

大气湍流引起的相位起伏对相干态量子雷达相位估计的影响*

陶志炜^{1,2}, 王书^{2,3}, 任益充², 饶瑞中²

1. 中国科学技术大学 环境科学与光电技术学院, 安徽合肥 230022;
2. 中国科学院 安徽光学精密机械研究所 大气光学重点实验室, 安徽合肥 230031;
3. 中国科学技术大学 研究生院科学岛分院, 安徽合肥 230026)

摘要:基于马赫曾德干涉仪模型并采用相位扩散主方程描述大气相位起伏效应对量子雷达的影响,给出了光场在相位扩散通道的演化过程,详细分析了大气相位起伏对相干态宇称探测量子雷达相位估计分辨率和最佳灵敏度的影响,并计算了大气相位起伏下相位估计灵敏度的 Cramer-Rao 极限。研究发现:相位起伏对于分辨率的影响可通过增加单个脉冲平均光子数来消除。在强相位起伏情况下,宇称探测得到最佳灵敏度会严重偏离散粒噪声极限,但是在弱相位起伏情况下,通过与 Cramer-Rao 极限的对比,发现宇称探测是一种准最佳探测方案。

关键词:量子雷达;宇称探测;大气相位起伏;最佳灵敏度;Cramer-Rao 极限

中图分类号:O431.2 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2020)01-031-07

Influence of phase fluctuation by atmospheric turbulence on phase estimation of coherent state quantum radar

TAO Zhiwei^{1,2}, WANG Shu^{2,3}, REN Yichong², RAO Ruizhong²

1. School of Environmental Science and Optoelectronic Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 230022, China;
2. Key Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China;
3. Science Island Branch of Graduate School, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The Mach-Zehnder interferometer and phase-diffusion main equation were used to simulate the influence of atmospheric phase fluctuation on the quantum radar, and the evolution process under phase diffusion channel was solved. The influence of atmospheric phase fluctuation on the phase estimation resolution and optimal sensitivity of the coherent state parity probe quantum radar were thoroughly analyzed, and the Cramer-Rao limit of phase estimation sensitivity under atmospheric phase fluctuation was calculated. The study found that the effect of phase fluctuation on resolution can be eliminated by increasing the average number of photons per pulse. Moreover, in the case of strong phase fluctuation, the best sensitivity of parity detection may seriously deviate from the shot noise limit, but in the case of weak phase fluctuation, it is found that the parity detection is a quasi-optimal detection compared with the Cramer-Rao limit.

Keywords: quantum radar; parity detection; atmospheric phase fluctuation; optimal sensitivity; Cramer-Rao limit

雷达技术经过半个世纪的发展,所担负的使命越来越重,与此同时也面临着电子技术干扰,隐身技术的严峻挑战^[1]。量子信息技术的迅速发展,为突破经典信息处理方式提供了新思路。现有经典雷达无论在分辨率、灵敏度还是抗干扰能力方面都亟须进一步提高。

受经典电磁理论的限制,经典雷达的分辨率、灵敏度以及抗干扰能力很难完成日益苛刻的任务需要,研究人员从调制载体和检测技术出发,以量

子理论为基础结合遥感探测技术突破经典雷达所面临的技术瓶颈。与经典雷达相比较而言,量子雷达具有超分辨率^[2]、超灵敏度^[3]以及量子散射截面等诸多优势,这使得量子雷达在军事、工程等领域都有着十分广泛的应用。

量子雷达对大气层内目标探测的过程中,大气中广泛存在的气溶胶、粉尘等非球形粒子对光子进行吸收和散射,从而导致光子的损耗。随机分布的温度、风速产生 $10^{-3} \sim 10^3$ m 尺度的漩涡,

* 收稿日期:2019-04-25

基金项目:国家自然科学基金青年基金资助项目(11904369);安徽省自然科学基金青年基金资助项目(1908085QA37);中科院合肥物质科学研究院院长基金青年火花基金资助项目(YZJJ2018QN1);脉冲功率激光技术国家重点实验室主任基金资助项目(2019ZR07)

作者简介:陶志炜(1995—),男,安徽芜湖人,博士研究生,E-mail:tzwl4789@mail.ustc.edu.cn;
任益充(通信作者),男,助理研究员,博士,E-mail:rych@aiofm.ac.cn

从而使得光场传输过程中会出现相位起伏、光强闪烁、光束扩展和漂移等大气湍流效应,大气湍流的存在导致量子光场失去其量子特性,蜕化为经典光场,从而使得量子雷达失去其独特的性质,因此研究大气湍流效应对于量子雷达的影响十分重要^[4-5]。

量子干涉雷达的核心器件是 Mach-Zehnder 干涉仪 (Mach-Zehnder Interferometric, MZI), 在过去的几十年期间, 寻找合适的量子光场以及探测手段成为提高分辨率, 灵敏度的关键因素。例如, Resch 等^[6]指出相干光可以提出超越 Rayleigh 极限的分辨率, 但是灵敏度却低于散粒噪声极限 (Shot Noise Limit, SNL) $1/\sqrt{N}$ 。Gao 等^[2]指出宇称测量能够导致相干光源的 MZI 具有超分辨率。Distante 等^[7]从实验上证实了零差探测具有半高全宽 (Full Width at Half Maximum, FWHM) 为 π/\sqrt{N} 的超分辨率, 相位估计灵敏度接近 SNL。Cohen 等^[8]发现零-非零探测 (Z 探测) 能够使得相位估计灵敏度充分接近 SNL, 比宇称探测灵敏度更高。

除此之外, 量子度量理论指出, 相位灵敏度极限由输出端的量子 Fisher 信息决定, 因此根据 Cramer-Rao 极限给出最大灵敏度边界十分重要。Caves^[9]提出 no-go 定理, 指出如果向平衡 MZI 一端输入真空态和另一端输入何种量子态以及采用何种测量方案, 灵敏度极限都不会突破 SNL。Takeoka 等^[10]对 no-go 定理做出了修正, 认为 no-go 定理只有在干涉仪两臂都存在未知相移才成立, 但在干涉仪单臂存在未知相移则可能会突破 SNL。Jarzyna 等^[11]指出干涉装置需要额外的参考相位才能给出正确的量子 Fisher 信息。

目前, 学术界对于量子雷达的方案设计及性能进行了较为系统的研究, 已有研究仅局限于大气损耗的影响, 而对于大气湍流引起的相位起伏对量子雷达影响机理的研究则较为匮乏; 此外, 任何不受相位起伏影响的量子态, 都不能用于量子雷达的相位估计, 因此考虑相位起伏的影响十分必要。

本文首先讨论相干态量子干涉雷达的相位估计原理, 并在合理的近似下可以将湍流大气引起的相位起伏效应作为相位扩散通道主方程进行处理, 给出光场在大气相位扩散通道中的演化过程并讨论相位扩散速率对量子干涉雷达的影响。随后, 在此模型的基础上研究了大气湍流引起的相位起伏对于相位估计分辨率和灵敏度以及对灵敏度极限的影响。研究发现: 增加单个脉冲平均光子数可有效地克服相位起伏对分辨率的影响; 大

气相位起伏会导致最佳灵敏度偏离 SNL, 采用脉冲平均光子数较小的光源在一定程度上能提高相位的灵敏度; 通过与灵敏度极限的对比, 发现在弱相位起伏情况下, 宇称探测是一种准最佳探测方案。

1 量子雷达相位估计原理

量子干涉雷达的结构示意图如图 1 所示, 它的物理模型为标准 Mach-Zehnder 干涉仪。其中一端输入信号为探测光, 用于对远程目标的探测和扫描, 另一端输入信号为本地参考光, 由于探测光一臂与参考光一臂光程不同, 会产生一定的相位差, 随后两束光再次经过分束器的时候会产生干涉, 并用探测器对两束光进行相干检测, 从而可得到目标的距离信息。

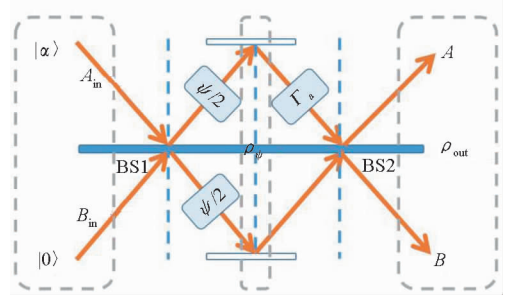


图 1 标准 MZI 物理模型 (不考虑相位扩散)

Fig. 1 Physical model of standard MZI (phase diffusion without consideration)

传统的分束器 (Beam Splitter, BS) 具有 SU(2) 李群结构, 文献^[12]给出了光场在 MZI 干涉仪中演化过程的么正算符, 本文假设干涉仪输入光场为 $|\alpha, 0\rangle$, 干涉仪透射率 $\tau = 1/2$, 经过干涉仪之后变为双模相干态 $\rho_{AB} = \hat{U}_{BS} \rho_{in} \hat{U}_{BS}^\dagger$, 其中 $\hat{U}_{BS} = \exp[-i\pi \hat{J}_x/4]$, $\hat{J}_x = \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}$, 于是有:

$$\rho_{AB} = |\alpha/\sqrt{2}, -\alpha/\sqrt{2}\rangle \langle \alpha/\sqrt{2}, -\alpha/\sqrt{2}| \quad (1)$$

对于线性相位通道来说, 为了计算简便, 假设干涉臂之间的相位差为 ψ , 相移对称分布在干涉臂的两侧。因此经过相移之后, 双模相干态变为:

$$\begin{aligned} \rho_\psi &= \hat{U}_\psi \rho_{AB} \hat{U}_\psi^\dagger \\ &= |\alpha e^{i\psi/2}/\sqrt{2}, -\alpha e^{-i\psi/2}/\sqrt{2}\rangle \langle \alpha e^{i\psi/2}/\sqrt{2}, -\alpha e^{-i\psi/2}/\sqrt{2}| \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\hat{U}_\psi = \exp[-i\psi(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b})/2]$, 经过反射镜反射之后, 双模在分束器上进行第二次干涉后被探测器接收。

MZI 的输出光场 ρ_{out} 包含相位信息, 因此需要设计测量方案来间接地估计相位信息, 常见的测量方案有零差探测、宇称探测、Z 探测, 本文采用宇称算符 $\hat{\Pi}_B = e^{i\pi \hat{b}^\dagger \hat{b}} = :e^{-2i\hat{b}^\dagger \hat{b}}:$ 来对输出光场进行

测量,其中,“:”表示算符的正规乘积形式。由于军事化和工程技术的应用需要,高精度的测量成为精准探测不可或缺的一部分,相位估计灵敏度就是度量测量精度的一个重要指标,定义它为相位 ψ 的测量标准差,由误差传递公式有:

$$\Delta\psi = \frac{\langle \Delta\Pi_B \rangle}{|\partial \langle \Delta\Pi_B \rangle / \partial \psi|} \quad (3)$$

其中, $\langle \Delta\Pi_B \rangle = \sqrt{\langle \Pi_B^2 \rangle - \langle \Pi_B \rangle^2}$ ^[14-15]。灵敏度越高 $\Delta\psi$ 越小,意味着测量越准误差越小。

由式(3)可以看出,不同的探测方案会导致不同的相位测量精度,因此寻找一种最佳的探测方案是十分重要的。量子度量理论就给出了相位估计灵敏度精度极限,称为 Cramer-Rao 极限 (Cramer-Rao Limit, CRL)。 $\Delta\psi_{\min} \geq 1/\sqrt{F_Q}$ ^[14-15],其中 F_Q 为量子 Fisher 信息 (Quantum Fisher Information, QFI)。保真率 χ 是两个量子态之间可分辨性的度量,文献[16]给出了保真率和量子 Fisher 信息的关系,即

$$\chi = \frac{1}{4} F_Q \quad (4)$$

2 相位起伏对相位估计的影响

上节简单地介绍了量子雷达在理想情况下 ($\Gamma_a = 0$) 的相位估计原理,但是在实际应用中回波信号往往需要考虑大气湍流的作用。本节将全面分析大气湍流引起的相位起伏对相位估计的影响。

由于大气湍流是具有一定结构,一定流形的随机场,从而使得光场传输过程中会出现相位起伏、光强闪烁、光束扩展和漂移等大气湍流效应。文献[17]指出了光场经过大气传输相位每一点存在高斯随机起伏,但是任意两点之间的相位存在一定的关联。如图2所示,当 $\omega_0 \ll r_0$ 时,光场任意两点之间的相位可以看成是统一的,这时只关注单一路径下光束在大气湍流中传输时的点起伏效应。

假设大气湍流引起相位起伏发生在 a 模经过反射镜和第二次 BS 干涉之间,下面采用相位扩散主方程描述大气湍流引起的相位起伏效应。单模连续变量系统相位扩散主方程为^[13,18-25]:

$$\partial\rho/\partial t = \Gamma(2\hat{\rho}\hat{\rho}^\dagger - \hat{\rho}^\dagger\hat{\rho}\rho - \rho\hat{\rho}^\dagger\hat{\rho}) \quad (5)$$

其中, Γ 代表相位扩散率,上述主方程具有如下形式解^[19]:

$$\rho(t) = \int_{\mathbb{R}} d\beta P(\beta) \hat{U}_\beta \rho(0) \hat{U}_\beta^\dagger \quad (6)$$

其中, $P(\beta) = e^{-\beta^2/4\Gamma_a^2}/\sqrt{4\pi\Gamma_a^2}$, $\hat{U}_\beta = e^{-i\beta\hat{a}^\dagger\hat{a}}$, $\Gamma_a = \Gamma t$, Γ_a 代表无量纲的相位扩散速率,可以看出相位扩散通道主方程解的物理含义是光场经过传输时会叠加一个随机相移,其均值为0,方差为 $2\Gamma_a^2$ 。结合单一路径光束在低层大气中传播时的点相位起伏方差^[17]和 Fried 参数 r_0 ^[26]定义可得:

$$\Gamma_a = 1.09(r_0\kappa_0)^{-5/6} \quad (7)$$

其中, κ_0 为湍流外部尺度的临界波数。因此 $\omega_0 \ll r_0$ 时,激光在湍流大气中的相位起伏现象可近似看成相位扩散过程,可由相位扩散通道主方程(5)近似描述,上述主方程的解可表示为^[27]:

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Gamma t)^n}{n!} e^{-\Gamma(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2} (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n \times \rho(0) (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n e^{-\Gamma(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2} \quad (8)$$

因此 a 模经过相位起伏之后变为:

$$\rho_a = e^{-|\beta|^2} \sum_{k,m}^{\infty} e^{-\Gamma_a(k-m)^2} \frac{\beta^k \beta^{*m}}{\sqrt{k!m!}} |k\rangle\langle m| \quad (9)$$

其中, $\beta = \alpha e^{i\psi/2}/\sqrt{2}$, $\rho_{at} = \rho_a \otimes |-\alpha e^{-i\psi/2}/\sqrt{2}\rangle\langle -\alpha e^{-i\psi/2}/\sqrt{2}|$,两束光经过 BS 之后,则

$$\rho_{\text{out}} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{k,m,p,q}^{\infty} e^{-\Gamma_a(k-m)^2} \sum_{i,j,r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+r}}{i!j!r!s!} \times \frac{\sqrt{(k-i+j)!(p-j+i)!(m-r+s)!(q-s+r)!}}{\sqrt{2^{k+m+p+q}(k-i)!(p-j)!(m-r)!(q-s)!}} \beta^k \beta^{*m} \gamma^p \gamma^{*q} |k-i+j, p-j+i\rangle\langle m-r+s, q-s+r| \quad (10)$$

其中, $\gamma = -\alpha e^{-i\psi/2}/\sqrt{2}$ 。可以看到的是,经过干涉,输出端密度矩阵变成混态,这是由于 a 模经过相位起伏之后非对角项衰减造成的。宇称探测对输出端光场探测的结果为:

$$\langle \hat{\Pi}_B \rangle = \text{Tr}_{\text{AB}}(\rho_{\text{out}} \hat{\Pi}_B) = e^{-N} \sum_{k,m}^{\infty} \left(-\frac{N}{2}\right)^{m+k} e^{-\Gamma_a(k-m)^2} \frac{e^{i(k-m)(\psi-\pi)}}{k!m!} \quad (11)$$

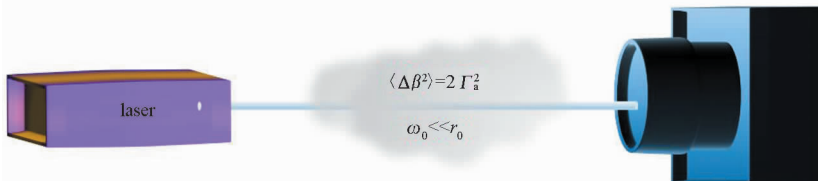


图2 大气相位起伏光线模型

Fig. 2 Atmospheric phase fluctuation light model

其中, $N = |\alpha|^2$ 代表单个脉冲的平均光子数。图 3 给出了不同光子数以及不同相位扩散情况下测量信号的包络图, 显然平均光子数和相位扩散速率较

大时 ($N = 32, \Gamma_a = 0.1$), 测量信号受到大气相位起伏影响较大, 反之当 $N = 1$ 时, 则受大气相位起伏影响较小, 这是因为相位扩散通道中光场密度矩阵非对角项衰减系数随光子数上升而指数减小。

本文对上述无穷级数在 Γ_a 很小的情况下做一阶 Taylor 近似 $e^{-\Gamma_a(k-m)^2} = 1 - \Gamma_a(k-m)^2 + o(\Gamma_a^2)$, 可以得到:

$$\langle \hat{I}_B \rangle \approx e^{-2N\sin^2(\frac{\psi}{2})} \times [1 - \Gamma_a(N\cos\psi - N^2\sin^2\psi)] \quad (12)$$

当 $\psi \rightarrow 0$ 附近时, $\langle \hat{I}_B \rangle \approx e^{-N\psi^2/2} (1 - \Gamma_a N)$, 那么当 $\Gamma_a N$ 项很小时, 这时引入的衰减也几乎可以忽略不计, 但是当 N 和 Γ_a 都较大时, n 阶小量 $o(\Gamma_a^n) \sim \Gamma_a^n N^2 e^N$, 近似引入误差较大。

3 宇称探测下相位起伏对分辨率和灵敏度的影响

分辨率是衡量雷达性能的一个重要指标, 干涉信号条纹的分辨率取决于测量信号的半高全宽^[14], 即 $\Delta x \propto FWHM \times \lambda/2\pi$ 。图 4(a) 给出了不同相位扩散速率情况下 $FWHM$ 随 N 的变化曲线, 其中带有形状的线表示一阶近似的结果, 反之表示数值计算的结果。可以看出, 当 Γ_a 和 N 较小时, 数值计算与一阶近似结果基本吻合, 反之则不然, 这与前文分析结果一致; 当 Γ_a 和 N 较大时, 大气相位起伏严重影响量子干涉雷达的分辨率。为了消除这种影响, 图 4(b) 给出了不同平均光子数下 $FWHM$ 随 Fried 参数的变化曲线, 可以看出, 相位起伏所带来的影响可以通过增加单个脉冲的平均光子数来弥补。

灵敏度是衡量雷达探测目标信息精度的另一个重要指标, 图 5 给出了不同相位扩散速率情况下, $\Delta\psi$ 随 ψ 的变化情况, 可以看出当 $\Gamma_a = 0$ 时, $\Delta\psi$ 的最小值在 0 处取得, $\Gamma_a \neq 0$ 时, $\Delta\psi$ 的最小值在 $\psi \neq 0$ 处取得, 这说明相位扩散速率动态地改变相位估计的灵敏度。此外, 还注意到当相位扩散速率较小时, $\Delta\psi_{\min}$ 随 N 的增大单调递减, 当 $\Gamma_a = 0.1$, 即相位扩散速率较大时, 这时 $\Delta\psi_{\min}$ 随 N 的增大先递减后递增。

图 6 给出了不同平均光子数情况下 $\Delta\psi_{\min}$ 随 r_0 的变化曲线, 当 N 较小时, 大气相位起伏对于 $\Delta\psi_{\min}$ 的影响较小, 反之 $\Delta\psi_{\min}$ 则受 r_0 的影响较大, 这是由于光子数较大时相位起伏引起的信号衰减加剧造成的。当 r_0 较大, 即大气相位起伏较弱时, 平均光子数的增加会增加量子干涉雷达的灵

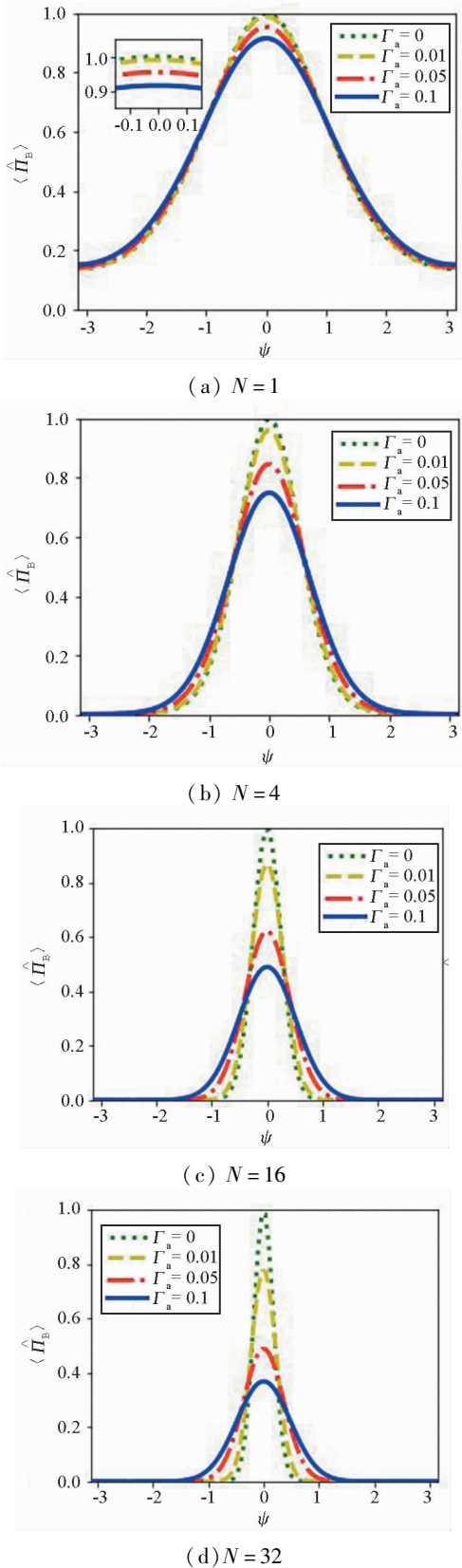
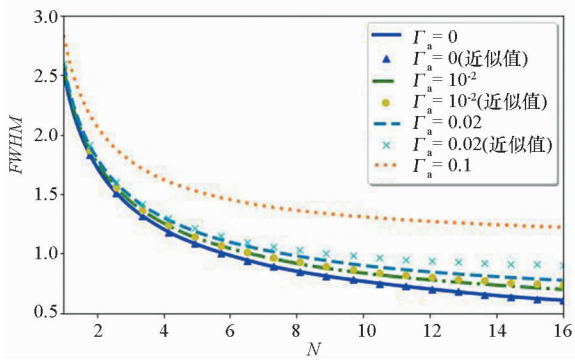
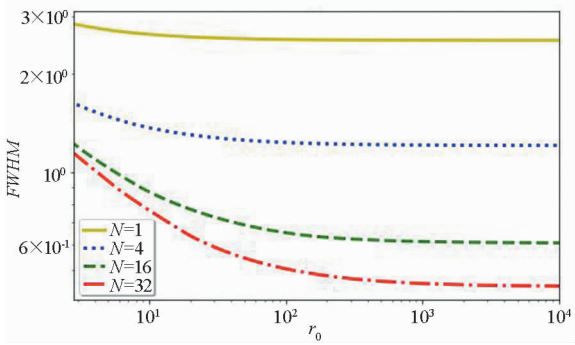


图 3 大气相位起伏对测量信号包络图的影响
Fig. 3 Effect of atmospheric phase fluctuation on the measurement signal envelope diagram



(a) 不同相位扩散下 $FWHM$ 随 N 的变化曲线

(a) Variation curve of $FWHM$ with N under different phase diffusions

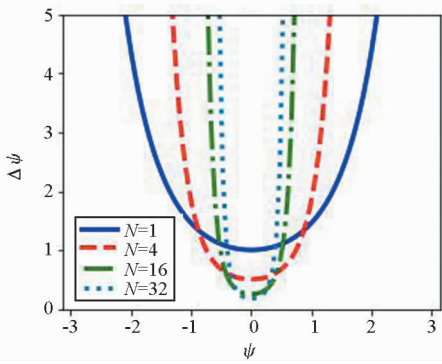


(b) 不同平均光子数下 $FWHM$ 随 Fried 参数的变化曲线

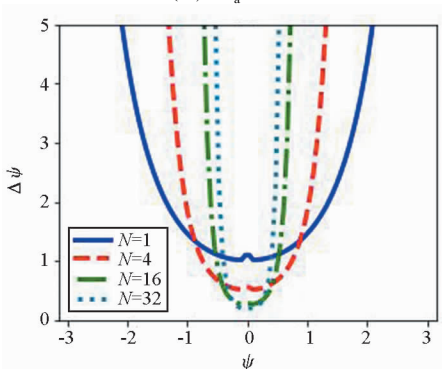
(b) Variation curve of $FWHM$ with Fried parameters under different average photon numbers

图 4 大气相位起伏对 $FWHM$ 的影响

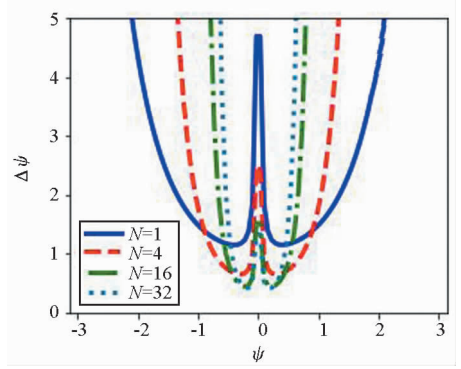
Fig. 4 Effect of atmospheric phase fluctuation on $FWHM$



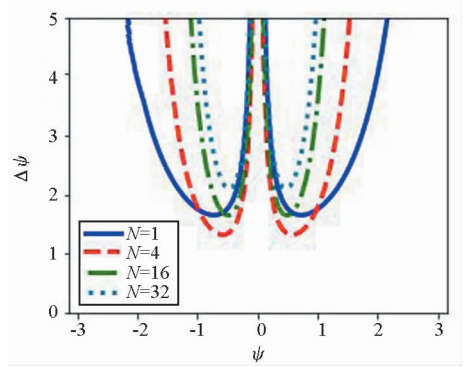
(a) $\Gamma_a = 0$



(b) $\Gamma_a = 10^{-4}$



(c) $\Gamma_a = 10^{-2}$



(d) $\Gamma_a = 0.1$

图 5 大气相位起伏对宇称探测线性相位估计灵敏度的影响

Fig. 5 Effect of atmospheric phase fluctuation on the sensitivity of linear phase estimation using parity detection

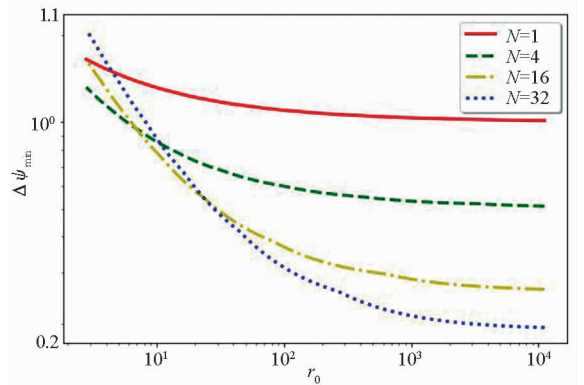


图 6 Fried 参数对最佳灵敏度的影响

Fig. 6 Effect of Fried parameters on optimal sensitivity

敏度;反之 r_0 较小时,使用单个脉冲平均光子数较小的光源能在一定程度上提高雷达的灵敏度。

4 相位起伏对灵敏度极限的影响

本节主要考虑相位起伏对灵敏度极限的影响。保真率与灵敏度极限的关系由式(4)给出,这里对光场经过第二个 BS 干涉之前的量子态保真率进行计算。图 7 蓝色曲线给出了根据量子 Fisher 信息计算灵敏度极限与平均光子数的变化关系,可以看出,当 $\Gamma_a = 0$ 时, $\Delta\psi_{\min} = 1/\sqrt{N}$;当

$\Gamma_a \neq 0$, 即存在大气相位起伏时, $\Delta\psi_{\min}$ 与 N 不再呈现线性关系; 当光子数和相位扩散速率都较大时, 这种偏离逐渐增大, 这与前文分析的宇称探测下最佳灵敏度随平均光子数变化趋势一致。

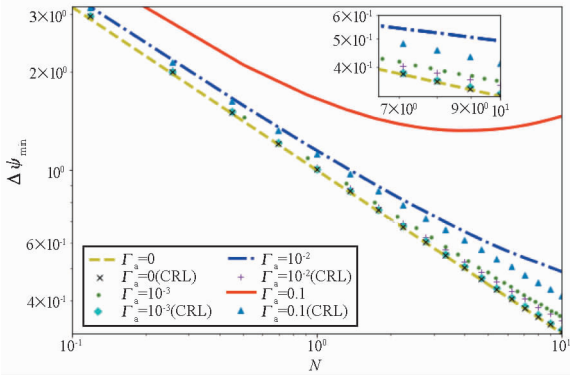


图 7 不同相位起伏下最佳灵敏度和灵敏度极限随光子数变化 log-log 图

Fig. 7 Log-log diagram of optimal sensitivity and sensitivity limit with photon number under different phase diffusions

此外, 图 7 对比了通过宇称探测计算的最佳灵敏度和量子 Fisher 信息计算的灵敏度极限与平均光子数之间的关系。可以看出, 当 $\Gamma_a = 0$ 时, 宇称探测的结果达到散粒噪声极限; 当 Γ_a 较小时, 即弱相位起伏情况下, 宇称探测结果接近 CRL, 随着 Γ_a 的增大, 宇称探测结果偏离 CRL, 这时宇称算符并非最佳探测算符, 这意味着存在其他探测方案能够更好地克服相位起伏的影响。

5 结论

本文首先介绍了量子雷达的特点及其独特的优势, 并给出不存在大气相位起伏情况下相位估计的原理以及量子度量理论在相位估计灵敏度极限方面的应用, 指出大气中存在的损耗、光强起伏以及相位起伏会对其自身特点造成一定的影响, 并以 MZI 及相位扩散主方程作为理论模型, 详细分析了相位起伏对相位估计的影响。研究发现, 相位起伏将造成脉冲信号半高宽的增加, 从而降低探测的分辨率, 通过增加脉冲平均光子数即可克服此不良影响。此外, 相位起伏的增加会使得最佳灵敏度远离 SNL, 通过适当增加平均光子数可在一定程度上提高相位估计的灵敏度。最后对比 CRL 给出的灵敏度极限与宇称探测给出的最佳灵敏度之间的关系, 发现在无噪声和弱相位起伏下, 宇称探测是一种准最佳的探测手段, 在强起伏情况下, 宇称探测的最佳灵敏度和 CRL 尚有一定的距离, 这说明应寻找其他更好的探测方案来克服相位起伏的影响。

参考文献 (References)

- [1] 葛家龙. 量子成像和量子雷达在遥感探测中的发展评述[J]. 中国电子科学研究院学报, 2014, 9(1): 1-9. GE Jialong. Review of development of quantum imaging and quantum radar in remote sensing [J]. Journal of Chinese Academy Electronics and Information Technology, 2014, 9(1): 1-9. (in Chinese)
- [2] Gao Y, Wildfeuer C F, Anisimov P M, et al. Super-resolution at the shot-noise limit with coherent states and photon-number-resolving detectors[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2010, 27(6): A170-A174.
- [3] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit [J]. American Association for the Advancement of Science, 2004, 306(5700): 1330-1336.
- [4] 任益充, 王书, 饶瑞中, 等. 大气闪烁对纠缠相干态量子干涉雷达影响机理[J]. 物理学报, 2018, 67(14): 140301. REN Yichong, WANG Shu, RAO Ruizhong, et al. Influence of atmospheric scintillation on entangled coherent states quantum interferometric radar [J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(14): 140301. (in Chinese)
- [5] 王书, 任益充, 饶瑞中, 等. 大气损耗对量子干涉雷达的影响机理[J]. 物理学报, 2017, 66(15): 150301. WANG Shu, REN Yichong, RAO Ruizhong, et al. Influence of atmosphere attenuation on quantum interferometric radar [J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(15): 150301. (in Chinese)
- [6] Resch K J, Pagnell K L, Prevedel R, et al. Time-reversal and super-resolving phase measurement [J]. Physical Review Letters, 2007, 98(22): 223601.
- [7] Distant E, Jezek M, Andersen U L. Deterministic super-resolution with coherent states at the shot noise limit [J]. Physical Review Letters, 2013, 111(3): 033603.
- [8] Cohen L, Istrati D, Dovrat L, et al. Super-resolved phase measurements at the shot noise limit by parity measurement [J]. Optics Express, 2014, 22(10): 11945-53.
- [9] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer [J]. Physical Review D: Particles and Fields, 1980, 23(8): 1693.
- [10] Takeoka M, Seshadreesan K P, You C, et al. Fundamental precision limit of a mach-zehnder interferometric sensor when one of the inputs is the vacuum [J]. Physical Review A, 2017, 96: 052118.
- [11] Jarzyna M, Demkowicz D R. Quantum interferometry with and without an external phase reference [J]. Physical Review A, 2011, 85(1): 011801.
- [12] Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1,1) interferometers [J]. Physical Review A, 1986, 33: 468-489.
- [13] Feng X M, Jin G R, Yang W. Quantum interferometry with binary-outcome measurements in the presence of phase diffusion [J]. Physical Review A, 2014, 90: 013807.
- [14] Helstrom C W. Quantum detection and estimation theory [M]. New York: Academic Press, 1976.
- [15] Braunstein S L, Caves C M. Statistical distance and the geometry of quantum states [J]. Physical Review Letters, 1994, 72(22): 3439-3443.
- [16] Liu J, Xiong H N, Song F, et al. Fidelity susceptibility and quantum Fisher information for density operators with arbitrary

- ranks [J]. *Physica A: Statistical and Mechanics and its Applications*, 2014, 410: 167 – 173.
- [17] Wheelon A D. *Electromagnetic scintillation. I. geometrical optics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 145: 371.
- [18] Genoni M G, Olivares S, Paris M G A. Optical phase estimation in the presence of phase diffusion [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(15): 153603.
- [19] Genoni M G, Olivares S, Brivio D, et al. Optical interferometry in the presence of large phase diffusion [J]. *Physical Review A*, 2012, 85(4): 043817.
- [20] Liu Y C, Jin G R, You L. Quantum-limited metrology in the presence of collisional dephasing [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 045601.
- [21] Brivio D, Cialdi S, Vezzoli S, et al. Experimental estimation of one-parameter qubit gates in the presence of phase diffusion[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(1): 012305.
- [22] Escher B M, Davidovich L, Zagury N, et al. Quantum metrological limits via a variational approach [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(19): 190404.
- [23] Zhong W, Sun Z, Ma J, et al. Fisher information under decoherence in bloch representation[J]. *Physical Review A*, 2013, 87: 022337.
- [24] Al-Qasimi A, James D F V. Nonexistence of entanglement sudden death in dephasing of high NOON states[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(3): 268 – 70.
- [25] Bardhan B R, Jiang K, Dowling J P. Effects of phase fluctuations on phase sensitivity and visibility of path-entangled photon fock states[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(2): 023857.
- [26] Alonso J R G, Brun T A. Protecting orbital-angular-momentum photons from decoherence in a turbulent atmosphere[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(2): 022326.
- [27] 范洪义, 胡利云. 开放系统量子退相干的纠缠态表象论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2010: 120.
FAN Hongyi, HU Liyun. Representation theory of entangled state of quantum decoherence in open system[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2010: 120. (in Chinese)