

基于旋转点电荷模型的舰船腐蚀电场*

嵇斗, 张建春, 王向军

(海军工程大学电气工程学院, 湖北武汉 430033)

摘要:为了找出轴频电场无法彻底消除及实际测量中静电场产生波动曲线问题的原因,基于旋转点电荷的建模方法对舰船腐蚀电场进行研究。利用汉克尔变换对点电荷在三层介质中产生的电场进行近似求解,得出一定转速下感应电场随时间、螺旋桨半径及水面距离变化的规律曲线图,并通过实验验证了理论结果的正确性。结果表明:螺旋桨旋转产生的感应电场是构成舰船腐蚀电场的一部分,一定转速下的感应电场频率与螺旋桨转动频率一致,并会随着螺旋桨半径及与水面距离的增加而减小。

关键词:旋转点电荷;汉克尔变换;三层介质;感应电场;初始相位

中图分类号:TN95 **文献标志码:**A **文献编号:**1001-2486(2020)01-156-06

Ship corrosion electric field based on rotating point charge model

Ji Dou, ZHANG Jianchun, WANG Xiangjun

(College of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: To research the reason why the shaft-rate electric field cannot be completely eliminated and the wave curve produced by the electrostatic field in the actual measurement, a modeling method based on rotating point charge was proposed to study the corrosion electric field of ships. The Hankel transform was used to approximate the electric field generated by point charges in the three-layer medium, the curves of induced electric field changing with time, propeller radius and water surface distance under certain rotational speed were obtained, and the correctness of the theoretical results was verified by experiments. The results showed that the induced electric field is a part of the corrosion electric field of ship, and the frequency of induced electric field is the same as the speed of propeller at a certain speed, and the amplitude of that frequency decreases with the increase of the radius of propeller and the distance from the water surface.

Keywords: rotating point charge; Hankel transform; three-layer medium; induced electric field; initial phase

随着人们对舰船在海水中产生腐蚀电场的研究,国内外关于电场的探测及防护不断提高^[1-5]。舰船自身的腐蚀防护装置及船壳破损处均会在海水中激发产生腐蚀电场^[6]。除此之外,产生感应电场的来源有很多,比如舰船运动切割地磁场及海水流动产生的兴波切割地磁场产生的感应电场等,但相对腐蚀电场而言,该电场相对较小,在研究过程中一般不考虑。当外加电流阴极保护装置关闭时,对螺旋桨固定转速下的船体测量静电场通过特性曲线时,如何调整和改进腐蚀防护装置的保护电流,静电场信号曲线中总是存在波动,其波动频率与螺旋桨转速频率基本一致,同时在对螺旋桨旋转过程中的轴频电场信号进行防护时,会有1%的轴频电场信号无法消除^[7]。研究和实验结果表明,正弦波动信号只存在于螺旋桨旋转时的静

电场中,而螺旋桨静止时的静电场信号不存在这种情况^[8]。因此,波动信号及1%无法消除的轴频电场信号产生的原因应从螺旋桨旋转产生的感应电场角度出发,对螺旋桨旋转时产生的电场时域及频谱进行分析。螺旋桨旋转同时产生静电场及轴频电场,由于静电场信号相对轴频电场幅值大,可从实测数据中将两种信号分离提取^[9]。从电化学角度考虑,当船壳与铜制螺旋桨在海水中构成回路时,两者因极化电位不同而发生腐蚀,在桨叶表面聚集大量的极化带电粒子,这部分极化粒子随着螺旋桨的转动产生感应电场,构成轴频电场信号的一部分,若桨叶表面极化粒子的总电荷量较大时,螺旋桨旋转产生的感应电场会直接影响到静电场^[10]。因此,研究螺旋桨表面极化带电粒子的感应电场可对静电场的特性曲线产生原理

* 收稿日期:2018-09-08

基金项目:国家自然科学基金面上资助项目(41476153)

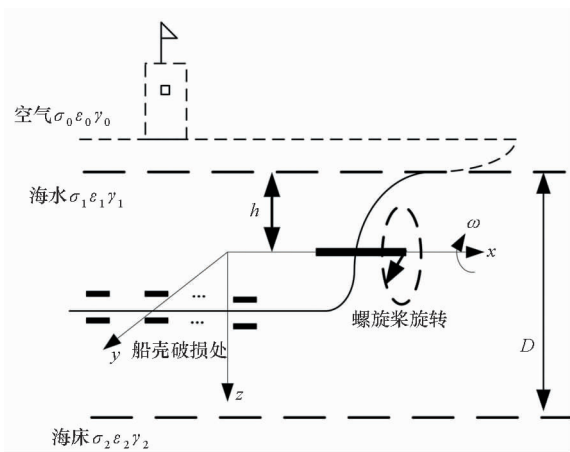
作者简介:嵇斗(1975—),男,江苏连云港人,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:406091202@qq.com

及轴频电场防护装置的进一步完善提供理论基础。利用旋转的点电荷模型可对其进行有效仿真及分析。

在点电荷的基础上将船壳破损及螺旋桨等效为正负电荷,负电荷旋转时产生的感应电场对螺旋桨旋转时产生的电场进行建模研究,得到了该情况下电场三分量幅值及频率特征,并通过实验验证的模型仿真结果的正确性。

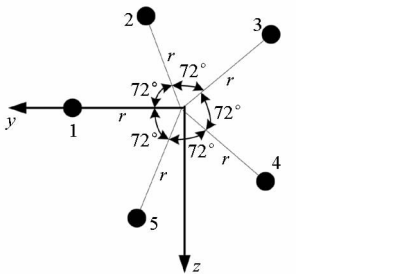
1 理论分析

假设船体存在 n 处破损,坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, 舰船螺旋桨为五叶浆,螺旋桨桨叶半径为 r , 令每个桨叶上带电粒子的等效负电荷位置坐标分别为 $(x_0, r, 0), (x_0, r \cos \alpha, -r \sin \alpha), (x_0, r \cos 2\alpha, -r \sin 2\alpha), (x_0, r \cos 3\alpha, -r \sin 3\alpha), (x_0, r \cos 4\alpha, -r \sin 4\alpha)$, 其中 $\alpha = 72^\circ$ 为桨叶与 y 轴正方向的夹角,当螺旋桨绕 x 轴旋转时,船壳破损处、螺旋桨位置及介质参数如图 1 所示。



(a) 理论模型

(a) Theoretical model



(b) 桨叶等效电荷模型

(b) Point charge model

图 1 三层介质中的理论模型

Fig. 1 Theoretical model in three layer medium

当螺旋桨以转速 ω 绕 x 轴旋转 t 时刻后,每个负电荷的坐标位置可表示为:

$$\begin{cases} (x_0, r \cos \omega t, -r \sin \omega t) \\ (x_0, r \cos(\alpha + \omega t), -r \sin(\alpha + \omega t)) \\ (x_0, r \cos(2\alpha + \omega t), -r \sin(2\alpha + \omega t)) \\ (x_0, r \cos(3\alpha + \omega t), -r \sin(3\alpha + \omega t)) \\ (x_0, r \cos(4\alpha + \omega t), -r \sin(4\alpha + \omega t)) \end{cases} \quad (1)$$

在直角坐标系中,设第 i 个(正、负)点电荷位于 (x_i, y_i, z_i) 处,与海水中任意位置处 (x, y, z) 的距离为 R , 利用汉克尔变换对 $1/R$ 进行 Sommerfeld 积分公式展开^[11-12]得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \\ &= \int_0^\infty e^{-k|z-z_i|} J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ 。

式(2)右端满足拉普拉斯方程,点电荷在三层介质中产生的电位可分别表示为:

$$\begin{cases} \varphi_{1i} = \frac{Q_i}{4\pi\sigma_0} \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{-k(z-z_i)} dk \\ \varphi_{2i} = \frac{Q_i}{4\pi\sigma_1} \left[\int_0^\infty J_0(kr) e^{-k|z-z_i|} dk + \int_0^\infty B_1(k) J_0(kr) e^{-k(z-z_i)} dk + \int_0^\infty B_2(k) J_0(kr) e^{k(z-z_i)} dk \right] \\ \varphi_{3i} = \frac{Q_i}{4\pi\sigma_2} \int_0^\infty C(k) J_0(kr) e^{-k(z-z_i)} dk \end{cases} \quad (3)$$

式中, $A(k), B_1(k), B_2(k), C(k)$ 是待定系数,满足下列边界条件^[13]:

1) 分界面两边电位连续 $\varphi_j|_r = \varphi_{j+1}|_r$;

2) 分解层电流密度法向分量连续 $\sigma_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \Big|_r =$

$\sigma_{j+1} \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial z} \Big|_r$ 。

其中: σ_j 表示在介质层 $j(j=0,1)$ 中的电导率,其中空气的电导率为零, Γ 表示 $z = -h$ 及 $z = M(M = D - h)$ 的分界面。

由边界条件可得一组系数方程

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma_0} A(k) e^{kh} = \frac{1}{\sigma_1} (e^{-kh} + B_1(k) e^{kh} + B_2(k) e^{-kh}) \\ -A(k) e^{kh} = -e^{-kh} - B_1(k) e^{kh} + B_2(k) e^{-kh} \\ \frac{1}{\sigma_1} (e^{-kM} + B_1(k) e^{kM} + B_2(k) e^{kM}) = \frac{1}{\sigma_2} C(k) e^{-kM} \\ -e^{-kM} - B_1(k) e^{-kM} + B_2(k) e^{kM} = -C(k) e^{-kM} \end{cases} \quad (4)$$

可得:

$$\begin{cases} A(k) = \frac{(\gamma_{12}/\gamma_{01})(e^{-2kh} - 1)e^{-2kD} + \gamma_{12}(1 - e^{2kh})e^{-2kD}}{1 + (\gamma_{12}/\gamma_{01})e^{-2kD}} \\ B_1(k) = -\frac{e^{-2kh} + (\gamma_{12}/\gamma_{01})e^{-2kD}}{1 + (\gamma_{12}/\gamma_{01})e^{-2kD}} \\ B_2(k) = \frac{\gamma_{12}(e^{2kh} - 1)e^{-2kD}}{1 + (\gamma_{12}/\gamma_{01})e^{-2kD}} \\ C(k) = \frac{\gamma'(1 - e^{-2kh})}{1 + (\gamma_{12}/\gamma_{01})e^{-2kD}} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\gamma_{01} = (\sigma_0 - \sigma_1)/(\sigma_0 + \sigma_1)$ 、 $\gamma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$ 、 $\gamma' = 2\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$ 。

因为空气中的电导率 $\sigma_0 = 0$, 则 $\gamma_{01} = -1$ 。式中的系数可简化为:

$$\begin{cases} A(k) = \frac{\gamma_{12}(1 - e^{-2kh})e^{-2kD} + \gamma_{12}(1 - e^{2kh})e^{-2kD}}{1 - \gamma_{12}e^{-2kD}} \\ B_1(k) = \frac{\gamma_{12}e^{-2kD} - e^{-2kh}}{1 - \gamma_{12}e^{-2kD}} \\ B_2(k) = \frac{\gamma_{12}(e^{2kh} - 1)e^{-2kD}}{1 - \gamma_{12}e^{-2kD}} \\ C(k) = \frac{\gamma'(1 - e^{-2kh})}{1 - \gamma_{12}e^{-2kD}} \end{cases} \quad (6)$$

由 $|\gamma_{12}e^{-2kD}| < 1$, 对上式中的分母进行展开^[14] 有:

$$\frac{1}{1 - \gamma_{12}e^{-2kD}} = \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma_{12}e^{-2kD})^m \quad (7)$$

将式(7)代入式(3)可求得电解质中的腐蚀电位:

$$\begin{aligned} \varphi_{2i} = \frac{Q}{4\pi\sigma_1} & \left[\int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-k|z-z_i|} dk + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\gamma_{12}e^{-2kD})^m \cdot \right. \\ & (\gamma_{12}e^{-k[2D+(z-z_i)]} - e^{-k(2h+z-z_i)}) J_0(kr) dk + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\gamma_{12}e^{-2kD})^m \gamma_{12} (e^{-k[2(D-h)-(z-z_i)]} - \\ & \left. e^{-k[2D-(z-z_i)]}) J_0(kr) dk \right] \quad (8) \end{aligned}$$

第一项为点电荷电位。第二、三项包括无穷项和, 根据式(2)的逆运算可得第 m 项的积分为:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \gamma_{12}^m e^{-2mkD} (\gamma_{12}e^{-k[2D+(z-z_i)]} - e^{-k(2h+z-z_i)}) J_0(kr) dk \\ = \frac{\gamma_{12}^{m+1}}{R_1} - \frac{\gamma_{12}^m}{R_2} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \gamma_{12}^{m+1} e^{-2mkD} (e^{-k[2(D-h)-(z-z_i)]} - e^{-k[2D-(z-z_i)]}) J_0(kr) dk \\ = \frac{\gamma_{12}^{m+1}}{R_3} - \frac{\gamma_{12}^{m+1}}{R_4} \quad (10) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + [2(m+1)D + (z-z_i)]^2} \\ R_2 &= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + [2mD + 2h + (z-z_i)]^2} \\ R_3 &= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + [2(m+1)D - 2h - (z-z_i)]^2} \\ R_4 &= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + [2(m+1)D - (z-z_i)]^2} \end{aligned}$$

将其代入式(8)可得点电荷在海水中任意位置处产生的电位为:

$$\varphi_{2i} = \frac{Q}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{R} + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{12}^m \left(\frac{\gamma_{12}}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{\gamma_{12}}{R_3} - \frac{\gamma_{12}}{R_4} \right) \right] \quad (11)$$

船壳存在 n 处破损的五叶浆船体在海水中任意位置处 (x, y, z) 产生的电位满足叠加定理, 产生的总电位可表示为:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_{2i} + \sum_{j=1}^5 \varphi_{2j} \quad (12)$$

利用 $E = -\nabla\varphi$ 即可求出介质中电场的空间分布^[15]:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \quad (13)$$

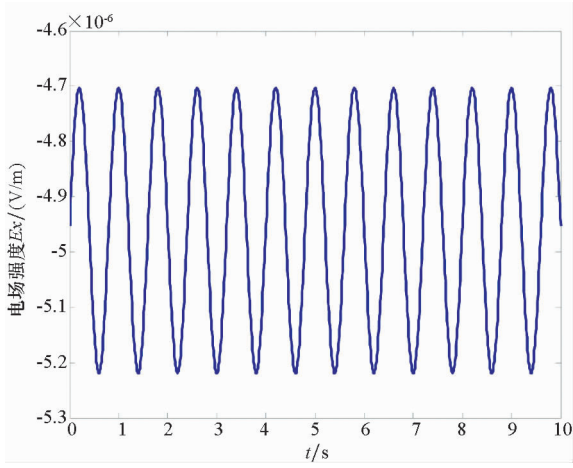
2 实例仿真

2.1 感应电场与时间

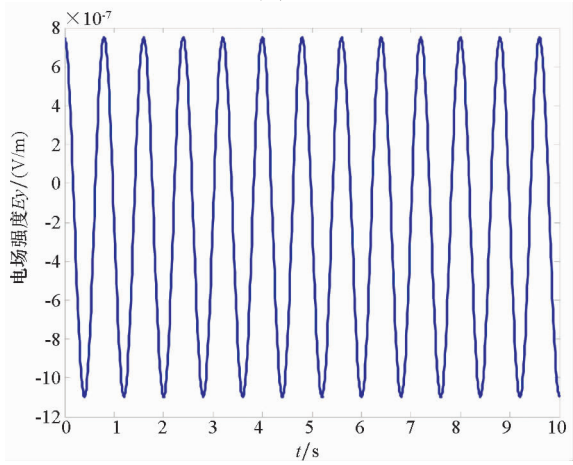
假设船体存在四处破损且分别位于舰首及舰尾两两对称, 为了模拟轴频电场 100% 的防护效果, 船壳破损处及五叶螺旋桨分别用铂电极外加电流进行等效并用导线直接连接, 避免螺旋桨旋转导致回路中产生变化电阻。将四个材质规格完全相同的 1 cm × 1 cm 铂片电极接外加电流装置的负极, 将其固定在 2 m × 0.5 m 塑料材质的平板上模拟船壳的四个破损处, 空间坐标分别为 $(-0.2, 0.1, 0.5)$ 、 $(-0.2, -0.1, 0.5)$ 、 $(-0.5, 0.1, 1)$ 、 $(-0.5, -0.1, 0.5)$, 选取五个相同规格的铂片电极接外加电流装置的正极, 安装在旋转半径为 $R = 0.2$ m 的分支处模拟桨叶的等效负电荷, 旋转中心位置与水面距离为 $h = 1.5R$ 。在电导率 σ_1 为 3.98 S/m、水深 50 m 的湖水中进行仿真, 假设每个点电荷的电荷强度均为 1, 湖底的海床电导率为 $\sigma_2 = 0.1\sigma_1$ 。当电机以 $\omega = 2.5\pi$ rad/s 转速旋转时, 测量点位于空间坐标 $(1, 0, 10)$ 时的电场三分量时域仿真图如图 2 所示。

由图 2 可知, 电场三分量峰 - 峰值各不相同 (x 分量峰 - 峰值约为 5×10^{-7} V/m, y 分量峰 -

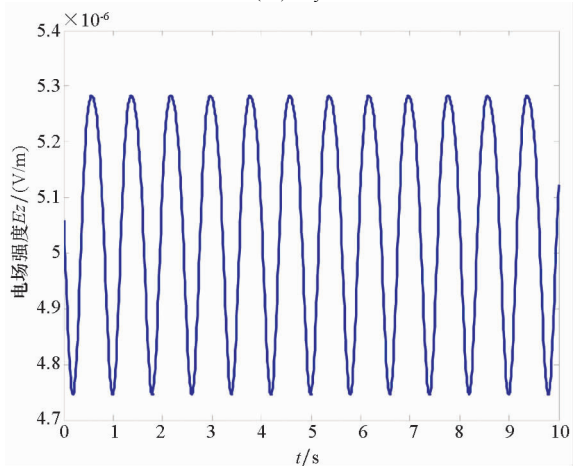
峰值约为 1.8×10^{-6} V/m, z 分量峰 - 峰值约为 5.5×10^{-7} V/m)。通过感应电场时间分布曲线可以看出, y 分量与 x 分量相位相差 $\pi/2$, z 与 y 分量初始相位相差 $\pi/2$, 但三者信号频率均为 1.25 Hz, 与旋转频率一致。



(a) E_x



(b) E_y



(c) E_z

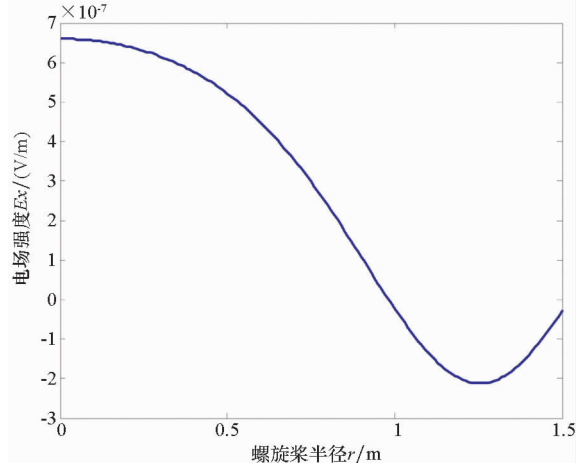
图 2 感应电场时域图

Fig. 2 Domain diagram of induced electric field

2.2 感应电场与半径

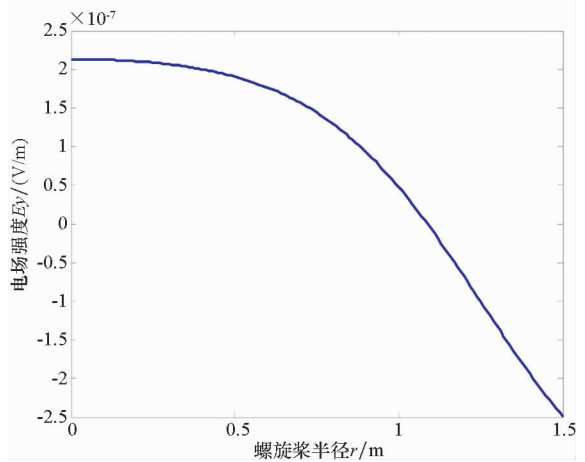
由于执行任务的不同, 导致舰船的排水量也

不同, 调研结果发现, 舰船因型号及用途的不同螺旋桨直径为 1.5 ~ 2.5 m, 桨叶半径的变化会直接影响到螺旋桨旋转时桨叶表面等效负电荷的分布距离, 因此需对桨叶半径的影响进行考虑^[16]。当保持其他条件不变的情况下, 介质中的感应电场分布与桨叶半径的变化曲线如图 3 所示。



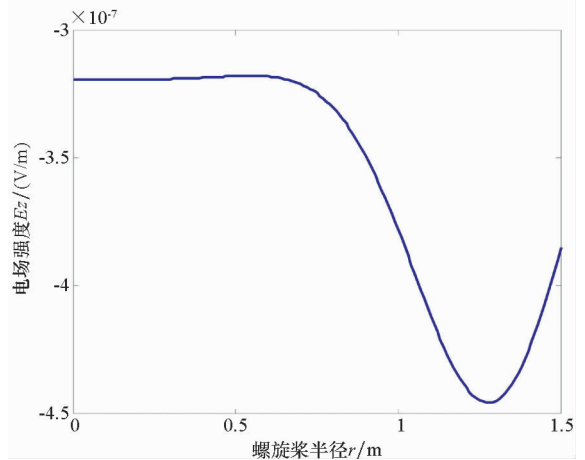
(a) E_x 与螺旋桨半径

(a) E_x with propeller radius



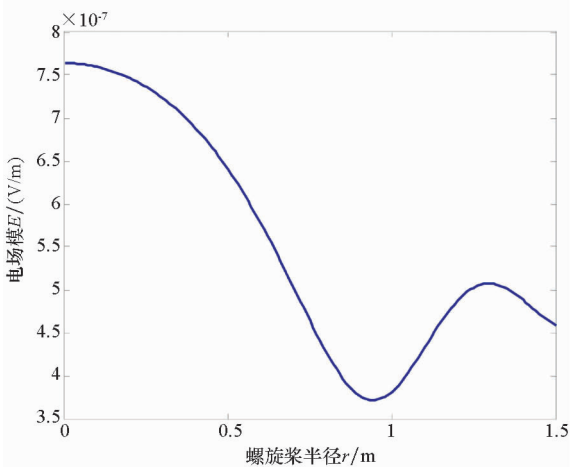
(b) E_y 与螺旋桨半径

(b) E_y with propeller radius



(c) E_z 与螺旋桨半径

(c) E_z with propeller radius



(d) E 与螺旋桨半径
(d) E with propeller radius

图 3 感应电场与桨叶半径

Fig. 3 Induced electric field with propeller radius

由图 3 可看出,电场分量随半径的变化规律并不一致,但在半径约为 0.7 m 时均发生变化。 x, z 分量随着半径的增加而减小,在半径约为 1.2 m 时静电场产生最小幅值,而 y 分量会随着半径的增加呈下降趋势。根据理论结果显示,在点电荷量保持不变的情况下,调研结果中的舰船半径范围内的静电场会随着半径的增加而减小。

2.3 感应电场与水面距离 h

实际中,潜艇下潜或水面舰船吃水深度的变化均会导致螺旋桨及船壳破损处与海水-空气分界面之间距离 h 的变化,该参数会直接影响到点电荷模型与固定测量点之间的位置关系,最终会导致测量点处静电场的幅值变化。测量点固定时,静电场随距离 h 的变化规律如图 4 所示。

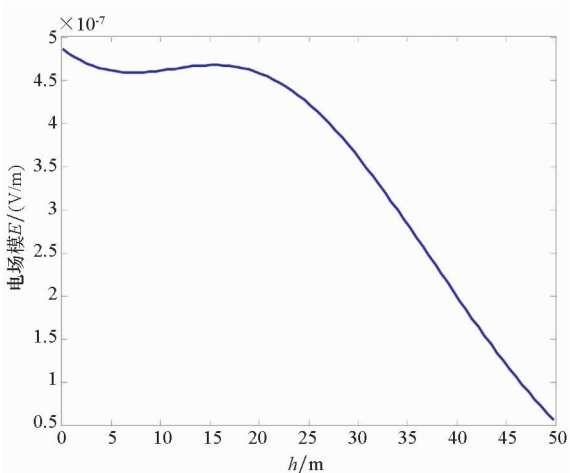


图 4 感应电场与距离 h

Fig. 4 Induced electric field with h

由图 4 可以看出,在距离水平面 $h = 10$ m 附

近静电场幅值产生变化。其主要原因是由于选取测量点的位置坐标在 $z = 10$ m 处。随着 h 的变化,电场幅值的大小随着正、负电荷与测量点距离的减小而增大, h 进一步增大时电场值会逐渐减小,该规律与文献[9]中电偶极子随深度变化的规律一致。

3 实验验证

利用铂电极对算例仿真中的点电荷模型进行实验验证,将其置于电导率为 3.98 S/m、水深为 20 m 的湖水中,采用银-氯化银材料的三分量电场传感器对水中的电场进行测量,测量系统设置采样频率 1000 Hz,根据仿真条件中的相关数据,布置正、负铂电极及传感器的相对位置,实验设计如图 5 所示。

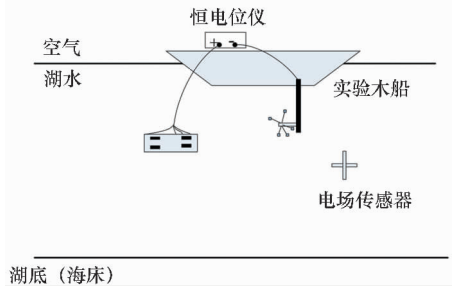


图 5 实验设计原理

Fig. 5 Experimental design schematic

由于湖水中水流的存在,使电场三分量不能较好地稳定在三个方向上,为了实现实验与仿真结果的对比,采用电场模进行分析。实测信号经滤波处理后^[11],与理论结果对比图如图 6 所示。

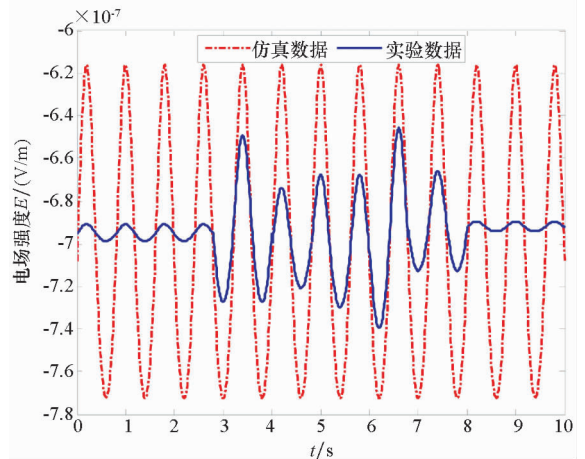


图 6 实验与仿真对比

Fig. 6 Comparison between experiment and simulation

测量期间保持旋转速度固定,当支架旋转稳定后对电场进行采集。从图 6 可以看出,电场模时域基本一致,但大小仍存在较大误差,其主要原

因在于数学模型中对湖底电导率的假设与实际存在较大误差,同时由于湖水的流动使设备间的位置坐标不能严格按照算例进行布置,但实测数据与仿真结果均在同一数量级,信号频率均为 0.125 Hz,且相位特征与仿真结果得出的结论基本一致。因此,实验结果验证了螺旋桨旋转产生的感应电场会使螺旋桨旋转时的静电场产生波动分布的正确性,并说明了轴频电场无法彻底消除的原因。

4 结论

通过对点电荷模型中负电荷旋转在三层介质中产生感应电场的推导及实验验证得出,舰船螺旋桨旋转会在海水任意位置处产生与旋转频率一致的感应电场,该电场会体现在静电场变化的通过特性曲线及轴频电场信号中,且电场三分量的初始相位各不相同。通过仿真研究发现,桨叶半径及螺旋桨的旋转中心距水平面的距离均会对感应电场幅值产生影响。此外,通过实验与仿真结果的对比验证了理论结果的正确性,为进一步研究舰船在海水中的电场分布规律奠定了基础。

参考文献 (References)

- [1] 熊露,姜润翔,龚沈光. 浅海中船舶轴频电场建模方法[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(1): 98-103.
XIONG Lu, JIANG Runxiang, GONG Shengguang. Ship modeling method of shaft-ELFE in shallow sea [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(1): 98-103. (in Chinese)
- [2] 张建新,王向军. 水平电流元在深海中的电场强度算法研究[J]. 舰船科学技术, 2016, 38(1): 90-93.
ZHANG Jianchun, WANG Xiangjun. Arithmetic research about electric-field intensity of horizontal-harmonic current in the deep sea [J]. Ship Science and Technology, 2016, 38(1): 90-93. (in Chinese)
- [3] Dymarkowski K, Uczciwek J. The extremely low frequency electromagnetic signature of the electric field of the ship[C]// Proceedings of Undersea Defence Technology Conference and Exhibition, 2001: 1-6.
- [4] Schaefer D, Zion S, Doose J, et al. Numerical simulation of UEP signatures with propeller induced ULF modulations in maritime ICCP system [C]// Proceedings of MARELEC, 2011: 1045-1050.
- [5] 程锐,姜润翔,龚沈光. 船舶轴频电场等效源强度计算方法[J]. 国防科技大学学报, 2016, 38(2): 138-143.
CHENG Rui, JIANG Runxiang, GONG Shengguang. Calculation method of vessel shaft rate electric field equivalent source magnitude [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2016, 38(2): 138-143. (in Chinese)
- [6] Mcgrath J N, Tighe-Ford D J, Hodgkiss L. Scale modeling of a ship's impressed-current cathodic protection system [J]. Corrosion Prevention & Control, 1985, 14(4): 36-39.
- [7] Liu D H, Wang X J, Ji D. Underwater target recognition technology based on ship speed-paddle speed characteristic curve[C]// The International Conference on Mechatronics and Manufacturing Technologies, 2017: 572-579.
- [8] Zhang H, Wang X, Shan C, et al. Electric field distribution measurement equipment calibration based on electric field calculation of space [J]. International Journal of Digital Content Technology & its Applications, 2012, 6(16): 524-531.
- [9] 张建新. 海水中腐蚀相关轴频电场建模及其特性分析[D]. 武汉: 海军工程大学, 2015.
ZHANG Jianchun. The modeling and analysis about ship's shaft-rate electric field related to corrosion in seawater [D]. Wuhan: Naval University and Engineering, 2015. (in Chinese)
- [10] 李狄. 电化学原理[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998.
LI Di. Theory of electrochemical [M]. Beijing: Beihang University Press, 1998. (in Chinese)
- [11] 奚定平,奚华林. 点电荷在三层介质中势的物理解释与光学类比[J]. 大学物理, 1996, 15(11): 1-4.
XI Dingping, XI Hualin. Physical description of potential by a point charge in three layer of dielectrics [J]. College Physics, 1996, 15(11): 1-4. (in Chinese)
- [12] 雷银照. 关于电磁场解析方法的一些认识[J]. 电工技术学报, 2016, 31(19): 11-25.
LEI Yinzhaoh. Reviews of analytical methods for electromagnetic fields [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2016, 31(19): 11-25. (in Chinese)
- [13] 姜润翔,林春生,龚沈光. 基于点电荷模型的舰船静电场反演算法研究[J]. 兵工学报, 2015, 36(3): 545-551.
JIANG Runxiang, LIN Chunsheng, GONG Shengguang. Electrostatic electric field inversion method for ship based on point charge source model [J]. Acta Armamentarii, 2015, 36(3): 545-551. (in Chinese)
- [14] 姚端正,梁家宝. 数学物理方法[M]. 2版. 武汉: 武汉大学出版社, 2011.
YAO Duanzheng, LIANG Jiabao. Mathematical physics method[M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2011. (in Chinese)
- [15] Vanderlinde J. Classical electromagnetic theory [M]. 2nd ed. UK: Springer, 2005: 33-102.
- [16] Wang X J, Liu D H, Zhu W B, et al. Underwater target detection based on electric-field sensor line array[J]. Applied Mechanics & Materials, 2015, 713/714/715: 337-342.