

# 一种搜索鲁棒的中国余数定理的多基线相位解缠绕技术\*

蒋志彪, 王 建, 宋 千, 周智敏

(国防科技大学 电子科学学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**多基线相位解缠绕的性能深受噪声水平制约,比如基于经典中国余数定理的相位解缠方法,由于其糟糕的抗噪声性能,限制了其在实际中的广泛运用。基于搜索鲁棒的中国余数定理,通过引入公因子,构建新的同余方程组,提出了一种搜索鲁棒的中国余数定理的相位解缠方法。仿真实验验证了该方法的有效性,并表明选择合理的公因子可以有效提高算法的抗噪声性能。

**关键词:**多基线相位解缠绕;经典中国余数定理;搜索鲁棒的中国余数定理;干涉合成孔径雷达  
**中图分类号:**TP957 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2019)01-072-08

## A searched-form robust Chinese remainder theorem based multibaseline phase unwrapping algorithm

JIANG Zhibiao, WANG Jian, SONG Qian, ZHOU Zhimin

(College of Electronic Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The performance of the multibaseline phase unwrapping is directly related to noise level. For instance, the presence of phase noise makes the phase unwrapping method based on the classical Chinese remainder theorem unrobust enough and inapplicable in practical cases. So a method based on a SR-CRT (searched-form robust Chinese remainder theorem) was presented, and the common factor was carried out to build the new system of simultaneous congruence in the method. Theoretical analysis and experimental results prove the effectiveness of the SR-CRT method and demonstrate that selecting reasonable common factor can improve the noise robustness of the SR-CRT method.

**Keywords:** multibaseline phase unwrapping; classical Chinese remainder theorem; searched-form robust Chinese remainder theorem; interferometric synthetic aperture radar

合成孔径雷达干涉测量(Interferometric Synthetic Aperture Radar, InSAR)是目前极具潜力的测绘技术之一,能够获得高分辨率和高精度的地形高程。同时多基线和多波段的 InSAR 技术进一步提高了 InSAR 技术获取数字高程模型(Digital Elevation Model, DEM)的测量精度<sup>[1-2]</sup>。

目前,在多基线干涉合成孔径雷达信号处理步骤中,多基线相位解缠绕仍是干涉处理的关键和核心问题所在。在过去的几十年里,许多的多基线相位解缠绕方法被先后提出来<sup>[3]</sup>。文献[3]首次提出了一种基于聚类分析(Cluster Analysis, CA)的多基线相位解缠绕算法。文献[4]提出了以最大似然和最小二乘思想为基础的两种相位解缠绕方法。文献[5]提出了一种基线迭代的相位解缠绕算法,该方法通过不同基线之间的迭代,实现最终的相位解缠绕。1999年, Ferretti 等将小波

技术运用到相位解缠绕技术中<sup>[6]</sup>,提出基于小波思路的相位解缠绕算法。随后,一些基于参数估计的多相位解缠绕方法也被相继提出来,这些方法以统计学为架构,如最大似然架构<sup>[7-8]</sup>和最大后验架构<sup>[9]</sup>,但是这类以统计学为架构的多基线相位解缠绕方法都要求其干涉图数据是独立的,而且运算耗时比较大。在文献[9]的基础上, Ferraioli 等为了进一步降低运算时间,提出了基于全变分(Total Variation, TV)模型和最优图割思路的优化算法<sup>[10]</sup>。

文献[11]首次将经典中国余数定理(Classical Chinese Remainder Theorem, C-CRT)运用到多基线 InSAR 相位解缠绕问题中,后来文献[12]对基于 C-CRT 的多基线相位解缠绕方法进行了应用推广,另外文献[13]将这一方法运用到了机载毫米波 InSAR 多基线相位解缠绕中,分

\* 收稿日期:2018-01-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61372163)

作者简介:蒋志彪(1988—),男,湖南益阳人,博士研究生,E-mail:13596458441@163.com;

周智敏(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:kdzhouzmn@sina.cn

析了基线构型误差和基线构型优化设计等问题。无疑,基于 C-CRT 的相位解缠绕方法较好解决了干涉相位欠采样处的解缠难题,然而该方法对噪声特别敏感,而实际中获取的干涉数据又不可避免地存在噪声,此问题的存在极大地限制了该方法在实际中的广泛运用。

值得注意的是, Xia 等在中国余数定理方面进行了深入的研究,提出了一种鲁棒的中国余数定理<sup>[14]</sup>,该方法通过搜索的方式来确定模糊数,故又称之为搜索鲁棒的中国余数定理(Searched-form Robust Chinese Remainder Theorem, SR-CRT)。该方法利用余数的冗余来鲁棒地恢复原来的数,因而具有较好的鲁棒性,故该方法广泛地运用于动目标检测、测距和频率估计等问题中<sup>[15-18]</sup>。

本文通过创新性地引入公因子,构建了新的同余方程组,将 SR-CRT 首次运用到多基线相位解缠绕中,并重点分析了其抗噪声性能。

## 1 中国余数定理原理

### 1.1 经典中国余数定理

设两两互质的正整数  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_L$ , 且都大于 1;  $a_1, a_2, \dots, a_L$  为任意整数,  $n_1, n_2, \dots, n_L$  为模糊数, 一次同余方程组:

$$\begin{cases} x = n_1 \Gamma_1 + a_1 \\ x = n_2 \Gamma_2 + a_2 \\ \vdots \\ x = n_L \Gamma_L + a_L \end{cases} \quad (1)$$

在  $0 \leq x < \Gamma \triangleq \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_L$  时, 同余方程组有唯一解  $x$ , 解的形式可以写成如下形式:

$$x = \sum_{i=1}^L a_i \bar{\gamma}_i \gamma_i \pmod{\Gamma} \quad (2)$$

式中,  $\gamma_i$  和  $\bar{\gamma}_i$  分别为:

$$\begin{cases} \gamma_i \triangleq \Gamma / \Gamma_i \\ \bar{\gamma}_i \gamma_i \equiv 1 \pmod{\Gamma_i} \end{cases} \quad (3)$$

其中, 正整数  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_L$  满足两两互质,  $\bar{\gamma}_i$  为  $\gamma_i$  模  $\Gamma_i$  的逆乘元。易知  $\Gamma_i$  和  $\gamma_i$  是互质的, 所以关于  $\gamma_i$  模  $\Gamma_i$  的逆乘元  $\bar{\gamma}_i$  是存在的。

### 1.2 搜索鲁棒的中国余数定理

设正整数  $M_1, M_2, \dots, M_L$  存在最大公约数  $C$ , 且都大于 1;  $r_1, r_2, \dots, r_L$  为任意整数, 一次同余方程组:

$$\begin{cases} x = n_1 M_1 + r_1 \\ x = n_2 M_2 + r_2 \\ \vdots \\ x = n_L M_L + r_L \end{cases} \quad (4)$$

式中, 正整数  $M_i$  满足

$$M_i = C \Gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (5)$$

考虑噪声时, 即余数中存在误差, 如

$$\hat{r}_i = r_i + \Delta r_i \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

其中,  $\Delta r_i$  是余数误差。

在  $0 \leq x < \Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_L$  时, 当余数误差满足  $|\Delta r_i| < \tau (i = 1, 2, \dots, L)$ , 其中  $\tau$  是余数误差上限, 且  $\tau < C/4$ , 同余方程组的解  $x$  的估计值  $\hat{x}$  形式可以写成:

$$\hat{x} = \frac{1}{L} \left[ \sum_{i=1}^L (n_i M_i + r_i + \Delta r_i) \right] \quad (7)$$

式中,  $[\cdot]$  表示四舍五入运算。模糊数  $n_i$  是通过式(8)中的二维搜索方式求解, 故称为搜索鲁棒的中国余数定理(SR-CRT)。

$$S_i \triangleq \{(\bar{n}_1, \bar{n}_i) = \arg \min_{\substack{0 \leq \bar{n}_1 \leq \gamma_1 - 1 \\ 0 \leq \bar{n}_i \leq \gamma_i - 1}} |\hat{n}_i M_i + \hat{r}_i - \bar{n}_1 M_1 - \bar{r}_1|\} \quad (8)$$

其中,

$$2 \leq i \leq L \quad (9)$$

通过上述两种定理原理的对比可知, C-CRT 要求同余方程组的模两两互质, 而 SR-CRT 要求模之间具有最大公约数, 且除去该最大公约数后所得的数都两两互质。

显然, 两种方法对运用的同余方程组的模具有不同的要求, 对于满足 C-CRT 进行相位解缠绕要求的基线数据, 是否也可以通过 SR-CRT 进行相位解缠绕呢?

## 2 基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术

对于上述问题, 可通过人为引入一个公因子, 构建新的同余方程组, 使之满足 SR-CRT 的条件, 下面以两幅干涉图的情形详细介绍其过程。

### 2.1 相位解缠绕原理

根据多基线干涉几何关系, 不同基线长度下的两幅干涉图中, 每一个像素都近似满足<sup>[3]</sup>:

$$\frac{\varphi_1 + 2\pi n_1}{B_1} = \frac{\varphi_2 + 2\pi n_2}{B_2} \quad (10)$$

式中:  $\varphi_1, \varphi_2$  为不同基线长度下的缠绕相位(去平地相位);  $B_1, B_2$  为不同的垂直基线长度;  $n_1, n_2$  分别代表两幅干涉相位图的模糊数。

利用 C-CRT 进行相位解缠的条件是两幅干涉图中的基线长度比值必须互质, 即满足

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \quad (11)$$

就可以构建出同余方程组:

$$\begin{cases} x = n_1 \Gamma_1 + a_1 \\ x = n_2 \Gamma_2 + a_2 \end{cases} \quad (12)$$

根据定义可得余数  $a_i$  和剩余数  $e_i$  分别为:

$$\begin{cases} a_1 = \lfloor \frac{\Gamma_1 \varphi_1}{2\pi} \rfloor \\ e_1 = \frac{\Gamma_1 \varphi_1}{2\pi} - a_1 \\ a_2 = \lfloor \frac{\Gamma_2 \varphi_2}{2\pi} \rfloor \\ e_2 = \frac{\Gamma_2 \varphi_2}{2\pi} - a_2 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\lfloor \cdot \rfloor$  为取整运算。

对于满足 C-CRT 进行相位解缠的基线条件, 如式(11)所示, 将分子和分母同时乘以一个公因子  $C$ , 可得:

$$\frac{CB_1}{CB_2} = \frac{C\Gamma_2}{C\Gamma_1} = \frac{M_2}{M_1} \quad (14)$$

联立式(10)和式(14), 得:

$$M_1(\varphi_1 + 2\pi n_1) = M_2(\varphi_2 + 2\pi n_2) \quad (15)$$

将式(15)中各项提出  $2\pi$ , 变形可得:

$$2\pi \left( \frac{M_1 \varphi_1}{2\pi} + M_1 n_1 \right) = 2\pi \left( \frac{M_2 \varphi_2}{2\pi} + M_2 n_2 \right) \quad (16)$$

分别定义新的余数  $r_i$  和剩余数  $f_i$  为:

$$\begin{cases} r_1 = \lfloor \frac{M_1 \varphi_1}{2\pi} \rfloor \\ f_1 = \frac{M_1 \varphi_1}{2\pi} - r_1 \\ r_2 = \lfloor \frac{M_2 \varphi_2}{2\pi} \rfloor \\ f_2 = \frac{M_2 \varphi_2}{2\pi} - r_2 \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)的余数和剩余数代入式(16)可得:

$$2\pi(f_1 + r_1 + M_1 n_1) = 2\pi(f_2 + r_2 + M_2 n_2) \quad (18)$$

将式(18)中各项对  $2\pi$  进行求余, 可得剩余数  $f_1$  和  $f_2$  是相等的, 最后可以构建出新的同余方程组:

$$\begin{cases} x = n_1 M_1 + r_1 \\ x = n_2 M_2 + r_2 \end{cases} \quad (19)$$

只要公因子  $C$  取任意正整数, 就可以利用 SR-CRT 求解模糊数  $n_1, n_2$ , 得出方程组的解。

对  $i = 1, 2$ , 考虑噪声时, 即余数中存在误差, 如下式

$$\hat{r}_i = r_i + \Delta r_i \quad (20)$$

式中,  $\Delta r_i$  为余数误差。

当余数误差满足  $|\Delta r_i| \leq \tau < C/4$ , 其中  $\tau = \max(\Delta r_i)$ , 就可以运用 SR-CRT 搜索到正确的模糊数, 最后求出绝对相位为:

$$\phi_i = \varphi_i + 2n_i \pi \quad (21)$$

以上就是基于 SR-CRT 的多基线相位解缠绕的基本原理。

## 2.2 抗噪声性能分析

通过相位解缠原理分析可知, 引入公因子后, 新的同余方程组能够运用 SR-CRT, 那么其抗噪声性能如何?

当缠绕相位中存在噪声的情况下, 可以得出:

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_i + \Delta \varphi_i \quad (22)$$

式中,  $\Delta \varphi_i$  是噪声相位,  $\Delta \varphi_i \in [0, 2\pi)$ 。

根据式(17)和式(22), 可以得到有噪声的余数表达式为:

$$\begin{aligned} \hat{r}_i &= r_i + \Delta r_i \\ &= \lfloor \frac{M_i \hat{\varphi}_i}{2\pi} \rfloor = \lfloor \frac{M_i \varphi_i + M_i \Delta \varphi_i}{2\pi} \rfloor \\ &= \lfloor \frac{M_i \varphi_i}{2\pi} \rfloor + \lfloor f_i + \frac{M_i \Delta \varphi_i}{2\pi} \rfloor \end{aligned} \quad (23)$$

又  $0 < f_i < 1$ , 噪声相位  $\Delta \varphi_i \in [0, 2\pi)$ , 进一步得到余数误差  $\Delta r_i$  的表达式为:

$$|\Delta r_i| = \left| \lfloor f_i + \frac{M_i \Delta \varphi_i}{2\pi} \rfloor \right| \leq \left| f_i + \frac{C\Gamma_i \Delta \varphi_i}{2\pi} \right| \quad (24)$$

根据 SR-CRT 可知, 当余数误差  $\Delta r_i$  满足  $|\Delta r_i| \leq \tau < C/4$ , 就可以搜索到正确的模糊数。式(24)中条件等价于噪声相位  $\Delta \varphi_i$  满足:

$$0 \leq \Delta \varphi_i < \frac{\pi}{\Gamma_i} - \frac{4\pi f_i}{C\Gamma_i} \quad (25)$$

式(25)就是基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能表达式, 其抗噪声性能受参数  $\Gamma_i$ 、剩余数  $f_i$ 、公因子  $C$  的影响。

需要注意的是, 由于公因子  $C$  可以取任意的正整数, 又  $0 < f_i < 1$ , 当公因子  $C$  取值为比较大的整数时, 使得下式成立:

$$\frac{4\pi f_i}{C\Gamma_i} \approx 0 \text{ 或 } \frac{4\pi f_i}{C\Gamma_i} \ll \frac{\pi}{\Gamma_i} \quad (26)$$

此时噪声相位  $\Delta \varphi_i$  只需要满足:

$$0 \leq \Delta \varphi_i < \pi / \Gamma_i \quad (27)$$

这时, 基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能仅受参数  $\Gamma_i$  的影响, 满足式(27)条件的噪声相位的区间分布示意图 1 所示。

通过噪声性能原理分析可知, 基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能受参数  $\Gamma_i$ 、剩余数  $f_i$ 、公因子  $C$  的影响, 而通过选择合适公因子  $C$  可以消除剩余数  $f_i$ 、公因子  $C$  对噪声相位的限制, 从而提高该方法的抗噪声性能。

## 2.3 多维情况推广

上述相位解缠原理是以两幅干涉图为例分析的, 本节将给出其多维情况的推广。

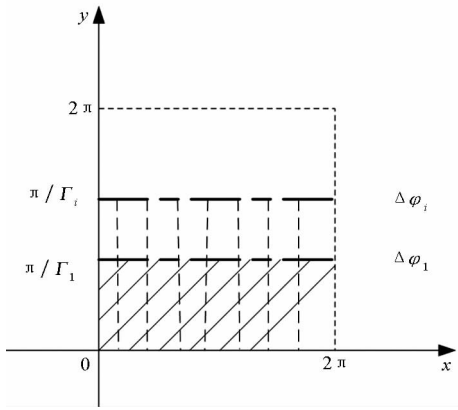


图 1 噪声相位分布

Fig. 1 Distribution of phase noise

根据多基线干涉几何关系,对于  $L$  幅不同基线的干涉相位图,同理,每一个像素也都满足<sup>[3]</sup>:

$$\frac{\varphi_1 + 2\pi n_1}{B_1} = \frac{\varphi_2 + 2\pi n_2}{B_2} = \dots = \frac{\varphi_L + 2\pi n_L}{B_L} \quad (28)$$

式中:  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$  为不同基线长度下的缠绕相位(去平地相位);  $B_1, B_2, \dots, B_L$  为不同垂直基线长度;  $n_1, n_2, \dots, n_L$  分别代表在不同干涉相位图中的模糊数。

$L$  幅干涉图中的任意两副基线的长度比值必须互质,即满足:

$$\frac{B_i}{B_j} = \frac{\Gamma_j}{\Gamma_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, L, i \neq j \quad (29)$$

同样,将式(29)中的分子和分母同时乘以一个公因子  $C$ ,构建出新的同余方程组:

$$\begin{cases} x = r_1 + M_1 n_1 \\ x = r_2 + M_2 n_2 \\ \vdots \\ x = r_L + M_L n_L \end{cases} \quad (30)$$

定义新的余数  $r_i$  和剩余数  $f_i$  为:

$$\begin{cases} r_1 = \lfloor \frac{M_1 \varphi_1}{2\pi} \rfloor \\ r_2 = \lfloor \frac{M_2 \varphi_2}{2\pi} \rfloor \\ \vdots \\ r_L = \lfloor \frac{M_L \varphi_L}{2\pi} \rfloor \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} f_1 = \frac{M_1 \varphi_1}{2\pi} - r_1 \\ f_2 = \frac{M_2 \varphi_2}{2\pi} - r_2 \\ \vdots \\ f_L = \frac{M_L \varphi_L}{2\pi} - r_L \end{cases} \quad (32)$$

只要公因子  $C$  为正整数,就可以利用 SR-

CRT 求解模糊数,最后求出绝对相位。

通过上述基于 SR-CRT 的多基线相位解缠绕的基本原理分析可知,无论是二维还是多维情况,该方法都需要引入公因子  $C$ ,而且公因子  $C$  可取任意正整数。下面通过试验分析公因子  $C$  的取值对基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能的影响。

### 3 实验结果

在上一节中,详细分析了基于 SR-CRT 方法的相位解缠原理和抗噪声性能,为了进一步验证该方法的有效性和抗噪声性能,本节进行性能验证实验和算法执行时间分析,并与基于 C-CRT 方法的相位解缠结果和文献[3]中基于 CA 方法的相位解缠绕结果进行对比分析,实验中验证算法的软件运行环境为 MATLAB2012,计算机的 CPU 主频为 3.2 GHz,内存为 8 GB。

本实验采用由美国 Long's Peak 国家公园真实数字地形高程图(图像大小为  $152 \times 458$ )生成的干涉相位图来验证算法,实验以三幅干涉图为例来进行分析,主要系统参数如下:雷达系统天线频段为 C 波段,  $S_1, S_2, S_3$  和  $S_4$  分别表示四副自发自收天线的中心位置,以天线  $S_1$  为参考,即  $S_1$  为主天线,雷达主天线到场景中心的斜距为 570 km,主天线的入射角为  $10.5^\circ$ 。三组基线的构建形式为:基线  $B_1$  代表天线  $S_1$  和  $S_2$  对应基线的基线长度,基线  $B_1$  长度为 120 m;基线  $B_2$  代表天线  $S_1$  和  $S_3$  对应基线的基线长度,基线  $B_2$  长度为 150 m;基线  $B_3$  代表天线  $S_1$  和  $S_4$  对应基线的基线长度,基线  $B_3$  的长度为 200 m。

图 2(a) ~ (c) 分别为基线  $B_1, B_2, B_3$  对应的绝对相位参考图。图 2(d) ~ (f) 分别为基线  $B_1, B_2, B_3$  对应的缠绕相位图,从图中可以看出基线越长,干涉条纹越密集,其中,缠绕相位图中的相位噪声为改进的高斯噪声,考虑了地形和视数因素。

为了便于分析基于 SR-CRT 算法的性能,给出了基于 C-CRT 方法的相位解缠绕结果和基于 CA 方法的相位解缠绕结果做对比,并给出了公因子分别取值为 6 和 200 时,基于 SR-CRT 方法的相位解缠绕结果,下面以  $B_3$  基线的相关解缠结果为例进行分析。

图 3 是基于 C-CRT 的多基线相位解缠绕技术的求解结果。从相位误差图中,可以明显看出解缠绕出现错误区域比较密集,并且成条纹形状,通过统计直方图可知,绝对相位误差均值为 1.45,标准差为 30.60,绝对相位重建误差大于  $2\pi$  的像素占总像素的 28.22%。

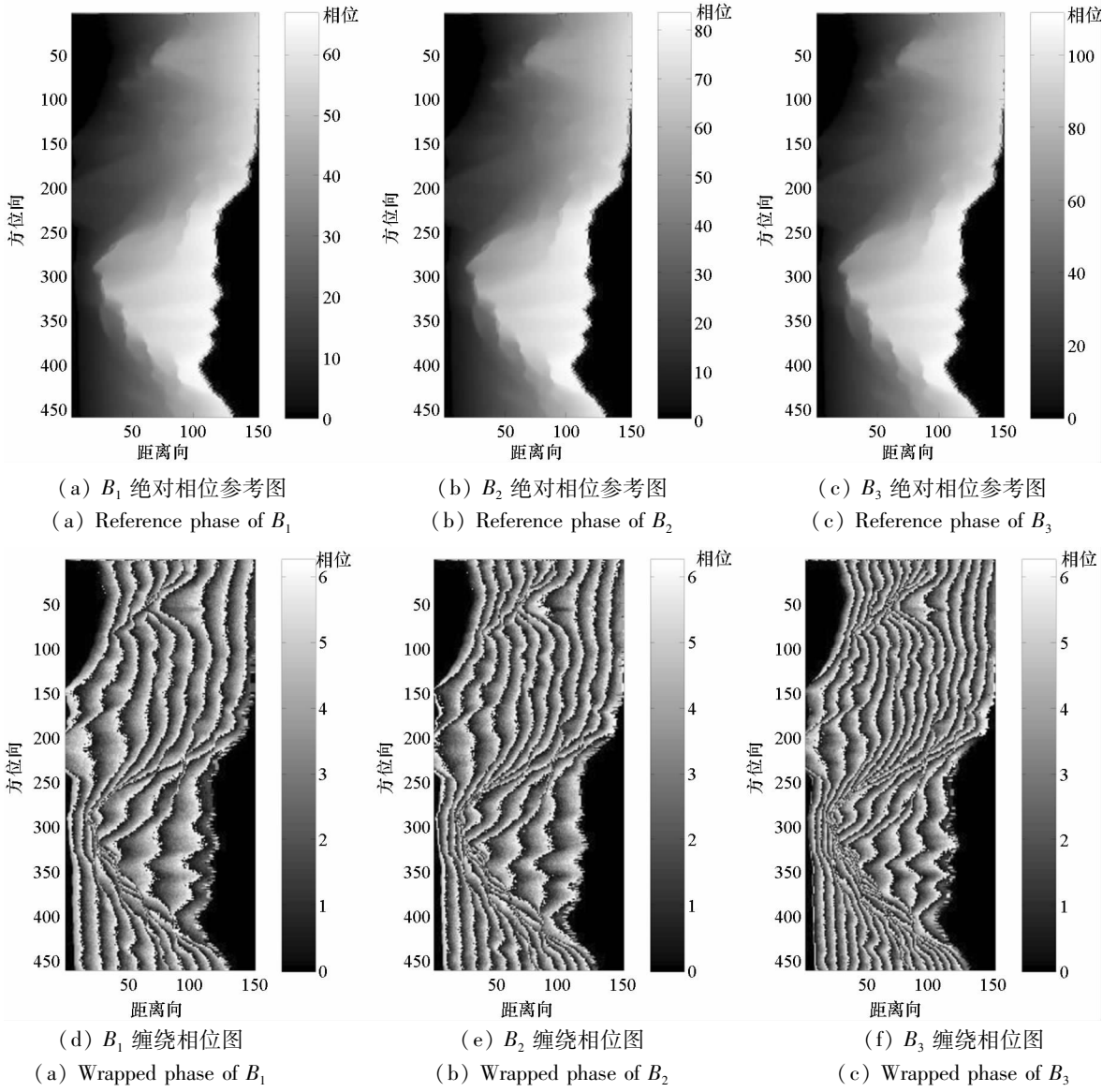


图 2 仿真数据

Fig. 2 Simulation data

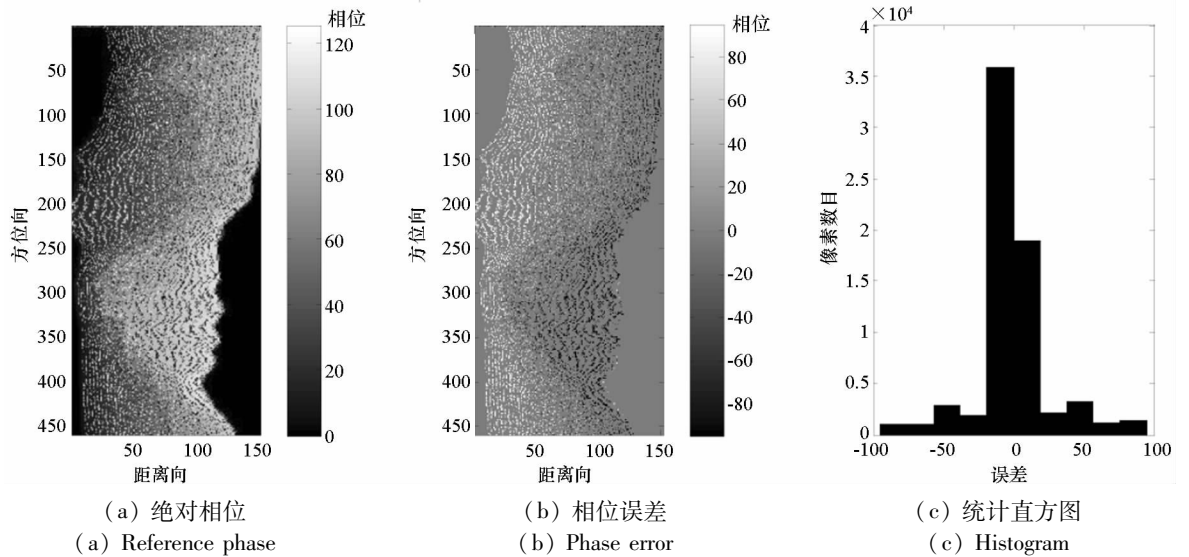


图 3 基于 C-CRT 的解缠结果

Fig. 3 Results of the C-CRT method

图 4 是基于 SR-CRT 方法、公因子  $C$  取值为 6 时的求解结果。通过绝对相位图和相位误差图可知,图像两侧区域求解绝对相位与参考相位相比偏差较大,主要原因是这些区域地形比较陡峭,造成图像的相干性很低,即在图像表现出比较大的噪声,使式(25)中条件不满足,从而无法通过 SR-CRT 搜索到正确的模糊数,造成解缠绕结果出现错误。通过误差统计直方图可知,绝对相位重建误差均值为 0.19,标准差为 10.89,其中重建误差大于  $2\pi$  的像素占总像素的 5.48%。

图 5 是基于 SR-CRT 方法、公因子  $C$  取值 200 时的求解结果,通过绝对相位图和相位误差图可知,除了图像两侧区域孤立的噪声点外,绝对相位图与参考相位图基本相似。通过误差统计直方图

可知,误差均值为 0.15,标准差为 7.92,其中重建误差大于  $2\pi$  的像素占总像素的 1.88%。

图 6 是基于 CA 方法的求解结果,通过绝对相位图和相位误差图可知,除了图像两侧区域孤立的噪声点外,绝对相位图与参考相位图基本相似。通过误差统计直方图可知,误差均值为 0.06,标准差为 8.85,其中重建误差大于  $2\pi$  的像素占总像素的 2.32%。

通过图 3、图 4、图 5 的实验结果对比可知,基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能明显优于基于 C-CRT 的相位解缠绕技术;通过图 4 与图 5 的实验结果对比可知,公因子  $C$  取值 200 时的求解结果要优于公因子  $C$  取值 6 时的求解结果,因而选择较大的公因子可进一步提高抗噪声性能。

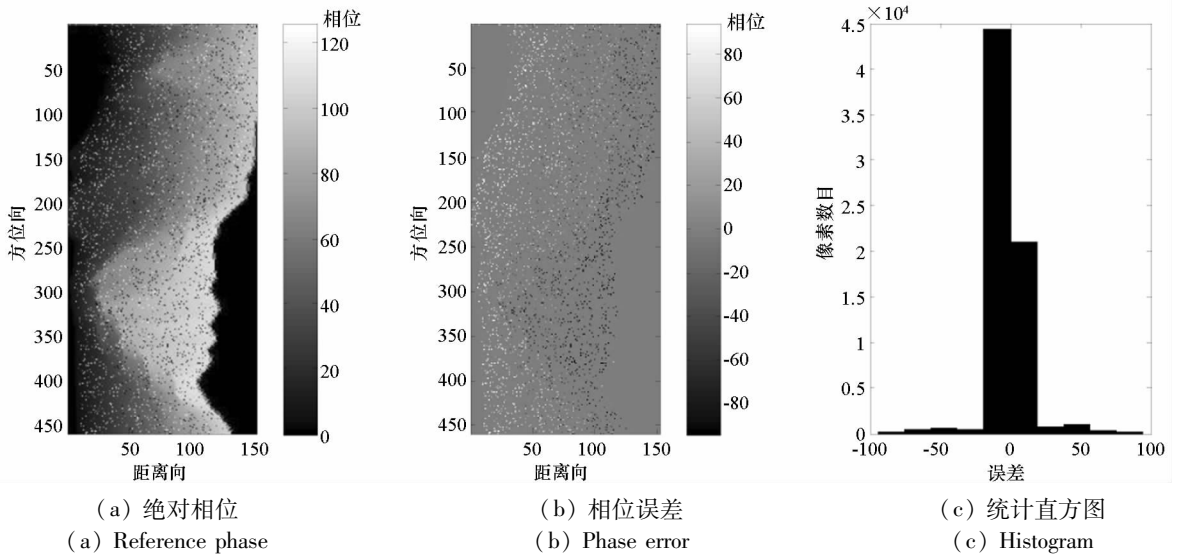


图 4 基于 SR-CRT 方法的解缠结果( $C=6$ )

Fig. 4 Results of the SR-CRT method ( $C=6$ )

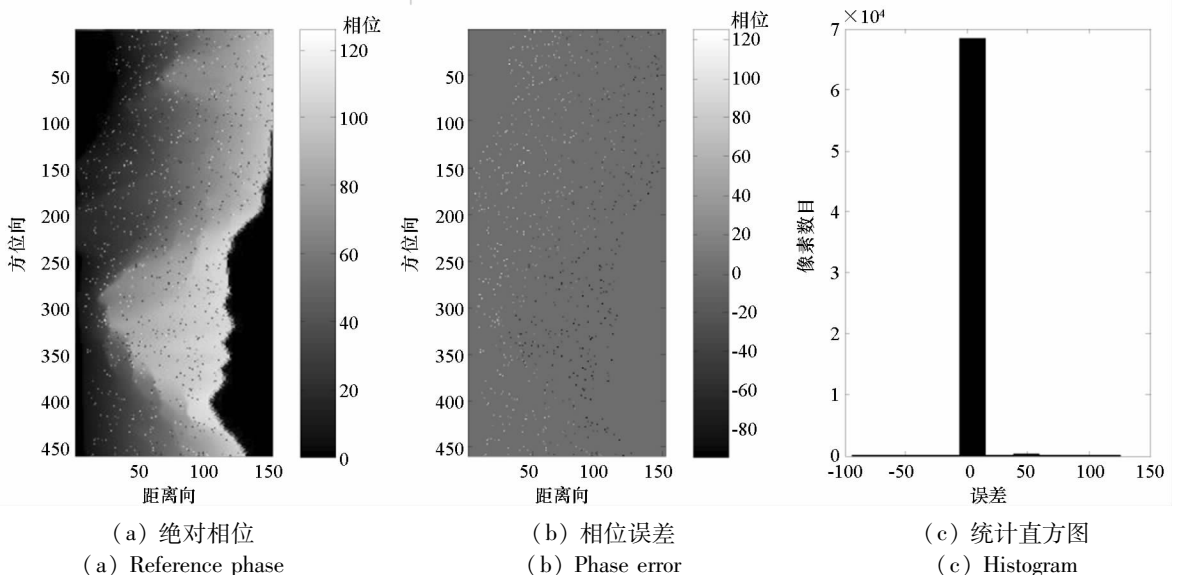


图 5 基于 SR-CRT 方法的解缠结果( $C=200$ )

Fig. 5 Results of the SR-CRT method ( $C=200$ )

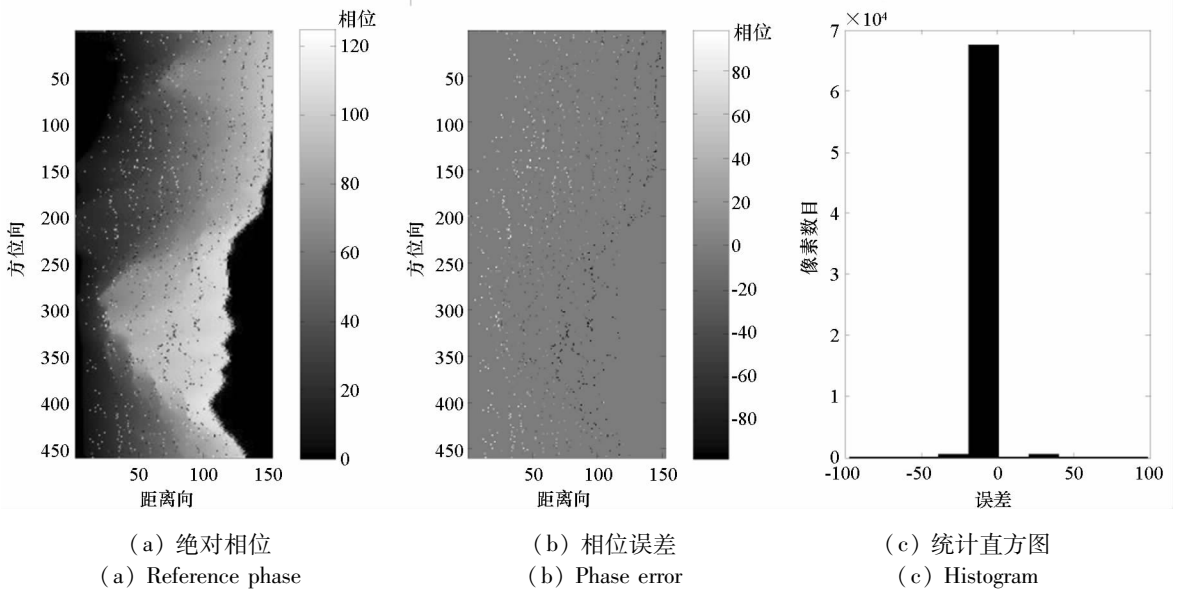


图 6 基于 CA 方法的解缠结果  
Fig. 6 Results of the CA method

通过图 4、图 5 和图 6 的实验结果对比分析可知,基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能比较接近于基于 CA 相位解缠绕技术的,而且当公因子  $C$  取值合理时,基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能甚至要优于基于 CA 相位解缠绕技术的。

下面对基于 SR-CRT 的多基线相位解缠技术(简称搜索方法)的算法执行时间进行仿真分析。由原理分析可知该方法是以单像素为单位进行相位解缠绕的,同基于 C-CRT 的多基线相位解缠技术(简称经典方法)一样,都属于单像素相位解缠绕。而文献[3]中基于 CA 的多基线相位解缠技术是以像素类为单位进行相位解缠(简称聚类分析方法)。图 7 给出了这三种方法的执行时间跟像素数目的变化关系。

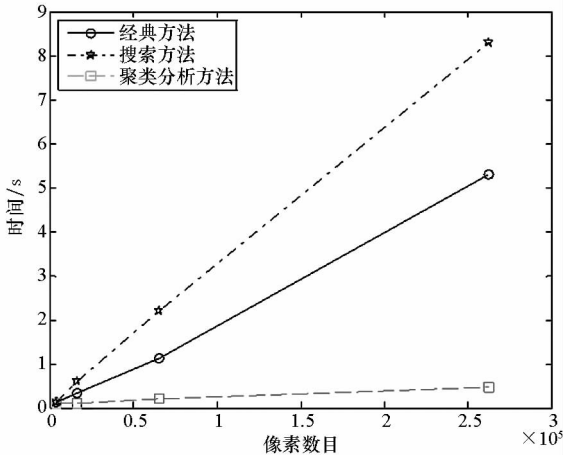


图 7 三种算法耗时

Fig. 7 Time consuming of three algorithms

从图 7 中可知,三种方法的执行时间跟像素数目是成正比的。通过三种方法的执行时间结果对比可知,聚类分析方法耗时最优,其执行时间随着图像尺寸增大而缓慢增加,相对而言,经典方法和搜索方法执行时间随着图像尺寸增大而快速增加。造成上述结果的主要原因是聚类分析方法是 以像素类为单位进行解缠绕的,受图像尺寸的影响相对较小,而经典方法和搜索方法都是以单个像素为单位进行相位解缠绕的,因而随着图像尺寸增大,算法的执行时间明显增加。另外,搜索方法的耗时要比经典方法的耗时长,其主要原因是搜索方法需要搜索模糊数,每一个像素都需要进行式(8)这样的二维搜索,尽管文献[19-20]已经将式(8)这样的二维搜索过程简化成了一维搜索,但算法的计算复杂度在搜索次数较大的情况下仍然比较高,其耗时随着图像尺寸增大而急剧增大。

### 4 结论

将 SR-CRT 首次运用到多基线相位解缠中,重点分析和研究了其相位解缠绕原理和抗噪声性能,最后通过实验验证该方法的有效性,并与基于 C-CRT 的多基线相位解缠绕技术进行了对比分析,总结得出了以下四点重要结论:

1) 与基于 C-CRT 的相位解缠绕技术相比,基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术中,通过公因子这一可控因素的引入(公因子可控是指公因子可取任意正整数),可以基本消除剩余数对噪声相位的限制,从而提高算法的抗噪声性能。

2) 基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能明显优于基于 C-CRT 的相位解缠绕技术的抗噪声性能,而通过选择较大的公因子可进一步提高基于 SR-CRT 的相位解缠绕抗噪声性能。

3) 对于公因子  $C$  的取值,结合式(25)和式(26)可知,单从理论角度来说,公因子  $C$  取值越大(即正无穷大)越好,然而在实际过程中,公因子  $C$  取值可以根据式(26)中的第二个条件来确定,一般取满足条件的所有  $C$  取值中的较小值就可以使得基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术获得比较满意的抗噪声性能。

4) 基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术是以单个像素为单位进行相位解缠绕的,对于每一个像素,都需要通过搜索来求解模糊数,算法的复杂度和搜索的次数有关,当搜索次数较大的情况下,其算法耗时随着像素数目增大而急剧增加。

上述抗噪声性能分析和结论为基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术进一步在实际中的运用奠定了理论基础。后续研究将着重探讨对含有噪声的实测多基线干涉数据进行相位解缠绕以及进一步有效降低基于 SR-CRT 的相位解缠绕技术耗时的方法。

## 参考文献 (References)

- [1] Bamler R, Hartl P. Synthetic aperture radar interferometry[J]. Inverse Problems, 1998, 14(4): R1 - R54.
- [2] Rabus B, Eineder M, Roth A, et al. The shuttle radar topography mission (SRTM)—a new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2003, 57(4): 241 - 262.
- [3] 于瀚雯. 单/多基线相位解缠绕技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- [4] YU Hanwen. Study on single/multi-baseline phase unwrapping[D]. Xi'an: Xidian University, 2012. (in Chinese)
- [5] Ghiglia D C, Wahl D E. Interferometric synthetic aperture radar terrain elevation mapping from multiple observations [C]// Proceedings of IEEE 6th Digital Signal Processing Workshop, 1994: 33 - 36.
- [6] Thompson D G, Robertson A E, Arnold D V, et al. Multi-baseline interferometric SAR for iterative height estimation[C]// Proceedings of IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1999: 251 - 253.
- [7] Ferretti A, Prati C, Rocca F. Multibaseline InSAR DEM reconstruction: the wavelet approach[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 37(2): 705 - 715.
- [8] Fornaro G, Pauciuolo A, Sansosti E. Phase difference-based multichannel phase unwrapping [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(7): 960 - 972.
- [9] Fornaro G, Guarnieri A M, Pauciuolo A, et al. Maximum likelihood multi-baseline SAR interferometry [J]. IEEE Proceedings—Radar, Sonar and Navigation, 2006, 153(3): 279 - 288.
- [10] Ferraiuolo G, Pascazio V, Schirinzi G. Maximum a posteriori estimation of height profiles in InSAR imaging [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2004, 1(2): 66 - 70.
- [11] Ferraioli G, Shabou A, Tupin F, et al. Multichannel phase unwrapping with graph cuts [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 6(3): 562 - 566.
- [12] Xu W, Chang E, Kwok L, et al. Phase-unwrapping of SAR interferogram with multi-frequency or multi-baseline [C]// Proceedings of IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1994: 730 - 732.
- [13] 靳国旺, 张红敏, 徐青, 等. 多波段 InSAR 的 CRT 相位解缠方法[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2011, 38(6): 97 - 102.
- [14] JIN Guowang, ZHANG Hongmin, XU Qing, et al. Phase unwrapping algorithm with CRT for multi-band InSAR [J]. Journal of Xidian University (Natural Science), 2011, 38(6): 97 - 102. (in Chinese)
- [15] 李道京, 潘周浩, 乔明, 等. 机载毫米波三基线 InSAR 技术[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 34 - 50.
- [16] LI Daojing, PAN Zhouhao, QIAO Ming, et al. Airborne millimeter wave three baseline InSAR technology [M]. Beijing: Science Press, 2015: 34 - 50. (in Chinese)
- [17] Xia X G, Wang G Y. Phase unwrapping and a robust Chinese remainder theorem [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(4): 247 - 250.
- [18] Li G, Meng H D, Xia X G, et al. Range and velocity estimation of moving targets using multiple stepped-frequency pulse trains[J]. Sensors, 2008, 8(2): 1343 - 1350.
- [19] Li X W, Xia X G. Location and imaging of elevated moving target using multi-frequency velocity SAR with cross-track interferometry [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 1203 - 1212.
- [20] Li W C, Wang X Z, Wang X M, et al. Distance estimation using wrapped phase measurements in noise [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(7): 1676 - 1688.
- [21] Yang B, Wang W J, Yin Q Y, et al. Phase detection based range estimation with a dual-band robust Chinese remainder theorem[J]. Science China (Information Sciences), 2014, 57(2): 1 - 9.
- [22] Li G, Xu J, Peng Y N, et al. An efficient implementation of robust phase-unwrapping algorithm [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(6): 393 - 396.
- [23] Li X W, Xia X G. A fast robust Chinese remainder theorem based phase unwrapping algorithm [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 665 - 668.