 r/s、25 r/s 和 30 r/s 共 6 种工况条件,使用 ASUKF 算法数学仿真计算各种工作条件下的滚转角速度解算误差的均值和均方差,同时引入 Un-KF 算法进行数学仿真计算,将两种算法结果列入表 1 进行比较。

表 1 Un-KF 算法与 ASUKF 算法
滚转角速度数学仿真解算误差统计

Tab. 1 Roll angular velocity error statistical nature with Un-KF algorithm and ASUKF algorithm

算法	解算 时间/s	转速/ (r/s)	误差统计参数	
			均值/(r/s)	均方差/ (r/s) ^{1/2}
ASUKF	300.02	5	-5.8098×10^{-6}	8.6189×10^{-4}
	299.97	10	-2.8150×10^{-6}	6.1207×10^{-4}
	300.05	15	-1.8227×10^{-6}	4.9311×10^{-4}
	300.02	20	-1.3327×10^{-6}	4.1666×10^{-4}
	300.06	25	-1.0430×10^{-6}	3.6121×10^{-4}
	299.98	30	-8.5266×10^{-7}	3.1839×10^{-4}
Un-KF	299.98	5	-5.8101×10^{-6}	8.6187×10^{-4}
	300.00	10	-2.8145×10^{-6}	6.1208×10^{-4}
	301.57	15	-1.8225×10^{-6}	4.9309×10^{-4}
	303.16	20	-1.3329×10^{-6}	4.1666×10^{-4}
	310.49	25	-1.0431×10^{-6}	3.6121×10^{-4}
	316.07	30	-8.5263×10^{-7}	3.1839×10^{-4}

从表 1 中可以看出,在数学仿真计算过程中,ASUKF 算法求解得到的角速度解算精度与 Un-KF 算法相比并没有下降,而且随着飞行器滚转角速度的增加,ASUKF 算法在解算时间方面明显优于 Un-KF 算法。这是由于 ASUKF 算法采用超球面采样法,计算量不会随着飞行器滚转角速度的增加而增大;同时,引入一步预测计算值做自适应改进,使算法简化计算的同时保持很高的精度。

将飞行器引入半实物仿真系统中,进行 6 次半实物仿真试验,获得飞行器的飞行距离、仿真工作时间、着陆点的圆概率误差等关键信息。仿真结果见表 2。

表 2 飞行器半实物仿真试验数据表

Tab. 2 Hardware in the loop test data table

试验次数	飞行距离/km	工作时间/s	圆概率误差/m
1	278.58	299.95	14.8
2	280.96	299.98	14.7
3	290.45	300.09	15.1
4	301.29	299.99	14.9
5	295.37	300.12	17.3
6	314.82	300.07	15.3

由表 2 可知,飞行器的飞行距离均超过 240 km,仿真工作时间延时不超过 4‰,圆概率误差在 20 m 以内,符合工程应用相关要求。

为验证 ASUKF 算法的有效性,在第 1 次试验中,同等条件下分别引入 Un-KF 算法和 ASUKF 算法进行半实物仿真。

图 3 ~ 10 表示的是在同等条件的半实物仿真试验中,分别使用 Un-KF 算法和 ASUKF 算法计算得到的飞行器相关技术指标数据。

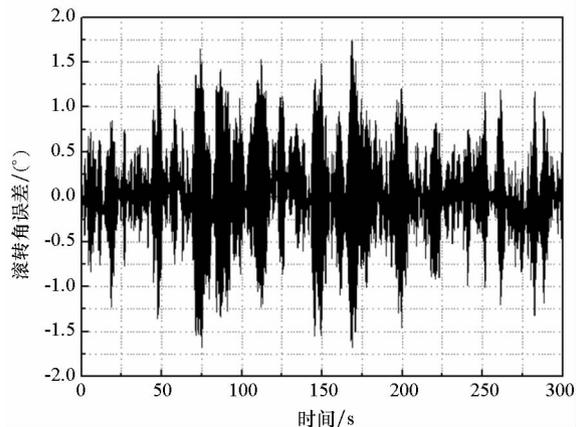


图 3 滚转角误差 (Un-KF 算法)

Fig. 3 Roll angle's error (Un-KF algorithm)

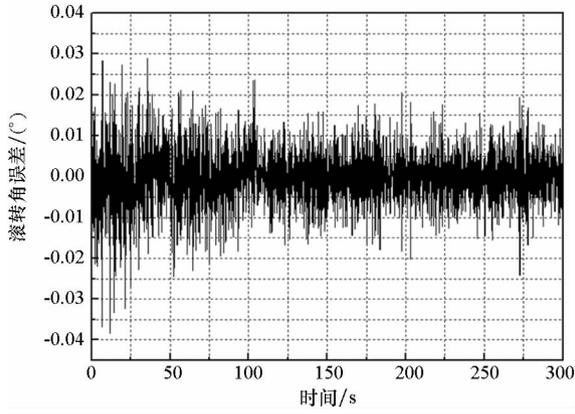
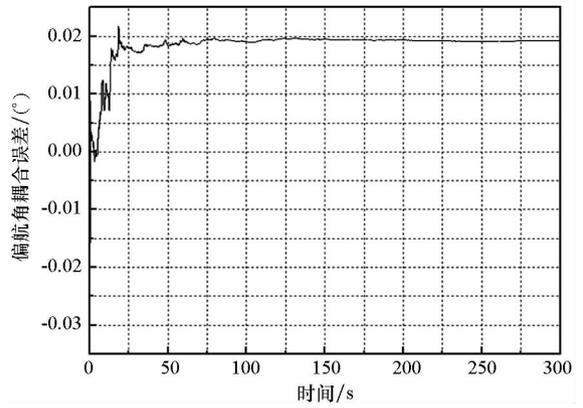


图 4 滚转角误差(ASUKF 算法)

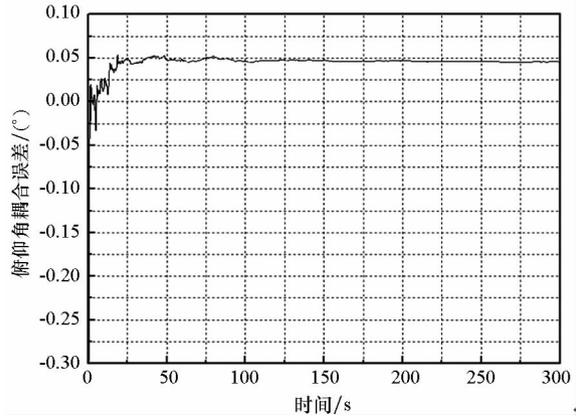
Fig. 4 Roll angle's error (ASUKF algorithm)

由图 3 ~ 10 可知,在半实物仿真过程中,Un-KF 算法计算的准确性要远小于 ASUKF 算法。这是因为飞行器本体自旋速度变快时,测量滚转角速度和角加速度用时较长,出现了比较严重的延时问题,从而影响了状态矩阵、量测矩阵及噪声统计矩阵的计算,产生了较为严重的耦合干扰。而



(a) 偏航角耦合误差

(a) Yaw angle's couple error

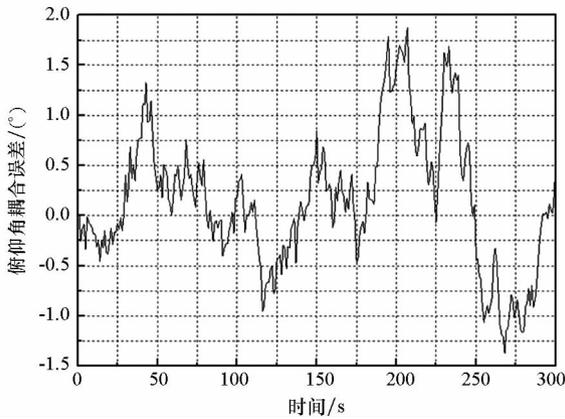


(b) 俯仰角耦合误差

(b) Pitch's couple error

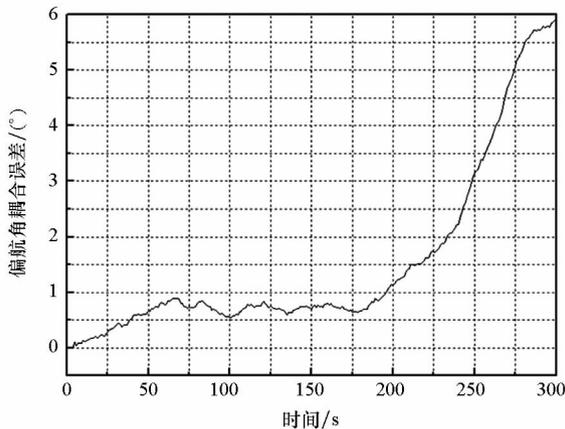
图 6 俯仰 - 偏航通道耦合误差(ASUKF 算法)

Fig. 6 Pitch-yaw couple error (ASUKF algorithm)



(a) 偏航角耦合误差

(a) Yaw angle's couple error



(b) 俯仰角耦合误差

(b) Pitch's couple error

图 5 俯仰 - 偏航通道耦合误差(Un-KF 算法)

Fig. 5 Pitch-yaw couple error (Un-KF algorithm)

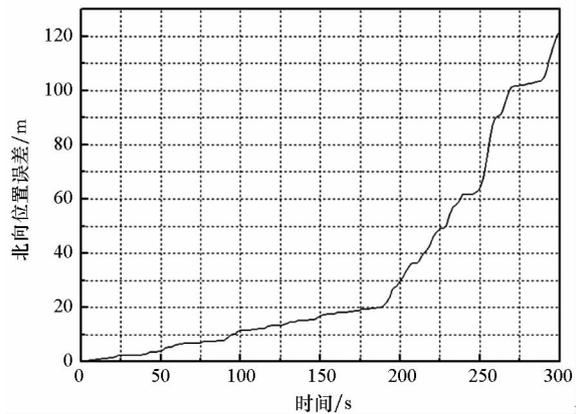


图 7 飞行器北向位置误差(Un-KF 算法)

Fig. 7 Aero-craft's north location error

(Un-KF algorithm)

ASUKF 算法使用超球面分布采样策略和线性转移计算,有效降低测量滚转角速度和角加速度用时,对过程噪声进行正定判断,防止计算发散,同时通过一步预测值进行自适应改进保证算法精度。飞行器使用 ASUKF 算法完成半实物仿真飞

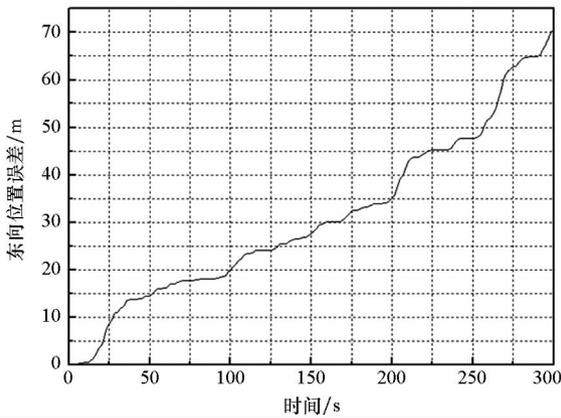


图8 飞行器东向位置误差(Un-KF算法)

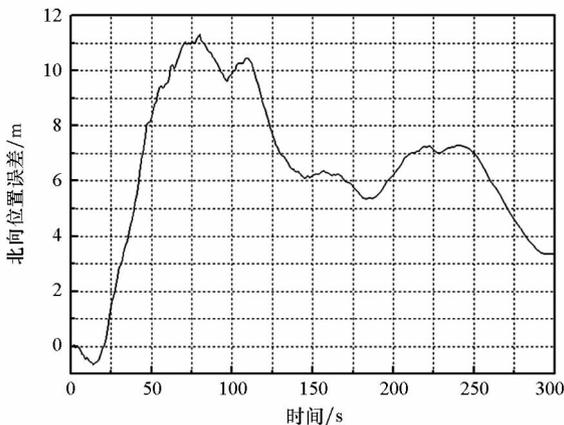
Fig.8 Aero-craft's east location error
(Un-KF algorithm)

图9 飞行器北向位置误差(ASUKF算法)

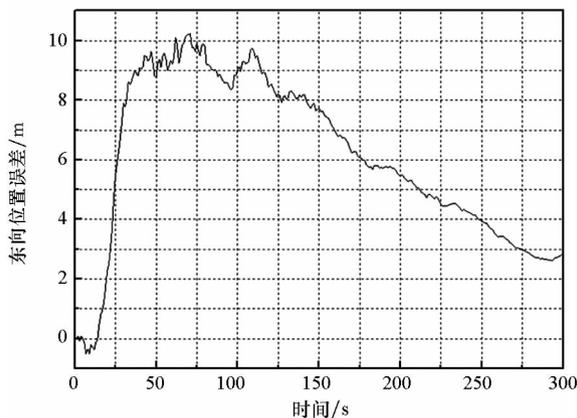
Fig.9 Aero-craft's north location error
(ASUKF algorithm)

图10 飞行器东向位置误差(ASUKF算法)

Fig.10 Aero-craft's east location error
(ASUKF algorithm)

行后着陆点的北向位置误差为 3.4 m, 东向位置误差为 2.8 m, 圆概率误差为 4.4 m, 满足精度要求。仿真结果证明, ASUKF 算法能够有效测量飞行器高速旋转的角速度和角加速度, 抑制飞行器

绕本轴高速自旋引起的姿态角通道耦合干扰问题, 精度满足飞行器着陆点要求。

4 结论

针对飞行器绕本体轴高速旋转的飞行过程出现的严重耦合干扰问题以及大角加速度和大角速度测量问题, 提出 ASUKF 算法。该算法使用超球面分布采样和线性转移计算提高解算效率; 使用一步预测计算进行自适应设计提高算法精度; 对过程噪声进行正定判断, 防止算法发送。半实物仿真试验证明, 该算法能够在飞行器高速旋转时有效测量飞行器的角速度和角加速度, 抑制飞行器绕本轴高速自旋引起的姿态角通道耦合干扰问题, 并证明得到满足飞行器着陆点要求的精度。

参考文献 (References)

- [1] Schuler A R, Grammatikos A, Fegley K A. Measuring rotational motion with linear accelerometers [J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 1967, AES-3(3): 465-472.
- [2] Edwan E, Knedlik S, Zhou J C, et al. GPS/INS integration for GF-IMU of twelve mono-axial accelerometers configurations[C]// Proceeding of the 6th Workshop on Positioning, Navigation and Communication, 2009: 183-188.
- [3] Edwan E, Knedlik S, Loffeld O. Constrained angular motion estimation in a gyro-free IMU [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(1): 596-610.
- [4] Sun T, Xin M. Hypersonic entry vehicle state estimation using nonlinearity-based adaptive cubature Kalman filters[J]. Acta Astronautica, 2017, 134: 221-230.
- [5] Edwan E, Knedlik S, Loffeld O. Angular motion estimation using dynamic models in a gyro-free inertial measurement unit[J]. Sensors, 2012, 12(5): 5310-5327.
- [6] 张会新, 王世昌, 杨运良, 等. 全加速度计惯性测量系统角速度解算方法的优化[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(6): 672-675.
ZHANG Huixin, WANG Shichang, YANG Yunliang, et al. Method optimization for angular velocity calculating in inertial testing system composed with full accelerometers [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(6): 672-675. (in Chinese)
- [7] Cappa P, Patanè F, Rossi S. Two calibration procedures for a gyroscope-free inertial measurement system based on a double-pendulum apparatus [J]. Measurement Science and Technology, 2008, 19(5): 055204.
- [8] Cardou P, Fournier G, Gagnon P. A nonlinear program for angular-velocity estimation from centripetal-acceleration measurements [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2011, 16(5): 932-944.
- [9] 刘涛, 赵国荣, 高青伟. 一种新的无陀螺捷联惯导系统配置方案设计方法[J]. 武汉大学学报(工学版), 2011, 44(1): 115-119, 123.
LIU Tao, ZHAO Guorong, GAO Qingwei. A new design method of allocation scheme in GFSINS [J]. Engineering

- Journal of Wuhan University, 2011, 44(1): 115 - 119, 123. (in Chinese)
- [10] 廖琰, 尹大伟, 郑宇昕, 等. 基于自适应 Kalman 滤波算法的航空发动机可测参数及其偏离量估计[J]. 国防科技大学学报, 2012, 34(4): 1 - 6.
LIAO Ying, YIN Dawei, ZHENG Yuxin, et al. Aeroengine measurable parameters estimation using adaptive Kalman filter algorithm [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2012, 34(4): 1 - 6. (in Chinese)
- [11] 武庆雅. 旋转弹药的惯性导航与解耦控制方法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
WU Qingya. Research on inertial navigation and decoupling control method for spinning ammunition [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015. (in Chinese)
- [12] 刘宇, 季廷洪, 向高林, 等. 基于 Kalman 滤波和六位置法的加速度计标定补偿[J]. 压电与声光, 2016, 38(1): 94 - 98, 110.
LIU Yu, JI Tinghong, XIANG Gaolin, et al. Calibration and compensation for accelerometer based on Kalman filter and a six-position method [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2016, 38(1): 94 - 98, 110. (in Chinese)
- [13] 刘艳霞, 方建军, 宋玉秋, 等. 基于非线性变换的加速度计误差标定与补偿[J]. 宇航计测技术, 2016, 36(2): 37 - 41.
LIU Yanxia, FANG Jianjun, SONG Yuqiu, et al. Error calibration and compensation of three-axis accelerometer based on nonlinear transform [J]. Journal of Astronautic Metrology and Measurement, 2016, 36(2): 37 - 41. (in Chinese)
- [14] Frangos M. Uncertainty quantification for cuttings transport process monitoring while drilling by ensemble Kalman filtering [J]. Journal of Process Control, 2017, 53: 46 - 56.
- [15] 余小游, 高亭亭, 孙广富, 等. 卫星导航弱信号的变维卡尔曼滤波跟踪算法 [J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(3): 56 - 60.
YU Xiaoyou, GAO Tingting, SUN Guangfu, et al. Weak GNSS signal tracking algorithm based on variable dimension Kalman filter [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(3): 56 - 60. (in Chinese)
- [16] Mattei G, Monaco S. Nonlinear autopilot design for an asymmetric missile using robust backstepping control [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamic, 2014, 37(5): 1462 - 1476.
- [17] 秦永元. 惯性导航 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
QIN Yongyuan. Inertia navigation [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [18] Wang C, Burnham-Fay E D, Ellis J D. Real-time FPGA-based Kalman filter for constant and non-constant velocity periodic error correction [J]. Precision Engineering, 2017, 48: 133 - 143.
- [19] Theodoulis S, Gassmann V, Wernert P, et al. Guidance and control design for a class of spin-stabilized fin-controlled projectiles [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2013, 36(2): 517 - 531.
- [20] Rahimi A, Dev Kumar K, Alighanbari H. Fault estimation of satellite reaction wheels using covariance based adaptive unscented Kalman filter [J]. Acta Astronautica, 2017, 134: 159 - 169.
- [21] Hu Z X, Gallacher B. Extended Kalman filtering based parameter estimation and drift compensation for a MEMS rate integrating gyroscope [J]. Sensors & Actuators A: Physical, 2016, 250: 96 - 105.
- [22] Wang B B, Wu P L. Underwater bearing-only tracking based on square-root unscented Kalman filter smoothing algorithm [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2016, 24(2): 180 - 184.
- [23] Zhang J, Hu Q L, Wang D W. Bounded finite-time attitude tracking control for rigid spacecraft via output feedback [J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 64: 75 - 84.