

航天器近距离相对悬停被动安全特性分析*

李彬,张洪波,郑伟

(国防科技大学空天科学学院,湖南长沙 410073)

摘要:通过求解零初始速度下的无控相对运动距离最小值,分析了圆参考轨道下航天器近距离相对悬停的被动安全特性。航天器相对悬停的被动安全特性可描述为处于受控悬停状态的航天器在控制力消失后的相对运动轨迹与目标禁飞区之间的空交集状态,该问题可转换为求解零初始速度下的相对运动距离最小值。由于初始位置的不同,相对距离最小值点可能位于整数倍周期极小值或非整数倍周期极小值点,通过分析两种类型极小值点的存在条件以及极小值点为最小值点的分界条件得到临界被动安全悬停区域的计算方法。针对典型的相对悬停场景,仿真分析了平面圆和三维球形禁飞区约束下临界安全悬停区域,评估了模型误差和 J_2 摄动对悬停被动安全特性的影响。该分析方法可为具有被动安全特性的近距离悬停任务设计提供指导。

关键词:航天器;悬停;被动安全特性;禁飞区

中图分类号:V448 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2019)06-001-11

Passive safety analysis of close relative hovering for spacecraft

LI Bin, ZHANG Hongbo, ZHENG Wei

(College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The passive safety features for spacecraft in close relative hovering with respect to circular reference orbit were analyzed by solving the minimum relative distance during the free motion with zero initial velocity. The passive safety features of spacecraft relative hovering can be described as the state of empty intersection between the relative motion trajectory and the target's no-fly zone after the disappearance of the control force. This problem can be transformed into the problem of minimum relative distance with zero initial velocity. The minimum relative distance varies with the initial position, and may be located in the integer period minimum value or the non-integer period minimum value point. The existence conditions of two kinds of minimum value points were analyzed. Then the calculation method of critical passive safe hovering area was obtained by solving the boundary condition in two cases. For the typical relative hovering scenario, the critical safe hovering area under the constraint of plane circle and three-dimensional spherical no-fly zone was simulated and analyzed. The effects of model error and J_2 perturbation on hovering passive safety features were evaluated. This analysis method can provide consultation for hovering mission design with passive safety features.

Keywords: spacecraft; hovering; passive safety features; no-fly zone

随着航天技术的发展,航天任务多样性日益增加,其中航天器相对悬停是实现航天任务多样性的重要手段。航天器通过主动控制使得自身相对于目标的相对速度和加速度为零,从而使得相对位置保持不变,该种相对运动特性在接近观察、交会对接和在轨服务^[1]等应用上具有重要价值。

目前,国内外关于航天器相对悬停的研究主要集中在悬停特性分析和悬停控制^[2]两个方面。由于相对悬停需要施加主动控制力,目前关于航天器相对悬停特性的研究主要集中在悬停控制力分析和悬停燃耗分析两个方面。闫野^[3]和朱亚

文^[4]先后研究了圆参考轨道和椭圆参考轨道下任意方位悬停的控制力特性和燃料消耗特性,Dang等^[5]将上述研究进一步拓展到了考虑 J_2 摄动的情况。悬停控制可分为基于脉冲推力的近似悬停控制(雨滴悬停^[6-7])和有限区域悬停控制^[8]和基于连续推力的精确悬停控制^[9-12],鉴于本文研究内容属于悬停特性分析范畴,对悬停控制研究不再赘述。

近年来,航天器相对运动轨迹安全性研究主要集中在近距离交会对接领域,其主要思路为通过分析目标禁飞区与相对运动轨迹的相交性来判

* 收稿日期:2018-09-05

基金项目:国家自然科学基金委重大项目资助项目(61690210,61690213)

作者简介:李彬(1990—),男,重庆人,博士研究生,E-mail:libin13a@163.com;

张洪波(通信作者),男,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:zhanghb1304@nudt.edu.cn

断交会对接轨迹是否安全。在球形或长方形禁飞区约束下,朱仁璋等研究了交会平移段追踪器被动安全模式和主动安全模式设计方法^[13];在锥形禁飞区约束下,李海阳等分析了交会对接平移靠拢段的被动安全逼近速度^[14];在长方形禁飞区约束下,陈长青等研究了任意初始状态下近距离交会对接过程轨迹安全判断方法^[15];卢山等设计了发动机失效下的空间交会主动防撞机动控制策略^[16]。近距离悬停被动安全特性和交会对接中的被动安全特性类似,即在受控悬停阶段当燃料耗尽或者推力器失效时,在一定时间范围内追踪器的自然漂移轨迹位于禁飞区之外。轨迹的被动安全是碰撞避免的重要保证之一,因此在悬停任务设计阶段即可考虑被动安全约束,有助于提高航天器悬停任务的安全性。

本文以航天器相对悬停被动安全性为研究对象,给出了圆形和球形禁飞区约束下的相对悬停临界被动安全区域计算方法。该研究内容具有一定的工程意义,可以为设计具有被动安全特性的航天器悬停任务提供指导。

1 零初始速度相对运动特性分析

1.1 航天器相对运动模型

将相对悬停场景下的两航天器分别视为追踪器和目标器,其中追踪器具有主动控制能力,目标器处于无控状态。为描述追踪器相对于目标器的运动,定义目标器轨道坐标系 $O-xyz$,如图 1 所示,其坐标原点 O 位于目标器质心, x 轴与目标器的地心矢径重合, y 轴在轨道平面内垂直于 x 轴,指向运动方向为正, z 轴由右手法则确定。假设目标器运行于圆轨道,追踪器相对于目标器做近距离相对运动,则其相对运动可由 C-W 方程描述^[17]。假设 $\tau=0$ 时刻,追踪器处于受控相对悬停状态,此时相对于目标器的位置和速度分别为 $\boldsymbol{\rho}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, $\boldsymbol{v}_0 = [0, 0, 0]^T$;之后若悬停控制力消失,则追踪器将呈现初始速度为零的自然相对运动状态,可得零初始速度相对运动位置和速度参数方程

$$\begin{cases} x = x_0(4 - 3\cos\theta) \\ y = 6x_0(\sin\theta - \theta) + y_0 \\ z = z_0\cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3nx_0\sin\theta \\ \dot{y} = 6nx_0(\cos\theta - 1) \\ \dot{z} = -nz_0\sin\theta \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\theta = n\tau$ 表示目标器当前时刻与初始时刻的

相位角差, n 表示目标器的平均轨道角速度。

航天器相对悬停被动安全区域可定义为处于受控悬停状态的航天器在控制力消失后的相对运动轨迹与目标禁飞区无交集的悬停位置点集(图 1 所示的网格区域)。因此,航天器相对悬停的被动安全性问题可转化为零初始速度下的相对运动轨迹与目标禁飞区之间的交集问题,进一步转换为求解零初始速度下的相对运动轨迹距离最小值问题。本文通过分析零初始速度相对运动轨迹传播过程,导出相对距离的最小值条件,进一步求解相对距离最小值恰好位于禁飞区边界的悬停点集,这一系列悬停点集构成了具有被动安全性和不具有被动安全性的悬停区域分界面。

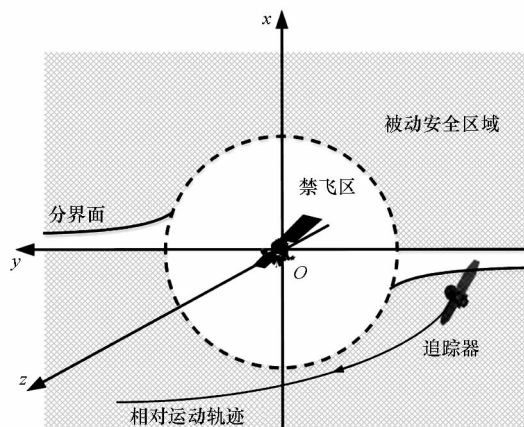


图 1 轨道坐标系和被动安全区域示意

Fig. 1 Diagram of orbital coordinate system and passive safety area

1.2 相对距离极小值初步分析

相对悬停被动安全特性体现为零初始速度下的相对运动轨迹与禁飞区之间的距离关系,因此分析轨迹传播过程中相对距离极小值点与禁飞区之间的关系是剖析悬停被动安全特性极为重要的一步,本小节将给出相对运动轨迹距离极小值点的计算方法。由式(1)可知,三维相对距离可表示为 $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$,左右两端对时间 τ 求导并令 $\dot{\rho} = 0$ 可得 $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$,可见当追踪器相对位置矢量和相对速度矢量垂直时,相对运动距离具有极小值。将式(1)和式(2)代入 $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$,整理可得

$$(27 - z_0^2/x_0^2)\sin\theta\cos\theta - 24\sin\theta + (6y_0/x_0 - 36\theta)(\cos\theta - 1) = 0 \quad (3)$$

从式(3)可以看出,相对运动距离达到极小值点时的相位角仅和 y_0, z_0 与 x_0 的比值有关。令 $k = y_0/x_0, d = z_0/x_0$,当给定 k 和 d 值,即可采用牛顿迭代法求解极小值点对应的相位角,记为 θ_c 。

由于任一过原点的直线上的点具有相同的 k 值,若固定 d 值,则它们对应的 θ_0 相同。同理, d 值也具有同样的特性。由于上述方程存在两个参数,其取值范围对方程解的影响均未知。为了降低问题分析难度,下面先令 $d=0$,仅分析 k 对极小值点的影响。此时有 $z_0=0$,即对应于二维场景下 xy 平面内悬停的被动安全特性。

2 二维悬停被动安全区域分析

2.1 轨道面内相对距离极小值计算

当 $d=0$ 时,式(3)可简化为

$$f_1(\theta) = 9\sin\theta\cos\theta - 8\sin\theta + (2k - 12\theta)(\cos\theta - 1) = 0 \quad (4)$$

当 $\theta = 2N\pi (N=0,1,2,\dots)$ 时 $f_1(\theta) = 0$,所以 $\theta = 2N\pi$ 是相对距离的极值点;此外由该点处的一阶导 $df_1(\theta)/d\theta|_{\theta=2N\pi} = 1 > 0$,进一步可知 $\theta = 2N\pi$ 为相对距离的极小值点。接下来探讨非整数倍周期时刻 ($\theta \neq 2N\pi$) 的相对距离的极小值点。式(4)两边同时除以 $1 - \cos\theta$,整理可得

$$f_2(\theta) = \cot(\theta/2) - 9\sin\theta + 12\theta - 2k = 0 \quad (5)$$

显然,非整数倍周期时刻的极小值点与 k 有关。为了便于分析极小值点的分布与 k 值的关系,首先分析第一个轨道周期范围内 (即 $\theta \in (0, 2\pi)$) 的极小值点分布情况,对于大于一个轨道周期的极小值点,可在该方法的基础上扩展得到。

在求解方程(5)之前,需要首先分析相对距离极小值点的存在性。求取 $f_2(\theta)$ 关于 θ 的一阶导,并令 $df_2(\theta)/d\theta = 0$,整理可得

$$9\cos^2\theta - 21\cos\theta + 11 = 0 \quad (6)$$

解得 $\cos\theta = (7 - \sqrt{5})/6$,在 $\theta \in (0, 2\pi)$ 区间内存在两个解,即 $\theta_{10} = \arccos[(7 - \sqrt{5})/6]$, $\theta_{20} = 2\pi - \theta_{10}$ 。 θ_{10} 和 θ_{20} 分别对应函数 $f_2(\theta)$ 的极小值点和极大值点。故在区间 $(0, 2\pi)$ 存在相对距离极小值的条件为 $f_2(\theta_{10}) < 0$ 且 $f_2(\theta_{20}) > 0$ 。将 θ_{10} 和 θ_{20} 代入式(5),可分别得到 $k_{10} = 2.6605$ 和 $k_{20} = 35.0386$ 。

图2给出了不同 k 值时函数 $f_2(\theta)$ 随 θ 的变化曲线。当满足 $k \in (k_{10}, k_{20})$ 时,方程 $f_2(\theta) = 0$ 在 $(\theta_{10}, \theta_{20})$ 区间存在实数解,且该解对应相对距离的极小值点。从图2中曲线的变化趋势还可以看出,当 $k \in (k_{10}, k_{20})$ 时,在 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 附近分别存在一个相对距离的极值点,但是这两个极值点均为相对距离极大值点,所以在后续分析过程中不予考虑。

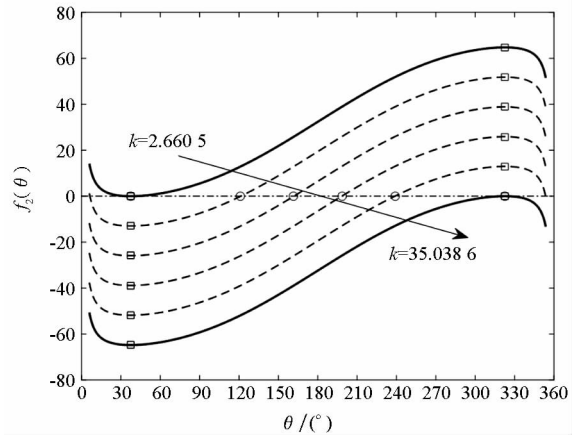


图2 函数 $f_2(\theta)$ 随 θ 的变化曲线

Fig. 2 Curves of $f_2(\theta)$ with θ

前述分析结果仅展示了第一个轨道周期内 (即 $\theta \in (0, 2\pi)$) 的相对距离极小值点分布情况,当分析的时间范围大于一个轨道周期时,其结果可在第一个轨道周期的基础上进行拓展得到。当考虑多个轨道周期时,方程(6)的解分布于区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi) (N=0,1,2,\dots)$,根据周期性可得

$$\theta_{iN} = 2N\pi + \theta_{i0} (i=1,2; N=0,1,2,\dots) \quad (7)$$

将上述 θ_{1N} 和 θ_{2N} 分别代入式(5)可以求得对应的 k 值,即

$$k_{iN} = 12N\pi + k_{i0} (i=1,2; N=0,1,2,\dots) \quad (8)$$

从式(7)和式(8)可以看出,当考虑多个轨道周期时,其极值点的分布特性与第一个轨道周期的分布特性一致,其相互关系可以通过平移得到。表1给出了前4个轨道周期存在相对距离极小值的 k 的取值范围。随着 k 值的增大,极小值点所在的轨道周期将会随之发生变化,比如若仅考虑第一个轨道周期 (即 $\theta \in (0, 2\pi)$) 的被动安全特性,当 $k \in (k_{10}, k_{20})$ 时存在非整数倍周期相对距离极小值点,在该区间之外仅存在整数倍周期相对距离极小值点,以此类推。

表1 不同 N 值时的 k_{1N} 和 k_{2N}

Tab. 1 k_{1N} and k_{2N} with different N

N	θ_0 所属区间	k_{1N}	k_{2N}
0	$(0, 2\pi)$	2.661	35.039
1	$(2\pi, 4\pi)$	40.360	72.738
2	$(4\pi, 6\pi)$	78.059	110.437
3	$(6\pi, 8\pi)$	115.758	148.136

2.2 轨道面内相对距离最小值计算

从前面的分析可以看出,随着 k 值的变化,零

初始速度相对运动距离的最小值可能在整数倍周期极小值点($\theta = 2N\pi$, $N=0, 1, 2, \dots$)和非整数倍周期极小值点($\theta = \theta_e$)取得, 据此, 本小节将分析相对运动距离最小值点随 k 值的变化情况。

由于最小值点可能在整数倍周期极小值点和非整数倍周期极小值点取得, 所以首先需要寻找最小值点在整数倍周期和非整数倍周期极小值点之间的切换条件。记 $\rho^2(\theta) = x^2(\theta) + y^2(\theta) + z^2(\theta)$, 由此可根据整数倍周期与非整数倍周期极小值点距离相等以及极值条件构造方程组

$$\begin{cases} \rho^2(\theta) = \rho^2(2N\pi) \\ 9\sin\theta - \cot(\theta/2) - 12\theta + 2k = 0 \end{cases} \quad (9)$$

将第二式代入第一式消去 k , 可得方程

$$[2\sin\theta - 2(\theta - 2N\pi)][\cot(\theta/2) - 3\sin\theta + 6(\theta - 2N\pi)] = (5 - 3\cos\theta)(\cos\theta - 1) \quad (10)$$

令 $\theta = \vartheta + 2N\pi$, 则式(10)可改写为

$$\begin{aligned} & [2\sin\vartheta - 2\vartheta][\cot(\vartheta/2) - 3\sin\vartheta + 6\vartheta] \\ & = (5 - 3\cos\vartheta)(\cos\vartheta - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)为非线性方程, 可以采用牛顿迭代法求解, 其解为 $\vartheta_0 = \pm 0.890 0$ rad, 因此可得 $\theta = 2N\pi \pm 0.890 0$ rad, 对应 $k = 12N\pi \pm 2.891 7$ 。所以当 $12N\pi + 2.891 7 \leq k \leq 12(N+1)\pi - 2.891 7$ 时, 区间 $[2N\pi, 2(N+1)\pi]$ 内的非整数倍周期极小值点为最小值点。当 $12N\pi - 2.891 7 \leq k \leq 12N\pi + 2.891 7$ 时, 整数倍周期极小值点 $\theta = 2N\pi$ 为最小值点。

图 3 给出了最小值点对应的相位角 θ_e 随 k 值的变化曲线。表 2 给出了前 4 个轨道周期的非整数倍周期极小值为最小值的 k 区间。对比非整数倍周期极小值点的存在条件, 可见非整数倍周期极小值为最小值时的 k 值范围为极小值点存在条件的子集。需要说明的是, 在二维悬停场景下, 如果初始状态在禁飞区之外, 则当 $k < 0$ 时始终具

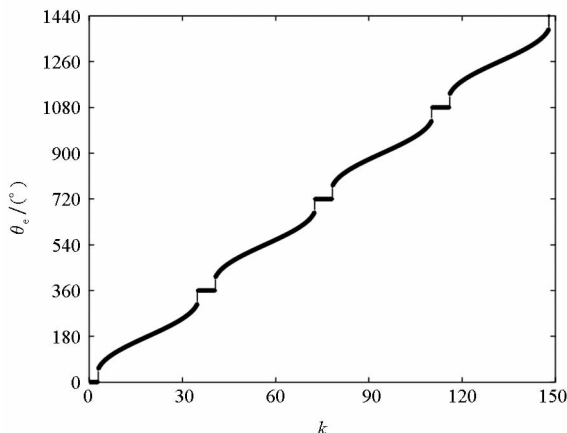


图 3 最小值点相位角随 k 值的变化曲线

Fig. 3 Curve of phase angle for minimum point with k

有被动安全性。

表 2 非整数倍周期极小值存在区间

Tab. 2 Existence interval for non-integer period minimum value

θ_e 所属区间	非整数倍周期极小值对应的 k 值区间	
	极小值为最小值区间	极小值存在区间
$(0, 2\pi)$	[2.892, 34.807]	(2.661, 35.039)
$(2\pi, 4\pi)$	[40.591, 72.507]	(40.360, 72.738)
$(4\pi, 6\pi)$	[78.290, 110.206]	(78.059, 110.437)
$(6\pi, 8\pi)$	[115.989, 147.905]	(115.758, 148.136)

2.3 轨道面内临界区域分析

2.3.1 非整数倍周期最小值临界区域分析

当给定 k 值($12N\pi + 2.891 7 \leq k \leq 12(N+1)\pi - 2.891 7$, $N=0, 1, 2, \dots$)时, 相对距离极小值在 θ_e 时取得, 此时可得追踪器相对于目标器的最小距离为

$$\begin{aligned} \rho_{\min} & = \rho(\theta_e) \\ & = |x_0| \sqrt{(4 - 3\cos\theta_e)^2 + (6\sin\theta_e - 6\theta_e + k)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

令 $K_1 = \sqrt{(4 - 3\cos\theta_e)^2 + (6\sin\theta_e - 6\theta_e + k)^2}$, 假设目标器禁飞区半径为 ρ_s , 则为实现被动安全悬停, 需要满足 $\rho_s \leq \rho_{\min} = K_1 |x_0|$ 。当给定 k 值($12N\pi + 2.891 7 \leq k \leq 12(N+1)\pi - 2.891 7$)时, 则

$$\begin{cases} |x_0| \geq x_{0\min} = \rho_s / K_1 \\ |y_{0\min} = kx_{0\min} = k\rho_s / K_1 \end{cases} \quad (13)$$

其中, $(x_{0\min}, y_{0\min})$ 为临界初始状态。

2.3.2 整数倍周期最小值临界区域分析

当给定 k 值($12N\pi - 2.891 7 \leq k \leq 12N\pi + 2.891 7$, $N=0, 1, 2, \dots$)时, 追踪器相对于目标器的最小距离为

$$\rho_{\min} = \rho(2N\pi) = |x_0| \sqrt{1 + (k - 12N\pi)^2} \geq \rho_s \quad (14)$$

令 $K_2 = \sqrt{1 + (k - 12N\pi)^2}$, 则为实现悬停的被动安全性, 需要满足

$$\begin{cases} |x_0| \geq x_{0\min} = \rho_s / K_2 \\ |y_{0\min} = kx_{0\min} = k\rho_s / K_2 \end{cases} \quad (15)$$

其中, $(x_{0\min}, y_{0\min})$ 为临界初始状态。

前面分析了 xy 平面内具有被动安全特性的悬停临界区域计算方法, 当航天器悬停位置位于被动安全区域时, 若悬停控制力消失, 在指定的一个或多个轨道周期内, 相对运动轨迹到目标器的距离均满足 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_s$ 。由于近圆轨道相

对运动在轨道面内和面外解耦的性质,在上述面内被动安全悬停区域确定的 x_0 和 y_0 前提下,对于 $z_0 \neq 0$ 的初始位置,有 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_s$,所以三维悬停同样具有被动安全特性。实际上,二维轨道面内的悬停被动安全性分析仅考虑了平面圆约束,拓展到三维悬停即是一个圆柱形禁飞区约束。对于相同的半径,球形禁飞区仅仅是圆柱形禁飞区的子集,这从几何上说明了二维悬停被动安全性分析结果同样适用于三维悬停的原因。三维悬停被动安全性分析可在二维分析的基础上进行,由此可以明确变量范围,降低问题求解难度。

3 三维悬停被动安全区域分析

3.1 三维相对距离最小值计算

在三维相对悬停场景中,追踪器在目标器轨道系中的 z 轴位置分量不再为 0,因此 $d \neq 0$ 。参照二维相对悬停场景下的求解思路,关于三维相对距离最小值的求解,需要确定整数倍周期最小值和非整数倍周期最小值时 k 和 d 值的取值范围,进而根据相对距离最小值和禁飞区约束得到具有被动安全特性的三维悬停区域。与二维悬停场景不同的是,由于增加了变量 d ,三维悬停的分析过程更为复杂,需要依赖更多的数值方法进行分析,下面给出具体分析过程。

根据式(3),相对距离极值条件可表示为

$$g_1(\theta) = (27 - d^2) \sin\theta \cos\theta - 24 \sin\theta + (6k - 36\theta)(\cos\theta - 1) = 0 \quad (16)$$

当 $\theta = 2N\pi$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) 时,对于任意的 k 和 d 值有 $g_1(\theta) = 0$,可见 $\theta = 2N\pi$ 为相对距离的极值点;又由于 $dg_1(\theta)/d\theta|_{\theta=2N\pi} = 3 - d^2$,所以当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时, $\theta = 2N\pi$ 为相对距离极小值点;当 $d > \sqrt{3}$ 时, $\theta = 2N\pi$ 为相对距离极大值点。

下面分析其他极小值点的分布情况。对式(16)左右两边同时除以 $3(1 - \cos\theta)$,整理可得

$$g_2(\theta) = \cot(\theta/2) [1 - (d^2/3)\cos\theta] - 9\sin\theta + 12\theta - 2k = 0 \quad (17)$$

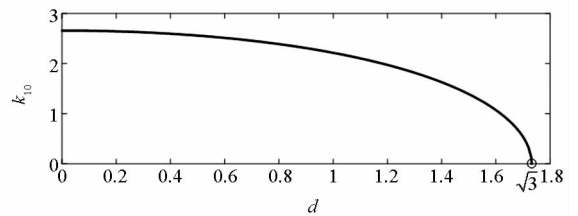
对于式(17),当给定 (k, d) 值即可迭代求解得到 $g_2(\theta)$ 的零点。为了保证迭代过程顺利,需要分析 $g_2(\theta)$ 零点的存在条件,即确定相对距离极小值存在时 k 和 d 的范围。在分析过程中需要用到 $g_2(\theta)$ 对 θ 的一阶导,其表达式为

$$[dg_2(\theta)]/(d\theta) = (1/2)\cot^2(\theta/2)(d^2 \cos\theta/3 - 1) + \cos\theta(d^2/2 - 9) + d^2/3 + 23/2 = 0 \quad (18)$$

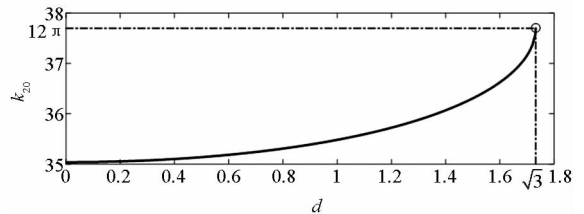
下面根据 d 的范围进行分段讨论。

1) 当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时, $g_2(\theta \rightarrow 0^+) \rightarrow +\infty$, $g_2(\theta \rightarrow 2\pi^-) \rightarrow -\infty$,所以 $g_2(\theta)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 至少存在一个零点。又由于 $dg_2(\theta)/d\theta|_{\theta=0, 2\pi} < 0$, $dg_2(\theta)/d\theta|_{\theta=\pi} = 41/2 - d^2/6 > 0$,此时在 $(0, 2\pi)$ 区间 $g_2(\theta)$ 存在两个极值点 θ_{10} 和 $\theta_{20} = 2\pi - \theta_{10}$ ($\theta_{10} < \theta_{20}$),其中 θ_{10} 和 θ_{20} 分别为 $g_2(\theta)$ 的极小值点和极大值点。所以相对距离极小值点的存在条件为 $g_2(\theta_{10}) < 0$, $g_2(\theta_{20}) > 0$,其对应的 k 区间为 (k_{10}, k_{20}) ,并且 $k_{20} = 12\pi - k_{10}$ 。

一般地,在区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi)$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) 存在非整数倍周期时刻相对距离极小值点的条件为 $g_2(\theta_{1N}) < 0$, $g_2(\theta_{2N}) > 0$,其中 $\theta_{1N} = 2N\pi + \theta_{10}$, $\theta_{2N} = 2N\pi + \theta_{20}$ (或表述为 $\theta_{2N} = 2(N+1)\pi - \theta_{10}$),此时对应的 k 区间为 (k_{1N}, k_{2N}) ,其中 $k_{1N} = 12N\pi + k_{10}$, $k_{2N} = 12N\pi + k_{20}$ (或表述为 $k_{2N} = 12(N+1)\pi - k_{10}$)。图4给出了 k_{10} 和 k_{20} 随 d 的变化曲线,随着 d 的增大, k_{10} 逐渐减小, k_{20} 逐渐增大,其和始终为 12π 。



(a) k_{10}



(b) k_{20}

图4 k_{10} 和 k_{20} 变化曲线 ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

Fig. 4 Curves of k_{10} and k_{20} with $0 \leq d < \sqrt{3}$

2) 当 $d = \sqrt{3}$ 时, $g_2(\theta)$ 可简化为 $g_2(\theta) = 12\theta - 8\sin\theta - 2k$,并且 $dg_2(\theta)/d\theta = 12 - 8\cos\theta > 0$ 恒成立,所以函数 $g_2(\theta)$ 为增函数,此时 $g_2(0) = -2k$, $g_2(2\pi) = 24\pi - 2k$ 。

① 当 $0 \leq k < 12\pi$ 时, $g_2(0) \leq 0$, $g_2(2\pi) \geq 0$,此时函数 $g_2(\theta)$ 仅在区间 $[0, 2\pi]$ 存在一个零点 θ_{00} ,该零点与 k 值有关,且为相对距离极小值点;

② 一般地,当 $12N\pi \leq k < 12(N+1)\pi$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) 时,由于 $g_2(2N\pi) = 24N\pi - 2k \leq 0$, $g_2(2(N+1)\pi) = 24(N+1)\pi - 2k \geq 0$,所以函数

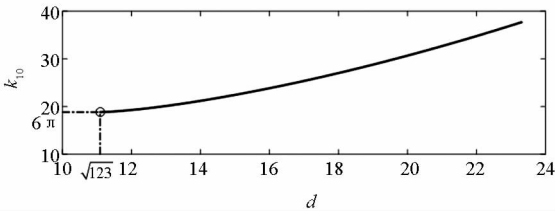
$g_2(\theta)$ 仅在区间 $[2N\pi, 2(N+1)\pi]$ 存在一个零点 θ_{eN} , 该零点与 k 值有关, 且为相对距离极小值点;

③ 记 $k_e \in [0, 12\pi]$ 时的零点为 θ_{e0} , 则 $k = 12N\pi + k_e$ 的零点为 $2N\pi + \theta_{e0}$.

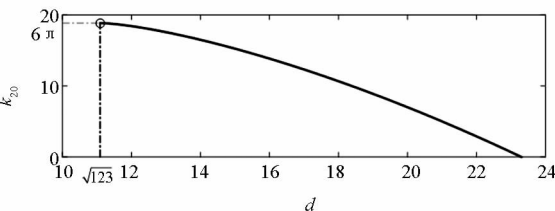
3) 当 $d > \sqrt{3}$ 时, 此时有 $g_2(\theta \rightarrow 0^+) \rightarrow -\infty$, $g_2(\theta \rightarrow 2\pi^-) \rightarrow \infty$, 所以函数 $g_2(\theta)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 至少存在一个零点。

① 当 $\sqrt{3} < d \leq \sqrt{123}$ 时, 此时 $dg_2(\theta)/d\theta \geq 0$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 恒成立, 所以 $g_2(\theta)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 单调递增, 因此存在一个零点 θ_{e0} , 该点为相对距离极小值点。同理可得, $g_2(\theta)$ 在区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi)$ ($N=0, 1, 2, \dots$) 存在一个零点 θ_{eN} , 且为相对距离极小值点。一般地, 若 $k_e \in [0, 12\pi]$ 时的零点为 θ_{e0} , 则 $k = 12N\pi + k_e$ 的零点为 $2N\pi + \theta_{e0}$ 。

② 当 $d > \sqrt{123}$ 时, $dg_2(\theta)/d\theta|_{\theta=0, 2\pi} > 0$, $dg_2(\theta)/d\theta|_{\theta=\pi} = 41/2 - d^2/6 < 0$, 此时在 $(0, 2\pi)$ 区间 $g_2(\theta)$ 存在两个极值点 θ_{10} 和 $\theta_{20} = 2\pi - \theta_{10}$ ($\theta_{10} < \pi < \theta_{20}$), 其中 θ_{10} 和 θ_{20} 分别为 $g_2(\theta)$ 的极大值点和极小值点, 代入 $g_2(\theta) = 0$ 得到对应的 k_{10} 和 $k_{20} = 12\pi - k_{10}$ 。当 $k_{20} < k < k_{10}$ 时, 有 $g_2(\theta_{10}) > 0, g_2(\theta_{20}) < 0$ 时, 此时在 $(0, 2\pi)$ 区间存在两个相对距离极小值点。一般地, 当 $12N\pi + k_{20} < k < 12N\pi + k_{10}$ ($N=0, 1, 2, \dots$) 时, 在区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi)$ 存在两个相对距离极小值点; 当 $12N\pi \leq k \leq 12N\pi + k_{20}$ 或 $12N\pi + k_{10} \leq k \leq 12(N+1)\pi$ 时, 仅在区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi)$ 存在一个相对距离极小值点。图 5 给出了 k_{10} 和 k_{20} 的变化曲线。随着 d 的增大, k_{10} 递增, k_{20} 递减; 当 $d = 23.3040$ 时, k_{20} 过零点。



(a) k_{10}



(b) k_{20}

图 5 k_{10} 和 k_{20} 的变化曲线 ($d > \sqrt{123}$)

Fig. 5 Curves of k_{10} and k_{20} with $d > \sqrt{123}$

前述分析得到了不同 k 和 d 值下相对距离极小值点的存在条件, 由于在多个轨道周期内存在多个相对距离极小值点, 还需要进一步分析所有极小值点中的最小值点随 k 和 d 的变化。根据前述极小值点存在特性, 可根据 d 的取值范围进行分段讨论。

1) 当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时, 此时存在整数倍周期极小值和非整数倍周期极小值两种情形, 可参考二维面内悬停被动安全特性分析方法, 寻找整数倍周期极小值和非整数倍周期极小值相等时刻的 k 值分界点。因此, 可构建方程组

$$\begin{cases} \rho^2(\theta') = \rho^2(2N\pi) \\ \cot \frac{\theta'}{2} \left(1 - \frac{d^2}{3} \cos \theta' \right) - 9 \sin \theta' + 12\theta' - 2k = 0 \end{cases} \quad (19)$$

将第二式代入第一式消去 k , 可得方程

$$\begin{aligned} & (3 - 3\cos\theta')(5 - 3\cos\theta') - d^2(1 - \cos^2\theta') \\ &= -[6\sin\theta' - 6(\theta' - 2N\pi)] \left[\cot \frac{\theta'}{2} \left(1 - \frac{d^2}{3} \cos\theta' \right) - 3\sin\theta' + 6(\theta' - 2N\pi) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } \theta' = \vartheta' + 2N\pi, \text{ 则式 (20) 可改写为} \\ & (3 - 3\cos\vartheta')(5 - 3\cos\vartheta') - d^2(1 - \cos^2\vartheta') \\ &= -[6\sin\vartheta' - 6\vartheta'] \left[\cot \frac{\vartheta'}{2} \left(1 - \frac{d^2}{3} \cos\vartheta' \right) - 3\sin\vartheta' + 6\vartheta' \right] \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)为非线性方程, 对于给定的 d 值, 可以采用牛顿迭代法进行求解。记方程组(19)的解为 $(k_0(d), \vartheta'_0(d))$ 和 $(12\pi - k_0(d), 2\pi - \vartheta'_0(d))$, 其中 $\vartheta'_0(d) \in [0, \pi]$, 因此可得 $\theta'_{1N}(d) = 2N\pi + \vartheta'_0(d), \theta'_{2N}(d) = 2(N+1)\pi - \vartheta'_0(d)$, 与之对应的 $k'_{1N}(d) = 12N\pi + k_0(d), k'_{2N}(d) = 12(N+1)\pi - k_0(d), N=0, 1, 2, \dots$ 。所以当 $12N\pi + k_0(d) \leq k(d) \leq 12(N+1)\pi - k_0(d)$ 时, 区间 $(2N\pi, 2(N+1)\pi)$ 内的非整数倍周期极小值点为最小值点。

图 6 给出了 k_{10} 和 k_0 的对比曲线, 可见 $k_{10}(d) < k_0(d)$, 因此非整数倍周期极小值为最小值时的 k 值范围为非整数倍周期极小值存在条件的子集。当 $12N\pi - k_0(d) \leq k(d) \leq 12N\pi + k_0(d)$ 时, 整数倍周期极小值点 $\theta' = 2N\pi$ 为最小值点。

2) 当 $d \geq \sqrt{3}$ 时, 在每个区间 $[2N\pi, 2(N+1)\pi]$ 内均存在非整数倍周期极小值点, 此时:

① 当 $\sqrt{3} \leq d \leq \sqrt{123}$ 时, 若 $12N\pi \leq k \leq (12N+6)\pi$, 在区间 $[2N\pi, (2N+1)\pi]$ ($N=0, 1, 2, \dots$) 内的极小值点为相对距离最小值点; 若 $(12N+6)\pi \leq$

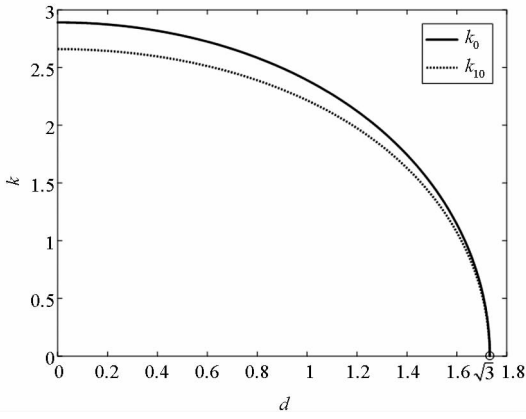


图6 k_{10} 和 k_0 的对比曲线 ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

Fig. 6 Contrast curves between k_{10} and k_0 with $0 \leq d < \sqrt{3}$

$k \leq 12(N+1)\pi$, 区间 $[(2N+1)\pi, 2(N+1)\pi]$ 内的极小值点为相对距离最小值点。

②当 $d > \sqrt{123}$ 时,若 $12N\pi \leq k \leq (12N+6)\pi$,则在区间 $[2N\pi, (2N+1)\pi]$ ($N=0,1,2,\dots$) 内的极小值点为相对距离最小值点;若 $(12N+6)\pi \leq k \leq 12(N+1)\pi$,区间 $[(2N+1)\pi, 2(N+1)\pi]$ 内的极小值点为相对距离最小值点。

3.2 三维临界安全悬停区域计算

上一小节得到了三维零初始速度下相对运动距离最小值的分布情况,本小节进一步结合球形禁飞区约束计算具有被动安全性的三维悬停区域。

1)非整数倍周期最小值临界区域分析:对于非整数倍周期极小值为最小值的情形,假设相对距离最小值在 θ_e 取得,其相对运动轨迹距离最小值必须满足

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= \rho(\theta_e) \\ &= |x_0| \sqrt{(4-3\cos\theta_e)^2 + [6(\sin\theta_e - \theta_e) + k]^2 + (d\cos\theta_e)^2} \\ &\triangleq |x_0| K_3 \geq \rho_s \end{aligned} \quad (22)$$

2)整数倍周期最小值临界区域分析:当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时,存在整数倍周期极小值。若此时的整数倍周期极小值为最小值,即 $\theta = 2N\pi$ ($N=0,1,2,\dots$),则相对运动轨迹距离最小值必须满足

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= \rho(2N\pi) \\ &= |x_0| \sqrt{1 + (k - 12N\pi)^2 + d^2} \\ &\triangleq |x_0| K_4 \geq \rho_s \end{aligned} \quad (23)$$

综上,具有悬停被动安全性的三维区域为

$$\begin{cases} |x_0| \geq x_{0\min} = \rho_s / K_i(k, d), i = 3, 4 \\ y_{0\min} = kx_{0\min} \\ z_{0\min} = dx_{0\min} \end{cases} \quad (24)$$

其中, $(x_{0\min}, y_{0\min}, z_{0\min})$ 为临界初始状态。

4 仿真分析

4.1 二维悬停被动安全区域仿真

设目标航天器的半长轴为 $a = 7158.140 \text{ km}$, 偏心率为 $e = 0$,禁飞区半径 ρ_s 设置为单位1。对于二维悬停场景(即 $d = 0$),图7给出了当 $0 \leq k \leq 24\pi$ 时的临界安全区域系数 K_1 和 K_2 (图中统称为 K) 随 k 值的变化曲线,该曲线随着 k 的增大呈现周期性的变化,其周期为 $T_k = 12\pi$;并且每一个周期内的曲线呈现为轴对称形式,其对称轴为 $k = (12N+6)\pi$ ($N=1,2,\dots$)。由式(13)和式(15)可知, K_1 和 K_2 的周期性变化使得临界安全区域分量 $x_{0\min}$ 呈现周期性的变化,其变化周期与 K 相同,如图8所示,并且 $x_{0\min}$ 的变化范围始终小于等于禁飞区半径。由于临界安全区域分量 $y_{0\min}$ 具有线性系数 k ,所以随着 k 的增大, $y_{0\min}$ 波浪式地不断增大,如图9所示。

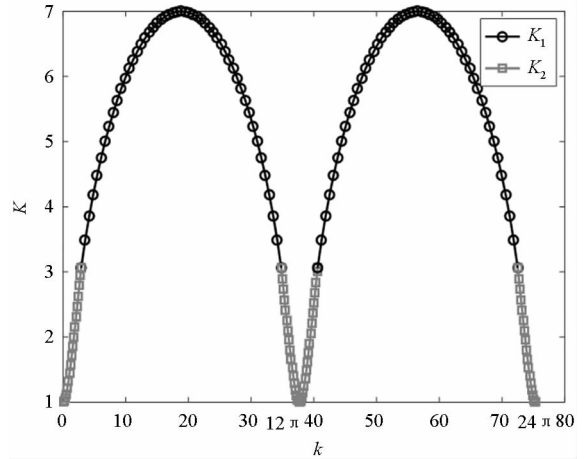


图7 K_1 和 K_2 随 k 值的变化曲线

Fig. 7 Curves of K_1 and K_2 with k

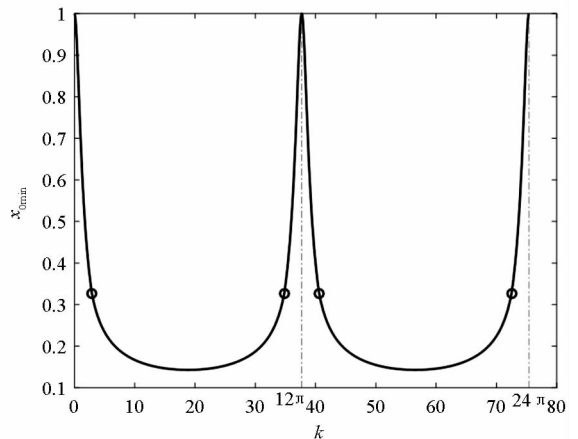


图8 $x_{0\min}$ 随 k 值的变化曲线

Fig. 8 Curve of $x_{0\min}$ with k

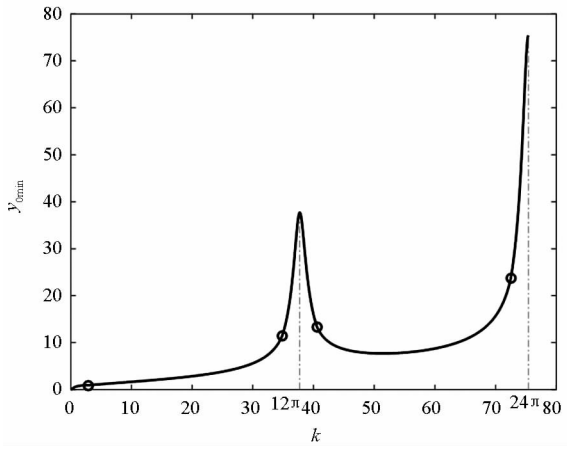


图 9 y_{0min} 随 k 值的变化曲线

Fig. 9 Curve of y_{0min} with k

4.2 三维悬停被动安全区域仿真

三维悬停场景存在两个变化参数 k 和 d , 并且随着 k 和 d 的取值范围的不同其相对距离最小值存在形式和计算方法也将发生变化, 所以本小节的仿真分析将根据 k 和 d 的取值范围进行分段仿真。

当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时, 图 10 展示了当 $0 \leq k \leq 24\pi$ 时的临界安全区域系数 K_3 和 K_4 (图中统称为 K) 随 k 和 d 值的变化图, 与二维悬停场景相似, 该曲面随着 k 的增大呈现周期性的变化, 其周期为 $T_k = 12\pi$; 并且每一个周期内的曲面呈现为镜面对称形式, 其对称面为 $k = (12N + 6)\pi, N = 0, 1, 2, \dots$ 。对于 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时的三维悬停被动安全特性与二维悬停场景具有相似之处, 这是因为它们均存在整数倍周期最小值和非整数倍周期最小值两种形式, 图 10 中带“o”的曲线即为整数倍周期最小值和非整数倍周期最小值的 k 值分界线。图 11 给出了 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时的临界安全区域分量随 k 和 d 的变化情况, 从图中可以看出, 对于给定的

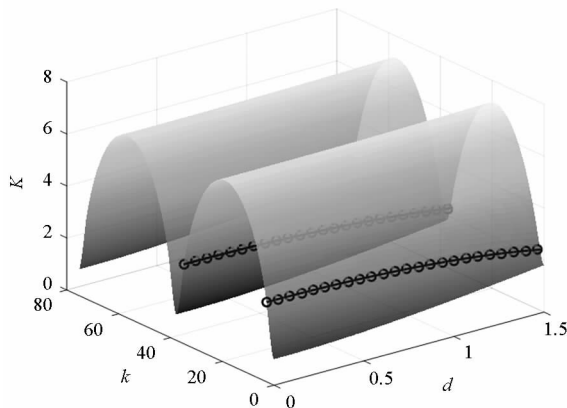
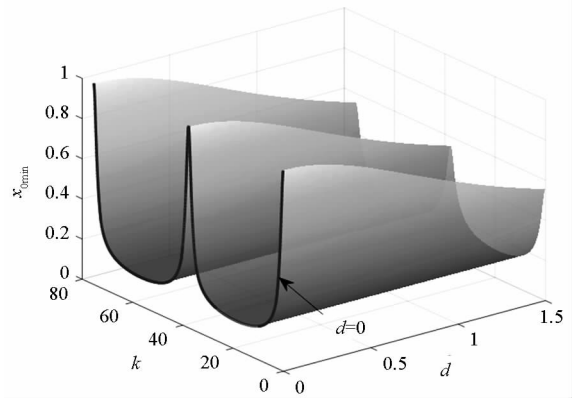


图 10 K 随 d 和 k 的变化图 ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

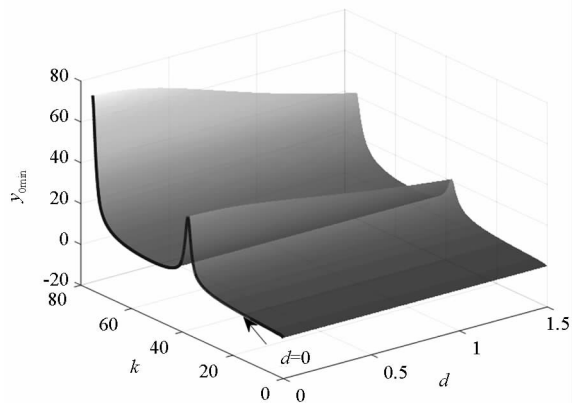
Fig. 10 Diagram of K with k and d ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

d 值确定的 $k - x_{0min}$ 和 $k - y_{0min}$ 截面, 其变化趋势与二维悬停场景一致。随着 d 的增大, 使得 z 向分量增大, x_{0min} 的最大值减小。



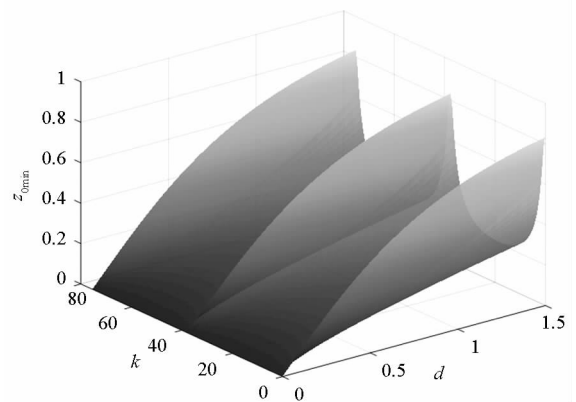
(a) x_{0min} 随 k 和 d 的变化图

(a) Diagram of x_{0min} with k and d



(b) y_{0min} 随 k 和 d 的变化图

(b) Diagram of y_{0min} with k and d



(c) z_{0min} 随 k 和 d 的变化图

(c) Diagram of z_{0min} with k and d

图 11 临界安全区域分量随 k 和 d 的变化图 ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

Fig. 11 Diagram of critical safety area components with k and d ($0 \leq d < \sqrt{3}$)

当 $d \geq \sqrt{3}$ 时, 此时仅存在非整数倍周期极小值点, 因此相对运动最小值点只可能非整数倍周期极小值点取得。特别地, 当 $\sqrt{3} \leq d \leq \sqrt{123}$ 时

每个相对运动周期仅存在一个极小值点,但是当 $d > \sqrt{123}$ 时每个相对运动周期可能存在两个极小值点。图 12 展示了当 $0 \leq k \leq 24\pi$ 时的临界安全区域系数 K_3 (图中记为 K) 随 k 和 d 值的变化图,其中虚线表示 $d = \sqrt{123}$ 的截线,带“o”的曲线表示 $d > \sqrt{123}$ 时存在两个极小值的 k 值区间。该曲面随着 k 的增大仍然呈现周期性的变化,其周期为 $T_k = 12\pi$; 并且每一个周期内的曲面呈现为镜面对称形式,其对称面为 $k = (12N + 6)\pi, N = 0, 1, 2, \dots$ 。

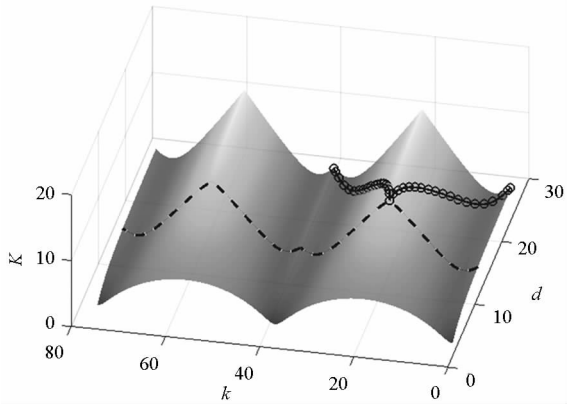


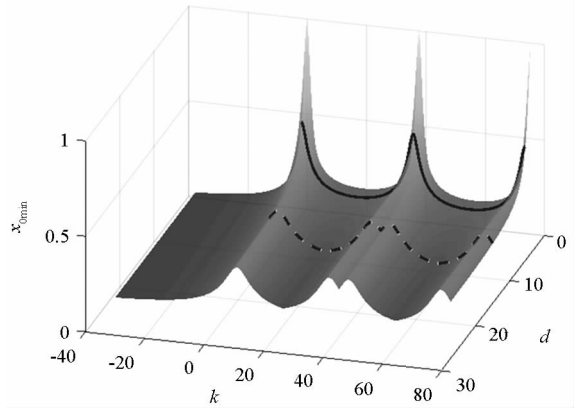
图 12 K 随 k 和 d 的变化图 ($d \geq \sqrt{3}$)
Fig. 12 Diagram of K with k and d ($d \geq \sqrt{3}$)

图 13 给出了 $d \geq 0$ 时的临界安全区域分量随 k 和 d 的变化情况,图中实线表示 $d = \sqrt{3}$ 的截线,虚线表示 $d = \sqrt{123}$ 的截线。从图中可以看出,对于给定的 d 值,在 $k > 0$ 区域随着 k 的增大,截面 $k - x_{0min}$ 和 $k - y_{0min}$ 呈现周期性变化。但是 $k < 0$ 时的变化不再具有周期性,这是因为当 $k < 0$ 时,最小值点始终位于第一个轨道周期,并且靠近初始点。

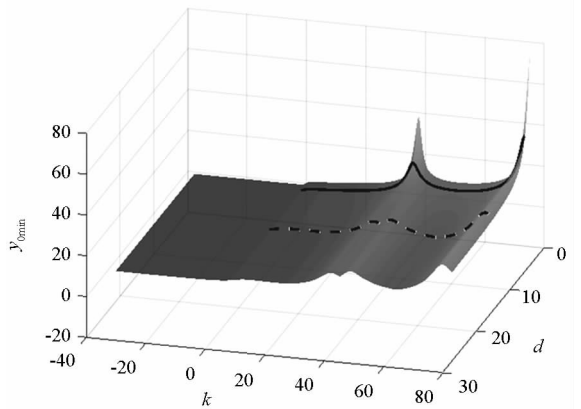
4.3 模型误差和 J_2 摄动对被动安全性的影响分析

由于航天器相对悬停被动安全区域是基于线性化的相对运动方程推导的,对于理想条件下具有被动安全特性的悬停位置,在模型误差和 J_2 摄动的影响下其零初始速度相对运动轨迹仍可能进入禁飞区,因此需要对模型误差和 J_2 摄动影响下的零初始速度相对运动轨迹安全特性进行分析评估。

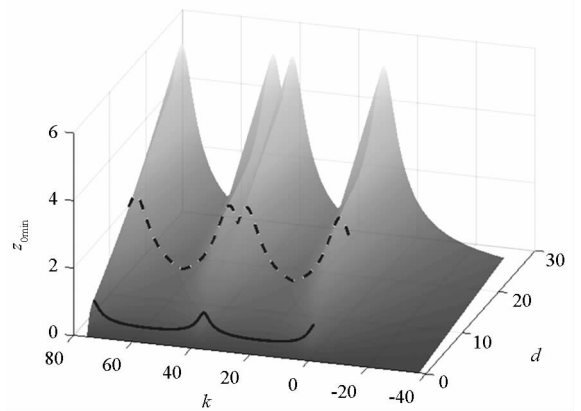
由于轨迹误差与轨迹传播时间(或相对运动相位角)有关,所以这里首先给出了不同 k 和 d 时相对距离最小值点相位角 θ_e 的变化关系图,如图 14 所示。图中的虚线表示 $k = 0$ 时的截线,实线分别表示 $k > 0$ 时 $d = \sqrt{3}$ 和 $d = \sqrt{123}$ 的分界线。从图中可以看出,当 k 和 d 值相对较小时,相对距



(a) x_{0min} 随 k 和 d 的变化图
(a) Diagram of x_{0min} with k and d



(b) y_{0min} 随 k 和 d 的变化图
(b) Diagram of y_{0min} with k and d



(c) z_{0min} 随 k 和 d 的变化图
(c) Diagram of z_{0min} with k and d

图 13 临界安全区域分量随 k 和 d 的变化图 ($d \geq 0$)
Fig. 13 Diagram of critical safety area components with k and d ($d \geq 0$)

离最小值点位于初始点附近;而对于较大的 k 和 d 值,相对距离最小值点相位角 θ_e 远离初始位置。

下面分析模型误差和 J_2 摄动影响下相对距离最小值与禁飞区的关系,这里的仿真条件与前

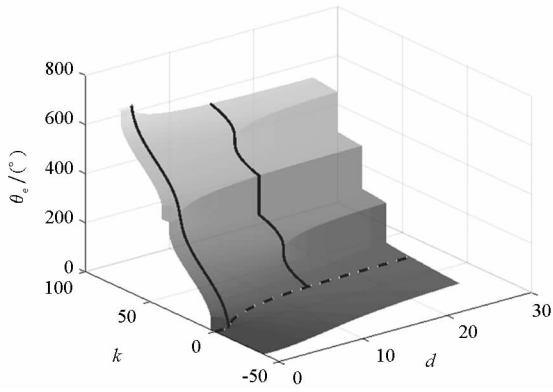
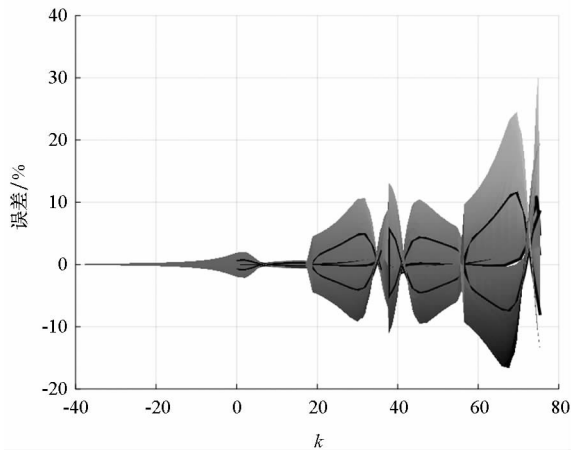


图 14 θ_e 随 k 和 d 的变化图

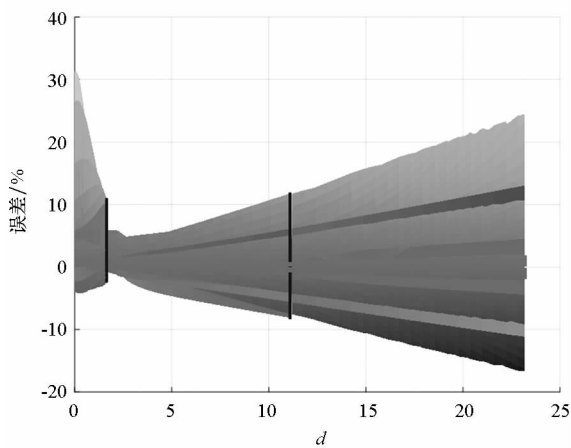
Fig. 14 Diagram of θ_e with k and d

述仿真相同,取禁飞区半径为 20 m, $-12\pi \leq k \leq 24\pi, 0 \leq d \leq 23$ 。该仿真以悬停临界被动安全区域上点为初始点进行轨迹传播,并计算相对运动距离最小值与禁飞区半径之间的差值。图 15 给出了不同 k 和 d 下的误差关系,误差为正表明相



(a) 误差随 k 的变化图

(a) Diagram of error varying with k



(b) 误差随 d 的变化图

(b) Diagram of error varying with d

图 15 相对距离最小值相对于禁飞区半径误差变化图

Fig. 15 Diagram of error between least value of relative distance and radius of no-fly zone

对运动距离最小值点在禁飞区之外,误差为负表明相对运动轨迹进入了禁飞区。可见当 $k < 18$ 时,对于上述 d 值范围,相对运动轨迹违反禁飞区约束比例小于禁飞区半径的 2%,误差最大值在 $d = 23$ 时取得,随着 d 的进一步增大,从而误差也将进一步增大。当 $k > 18$ 时,较大的 k 值使得最小值点相位角进一步增大,从而使得轨迹偏差增大,进而使得临界安全区域的被动安全性变差。在实际任务设计中,考虑摄动及不确定因素的影响,可通过设计禁飞区半径余量来保证相对运动轨迹的安全性。在悬停被动安全区域中,随着航天器悬停点远离临界被动安全区域,其安全性会逐渐增加。

5 结论

本文研究了圆参考轨道下航天器近距离相对悬停的被动安全特性。根据航天器相对悬停的特点,将相对悬停被动安全特性分析问题转换为零初始速度下的相对运动距离最小值计算问题,进而得到临界安全悬停区域。仿真分析结果表明,相对悬停的被动安全临界区域与悬停方位(k 和 d)有关,主要表现为:随着 k 和 d 值的变化,相对距离最小值点的相位角发生变化。当 $k < 0$ 时,相对距离最小值点相位角始终位于第一个轨道周期;当 $k \geq 0$ 时,随着 k 的增加,相对距离最小值点相位角呈现周期性变化。 d 值变化对整数倍周期极小值点的存在性产生了影响,仅当 $0 \leq d < \sqrt{3}$ 时存在整数倍周期极小值点。当考虑模型误差和 J_2 摄动影响时,被动安全特性会随着最小值点的相位角的增大而变差,因此在悬停任务设计时,考虑禁飞区安全余量十分重要。该研究内容可为具有被动安全特性的悬停任务设计提供参考。

参考文献 (References)

[1] Flores-Abad A, Ma O, Pham K, et al. A review of space robotics technologies for on-orbit servicing [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2014, 68(8): 1-26.

[2] Huang X, Yan Y, Zhou Y. Nonlinear control of underactuated spacecraft hovering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(3): 684-693.

[3] 闫野. 卫星相对空间目标任意位置悬停的方法研究 [J]. 中国空间科学技术, 2009, 29(1): 1-5. YAN Ye. Study of hovering method at any selected position to space target [J]. Chinese Space Science and Technology, 2009, 29(1): 1-5. (in Chinese)

[4] 朱亚文, 闫野. 椭圆轨道卫星空间任意位置悬停的方法 [J]. 中国空间科学技术, 2010, 30(6): 17-23. ZHU Yawen, YAN Ye. Hovering method at any selected position over space target on elliptical orbit [J]. Chinese

- Space Science and Technology, 2010, 30(6): 17-23. (in Chinese)
- [5] Dang Z H, Wang Z K, Zhang Y L. Modeling and analysis of relative hovering control for spacecraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(4): 1091-1102.
- [6] Rao Y L, Yin J F, Han C. Hovering formation design and control based on relative orbit elements [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(2): 360-371.
- [7] Bo C, Yuan J P, Ma W H, et al. Impulsive relative hovering of space plane and trajectory safety analysis [C]. 21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference, 2017.
- [8] Irvin D J, Cobb R G, Lovell T A. Fuel-optimal maneuvers for constrained relative satellite orbits [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(3): 960-973.
- [9] 宋旭民, 范丽, 陈勇, 等. 相对空间目标任意位置悬停闭环控制方法研究 [J]. 中国空间科学技术, 2010, 30(1): 41-45.
SONG Xumin, FAN Li, CHEN Yong, et al. Study of close-loop hovering method at any selected position to space target [J]. Chinese Space Science and Technology, 2010, 30(1): 41-45. (in Chinese)
- [10] Wang G B, Zheng W, Meng Y H, et al. Research on hovering control scheme to non-circular orbit [J]. Science China: Technological Sciences, 2011, 54(11): 2974-2980.
- [11] Huang X, Yan Y, Zhou Y, et al. Sliding mode control for Lorentz-augmented spacecraft hovering around elliptic orbits [J]. Acta Astronautica, 2014, 103: 257-268.
- [12] 孙延超, 赵文锐, 李传江, 等. 固定时间稳定航天器相对轨道悬停控制 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(4): 26-31.
SUN Yanchao, ZHAO Wenrui, LI Chuanjiang, et al. Hovering control for spacecraft in relative orbit based on fixed-time stabilization theory [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2016, 48(4): 26-31. (in Chinese)
- [13] 朱仁璋, 汤溢, 尹艳. 空间交会最终平移轨迹安全模式设计 [J]. 宇航学报, 2004, 25(4): 443-448.
ZHU Renzhang, TANG Yi, YIN Yan. Safety mode design of final translation trajectories of space rendezvous [J]. Journal of Astronautics, 2004, 25(4): 443-448. (in Chinese)
- [14] 李海阳, 王华, 黄海兵, 等. 锥形禁区约束下空间交会的被动安全逼近速度分析 [J]. 宇航学报, 2009, 30(2): 659-662.
LI Haiyang, WANG Hua, HUANG Haibing, et al. Analysis of passive safe approach velocity in rendezvous subject to conic forbidden zone constraint [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(2): 659-662. (in Chinese)
- [15] 陈长青, 解永春. 交会对接自由漂移轨迹安全性判断研究 [J]. 空间控制技术与应用, 2011, 37(6): 47-51.
CHEN Changqing, XIE Yongchun. Safety estimation of the trajectory of rendezvous and docking [J]. Aerospace Control and Application, 2011, 37(6): 47-51. (in Chinese)
- [16] 卢山, 徐世杰. 故障模式下的空间交会防撞设计 [J]. 空间控制技术与应用, 2008, 34(6): 39-43.
LU Shan, XU Shijie. Collision avoidance design of space rendezvous in the failure mode [J]. Aerospace Control and Application, 2008, 34(6): 39-43. (in Chinese)
- [17] 张洪波. 航天器轨道力学理论与方法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.
ZHANG Hongbo. Theories and methods of spacecraft orbital mechanics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015. (in Chinese)