

具有坐标耦合和处理时滞的二阶离散多智能体系统的一致性*

聂芬,段晓君,刘易成

(国防科技大学文理学院,湖南长沙 410073)

摘要:根据系统的拓扑结构、离散步长和旋转矩阵的旋转角,确定系统的渐近行为,给出多智能体系统达成二阶一致性的充要条件。证明了当0是拉普拉斯矩阵的一个简单特征值且离散步长、旋转角小于由代数方程确定的临界值时,会出现渐近一致性。数值模拟结果证明理论结果的正确性。设计了特征参数影响二阶一致性的相关案例,说明特征参数相关结论可为控制理论的一致收敛分析提供重要判据和理论支撑。

关键词:渐进一致性;处理时滞;传输时滞;旋转矩阵

中图分类号:O231.5 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2020)01-176-11

Consensus of discrete time second-order multi-agent systems with spatial coordinates coupling and processing delay

NIE Fen, DUAN Xiaojun, LIU Yicheng

(College of Liberal Arts and Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The asymptotic behavior was determined in terms of the topological structure of the system, the step length and the rotation angle of the corresponding rotation matrix. Some necessary and sufficient conditions for the multi-agent systems to reach second-order consensus were found. It was shown that the asymptotic consensus appears when 0 is a simple eigenvalue of the Laplacian matrix, the step length and the rotation angle is less than the critical value which was determined by an algebraic equation. Some numerical simulations were presented to demonstrate the theoretical results. Some cases on the influence of characteristic parameters on second-order consensus were designed, which showed that the conclusion of characteristic parameters can provide important criterion and theoretical support for the control theory.

Keywords: asymptotic consensus; processing delay; transmission delay; rotation matrix

近年来,生物科学、信息科学、系统与控制科学等多个领域的研究者们都在关注多智能体系统如何合作和协调,一致性问题作为多智能体系统之间合作协调的基础,越来越受到研究者的关注。在过去十年中,广泛研究了二阶多智能体系统的一致性问题。对于连续系统, Ren 等^[1]提出了二阶一致性协议,得到系统在具有固定拓扑和交换拓扑下一致性的充分条件。Xie 等^[2]解决了二阶系统在无向图具有固定拓扑和切换拓扑时的平均一致性问题。Yu 等^[3]、Zhu 等^[4]建立了一致性协议充要条件。对时滞二阶系统, Yu 等^[5]讨论了不需要速度测量的具有位置伴随跟过去位置伴随控制的一致性,得到系统无时滞不能一致,在选择合适的时滞可以促成一致性的结论。Hou 等^[6]讨论了一类二阶系统,得到无时滞时系统一致的充要条件,以及系统达成一致能容忍的最大时滞。

系统邻接图具有有向生成树时,具有空间坐标耦合的系统一致性问题得到解决^[7]。刘易成等^[8]讨论了具有位置伴随和速度伴随的二阶多智能体系统的三种集群模式。在控制系统中,通常情况下,智能体无法随时获取测量数据,通常会定期更新信息。因此,对离散系统的研究显得尤为重要。Zhang 等^[9]研究了一类二阶离散多智能体系统,得到系统在固定拓扑和带马尔可夫切换拓扑时,系统二阶一致性的充要条件。Lin 等^[10]通过模型变换和应用非负矩阵的性质,在一定假设条件下,只要邻接图的并集具有有向生成树,系统可以容忍任意有界时间延迟,得到了系统二阶一致性的充分条件。Xie 等^[11]利用双线性变换,将二阶离散时间多智能体系统的一致性问题转化为多项式的 Schur 稳定性问题,得到系统二阶一致性成立的充要条件。具有时变拓扑和时变时滞的一致性

* 收稿日期:2019-06-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11771450,11671011)

作者简介:聂芬(1983—),女,湖南娄底人,博士研究生,E-mail:niefen321@163.com;

刘易成(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:liuyc2001@hotmail.com

问题得到了解决^[12],对有限传输时滞的离散系统,有限的传输时滞不影响离散二阶一致性^[13]。Cao 等^[14]得到了系统具有固定有向拓扑和无向拓扑时的一致性结果。具有坐标耦合的一致性问题,在选取合适采样周期、阻尼因子和旋转角,可实现不同的集群运动^[15]。更多参考多智能体系统的一致性研究见随机网络拓扑^[16-17]、非线性系统^[18-20]、有限时间^[18, 21-22]、数据采样^[23-25]等方面的研究。旋转矩阵应用于一致性的研究很少,旋转矩阵在航天器姿态问题以及机器人技术等多个方面有着重要的应用,因此研究坐标耦合的多智能体系统的一致性具有重要的理论价值及实际应用价值。本文在以上基础上,通过引入时滞,从连续系统出发,研究了一类具有坐标耦合和处理时滞的二阶离散多智能体系统的一致性,给出了在上一时刻位移伴随和速度伴随的共同作用下,得到具有空间坐标耦合的集群系统的二阶一致性的充要条件并进行了证明。针对旋转角和离散步长等特征参数临界性与一致性收敛分析的关系,设计案例进行了验证,本文证明结论可为一致性分析提供重要判据。

1 处理时滞的离散二阶模型

本文考虑 n 个智能体组成的二阶连续系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中: $\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ 代表 t 时刻智能体 i 的位置和速度; $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ 代表控制输入。对系统(1)设计控制输入:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{x}_j(t - \tau_p - \tau_T) - \mathbf{x}_i(t - \tau_p)] + \\ & \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{v}_j(t - \tau_p - \tau_T) - \mathbf{v}_i(t - \tau_p)] \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

τ_p 是处理时滞(智能体处理数据的时间), τ_T 是传输时滞(信息从智能体传至另一个智能体的时间)。为了规范化处理时滞,令 $t = \tau_p s, \mathbf{R}_i(s) = \mathbf{x}_i(\tau_p s), \mathbf{V}_i(s) = \mathbf{v}_i(\tau_p s)$, 系统(1)约束控制输入式(2)得到以下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}}_i(s) = \tau_p \mathbf{V}_i(s) \\ \dot{\mathbf{V}}_i(s) = \tau_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{R}_j(s - 1 - \frac{\tau_T}{\tau_p}) - \mathbf{R}_i(s - 1)] + \\ \quad \gamma \tau_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{V}_j(s - 1 - \frac{\tau_T}{\tau_p}) - \mathbf{V}_i(s - 1)] \end{cases} \quad (3)$$

得到式(3)的离散形式:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i(k + 1) = \mathbf{R}_i(k) + T\tau_p \mathbf{V}_i(k) \\ \mathbf{V}_i(k + 1) = \mathbf{V}_i(k) + T\tau_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{R}_j(k - 1 - \frac{\tau_T}{\tau_p}) - \mathbf{R}_i(k - 1)] + \\ \quad T\tau_p \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{V}_j(k - 1 - \frac{\tau_T}{\tau_p}) - \mathbf{V}_i(k - 1)] \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{R}_i(k) = [x_i(k), y_i(k), z_i(k)]^T \in \mathbb{R}^3$; $\mathbf{V}_i(k) = [v_{xi}(k), v_{yi}(k), v_{zi}(k)]^T \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots$; T 为离散步长。在现代通信条件下,处理时滞远远大于传输时滞,即 $\tau_p \gg \tau_T$, 在本文工作中,忽略传输时滞,仅考虑处理时滞,也就是在式(4)中令 $\tau_p = \tau \neq 0, \tau_T = 0$, 得到以下系统:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i(k + 1) = \mathbf{R}_i(k) + T\tau_p \mathbf{V}_i(k) \\ \mathbf{V}_i(k + 1) = \mathbf{V}_i(k) + T\tau_p \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{R}_j(k - 1) - \mathbf{R}_i(k - 1)] + \\ \quad T\tau_p \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{C}[\mathbf{V}_j(k - 1) - \mathbf{V}_i(k - 1)] \end{cases} \quad (5)$$

其中:初值为 $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{R}_i^0, \mathbf{V}_i(0) = \mathbf{V}_i^0$ 和 $\mathbf{R}_i(-1) = \mathbf{R}_i^{-1}, \mathbf{V}_i(-1) = \mathbf{V}_i^{-1}, \mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^3$ 代表第 i 个智能体在空间中的位置, $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^3$ 代表其速度;常数 $a_{ij} \geq 0$ 表示智能体 j 对智能体 i 的作用强度; $\mathbf{R}_j(k) - \mathbf{R}_i(k)$ 和 $\mathbf{V}_j(k) - \mathbf{V}_i(k)$ 分别表示位移伴随项和速度伴随项; $\gamma > 0$ 用来控制系统对速度伴随项的依赖程度; τ 表示智能体处理数据的延迟。

为描述多智能体系统最终形成的样式,首先给出如下定义。

定义 对任意的初始值 $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{R}_i^0, \mathbf{V}_i(0) = \mathbf{V}_i^0$ 和 $\mathbf{R}_i(-1) = \mathbf{R}_i^{-1}, \mathbf{V}_i(-1) = \mathbf{V}_i^{-1}$, 如果式(5)的解 $\{\mathbf{R}_i(k), \mathbf{V}_i(k)\}$ 满足:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{R}_j(k) - \mathbf{R}_i(k)\| = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{V}_j(k) - \mathbf{V}_i(k)\| = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称多智能体系统式(5)二阶一致性达成。

先给出后面会用到的基本概念和引理。

$G = (V, E, A)$ 是由 n 个节点组成的有限非空集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 上的有向图, $E \subseteq V \times V$ 是边集, 边 $e_{ij} = (v_j, v_i) \in E$ 意味着节点 v_i 可以接受 v_j 节点的信息. A 是加权邻接矩阵, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 定义为 $a_{ij} \neq 0$, 如果 $e_{ij} \in E, a_{ij} = 0$; 如果 $e_{ij} \notin E$, 进一步 $a_{ii} = 0$ 对所有 i 成立. 那么, 多智能体系统的拓扑结构将由其对应的有向图 G 完全决定. 记拉普拉斯矩阵 $L = D - A$, 其中 $D = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}, c_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$.

对于拉普拉斯矩阵的性质, 可以总结为以下引理。

引理 1^[25] 若 L 为有向图 G 对应的拉普拉斯矩阵, 则有向图 G 具有有向生成树, 当且仅当 0 是矩阵 L 的单根, 并且非零特征值均具有正的实部. 此外, 存在各分量非负的 $p \in \mathbb{R}^n$ 使得 $p^T L = 0, p^T \mathbf{1}_n = 1$, 且 $L \mathbf{1}_n = 0$. 即 p 与 $\mathbf{1}_n$ 分别为矩阵 L 的零特征值所对应的左特征向量与右特征向量.

对于三维空间中的旋转矩阵 $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, 若已知其旋转轴和旋转角分别为 $a = [a_1, a_2, a_3]^T$ 及 $\theta \in [0, 2\pi)$, 以下引理给出旋转矩阵 C 的特征值和对应的特征向量的关系。

引理 2^[8] 已知旋转矩阵 $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 的旋转轴为 a (不妨设 a 为单位向量), 旋转角为 θ , 则 C 的三个特征值分别为 $\beta_1 = 1, \beta_2 = e^{i\theta}, \beta_3 = e^{-i\theta}$. 当 a_2, a_3 不全为零时, 可选取 C 的右特征向量为 $\kappa_1 = a, \kappa_2 = [a_2^2 + a_3^2, -a_1 a_2 + a_3 i, -a_1 a_3 a_2 i]^T, \kappa_3 = \bar{\kappa}_2$, 左特征向量为 $\rho_1 = \kappa_1, \rho_2 = \bar{\kappa}_2 / |\kappa_2|^2$, 其中 $\rho_3 = \bar{\kappa}_3 / |\kappa_3|^2, i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, $\bar{\cdot}$ 表示复数的共轭, 从而有 $\kappa_l^T \rho_l = 1, l = 1, 2, 3$.

2 一致性理论判据及分析

本节将通过矩阵特征值分析的方法构建多智能体系统式(5)的二阶一致性判据。

记 $R(k) = [R_1(k), R_2(k), \dots, R_n(k)]^T, V(k) = [V_1(k), V_2(k), \dots, V_n(k)]^T$, 可将多智能体系统式(5)化为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} R(k+1) \\ V(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3n} & T\tau I_{3n} \\ 0_{3n} & I_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(k) \\ V(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3n} & 0_{3n} \\ -T\tau L \otimes C & -\gamma T\tau L \otimes C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(k-1) \\ V(k-1) \end{bmatrix}$$

令 $Z(k) = [R(k)^T, R(k-1)^T, V(k)^T, V(k-1)^T]^T$, 将多智能体系统式(5)化为矩阵形式:

$$Z(k+1) = MZ(k) \tag{6}$$

其中, M 是一个 $12n \times 12n$ 阶矩阵, 即:

$$M = \begin{bmatrix} I_{3n} & 0_{3n} & T\tau I_{3n} & 0_{3n} \\ I_{3n} & 0_{3n} & 0_{3n} & 0_{3n} \\ 0_{3n} & -T\tau L \otimes C & I_{3n} & -T\tau \gamma L \otimes C \\ 0_{3n} & 0_{3n} & I_{3n} & 0_{3n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

此外, 记

$$\begin{aligned} \hat{R}(k) &= [R_2(k) - R_1(k), \dots, R_n(k) - R_1(k)]^T \\ \hat{V}(k) &= [V_2(k) - V_1(k), \dots, V_n(k) - V_1(k)]^T \\ \hat{Z}(k) &= [\hat{R}(k)^T, \hat{R}(k-1)^T, \hat{V}(k)^T, \hat{V}(k-1)^T]^T \end{aligned}$$

可将多智能体系统式(5)化为误差系统:

$$\hat{Z}(k+1) = W\hat{Z}(k) \tag{8}$$

其中, W 是一个 $12(n-1) \times 12(n-1)$ 阶矩阵, 即:

$$W = \begin{bmatrix} I_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} & T\tau I_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} \\ I_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} \\ 0_{3(n-1)} & -T\tau \tilde{L} \otimes C & I_{3(n-1)} & -T\tau \gamma \tilde{L} \otimes C \\ 0_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} & I_{3(n-1)} & 0_{3(n-1)} \end{bmatrix}$$

其中

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{22} - l_{12} & \dots & l_{2n} - l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} - l_{12} & \dots & l_{nn} - l_{1n} \end{bmatrix}$$

系统式(6)达成二阶一致性当且仅当系统式(8)是渐进稳定的。

引理 3 矩阵 M 如式(7)所定义, 则 0 是拉普拉斯矩阵 L 的单根, 当且仅当 1 是矩阵 M 的 6 重根。

证明: 计算矩阵 M 的特征方程, 则

$$\begin{aligned} & \det(\lambda I_{12n} - M) \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda - 1)I_{3n} & 0_{3n} & -T\tau I_{3n} & 0_{3n} \\ -I_{3n} & \lambda I_{3n} & 0_{3n} & 0_{3n} \\ 0_{3n} & T\tau L \otimes C & (\lambda - 1)I_{3n} & T\tau \gamma L \otimes C \\ 0_{3n} & 0_{3n} & -I_{3n} & \lambda I_{3n} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^3 \lambda [\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda(1 + T\tau \gamma u_i c_j) - T\tau \gamma u_i c_j + T^2 \tau^2 u_i c_j] = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^3 m_{ij}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

当 $i = 1$ 时, $u_1 = 0$ 为矩阵 L 的单根, 则

$$\prod_{j=1}^3 m_{1j}(\lambda) = \prod_{j=1}^3 \lambda^2 (\lambda - 1)^2 = 0$$

可知 $\lambda = 0, 1$ 是特征方程的 6 重根。反过来, 当 $\lambda = 1$ 是特征方程的 6 重根, 则

$$m_{ij}(1) = T^2 \tau^2 u_i c_j = 0$$

由于 $T, \tau, c_j \neq 0$, 故 $u_i = 0$ 为矩阵 L 的根, 由

充分性可知, $u_i = 0$ 为矩阵 L 的单根。 □

引理 4 降阶拉普拉斯矩阵 \tilde{L} 的特征值包括拉普拉斯矩阵 L 除 0 以外的所有特征值, 进一步, 矩阵 M 比矩阵 W 多 6 个 1 特征值和 6 个 0 特征值。

证明: 引理的第一部分根据文献[9]引理 1 可得, 由引理 3 可知,

$$\begin{cases} \det(\lambda I_{12n} - M) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^3 \lambda [\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda(1 + T\tau\gamma u_i c_j) - T\tau\gamma u_i c_j + T^2\tau^2 u_i c_j] = 0 \\ \det(\lambda I_{12(n-1)} - W) = \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^3 \lambda [\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda(1 + T\tau\gamma \tilde{u}_i c_j) - T\tau\gamma \tilde{u}_i c_j + T^2\tau^2 \tilde{u}_i c_j] = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\tilde{u}_i (i=2, \dots, n), u_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是矩阵 \tilde{L} 和矩阵 L 的特征值, 由引理 3 的讨论可知, 矩阵 M 比矩阵 W 多 6 个 1 特征值和 6 个 0 特征值。 □

引理 5 若 0 是拉普拉斯矩阵 L 的单根, 则 0 是矩阵 $L \otimes C$ 的 3 重根, 1 是矩阵 M 代数重数为 6, 几何重数为 3 的特征值, 1 特征值相应的右特征向量和广义右特征向量分别为:

$$\sigma_{l1} = (\mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$$

和

$$\sigma_{l2} = (\mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, -\mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$$

1 特征值相应的广义左特征向量和左特征向量分别为:

$$\eta_{l1} = (\mathbf{p}^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$$

$$\eta_{l2} = (\mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{p}^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$$

其中, $l=1, 2, 3$ 。

证明: 由克罗克内积性质可知, 若 0 是拉普拉斯矩阵 L 的单根, 则 0 是矩阵 $L \otimes C$ 的 3 重根, 由引理 4 可知, 1 是矩阵 M 的特征值, 代数重数为 6。

假设 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_a^T, \mathbf{w}_b^T, \mathbf{w}_c^T, \mathbf{w}_d^T)^T$ 是矩阵 M 的 1 特征值的右特征向量, 则下式成立:

$$M\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_a \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3n} & \mathbf{0}_{3n} & T\tau I_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \\ I_{3n} & \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{3n} & -T\tau L \otimes C & I_{3n} & -T\tau\gamma L \otimes C \\ \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} & I_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_a \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_d \end{bmatrix}$$

可得: $\mathbf{w}_a + T\tau\mathbf{w}_c = \mathbf{w}_a; \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_b; -T\tau L \otimes C\mathbf{w}_b + \mathbf{w}_c - T\tau\gamma L \otimes C\mathbf{w}_d = \mathbf{w}_c; \mathbf{w}_c = \mathbf{w}_d$ 。

易知 $\mathbf{w}_c = \mathbf{w}_d = \mathbf{0}$ 和 $-T\tau L \otimes C\mathbf{w}_b = \mathbf{0}$, 由此可知, $\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_b$ 一定是 $L \otimes C$ 的右特征向量, 所以 1 特征值的几何重数为 3, 且 $\mathbf{w} = (\mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$ 。

假设 $\bar{\mathbf{w}}$ 是矩阵 M 的 1 特征值的广义右特征向量, 则 $M\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$, 直接计算可得 $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{0}_n^T \otimes \xi_l^T, -\mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T, \mathbf{1}_n^T \otimes \xi_l^T)^T$ 。同理可得矩阵 M 的 1 特征值的左特征向量和广义左特征向量。 □

接下来, 需要一个三阶复系数方程

$$x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0 \quad (10)$$

稳定的判据, 其中 $c_i = a_i + b_i i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, 3$ 。

引理 6^[26] 方程(10)的所有根具有负实部, 当且仅当 $a_1 > 0, B_1 = a_1^2 a_2 - a_1 a_3 + b_2(a_1 b_1 - b_2) > 0, B_2 = a_3 B_1^2 + b_2 H B_1 - a_1 H^2 > 0$, 其中 $H = a_1^2 b_3 - a_1 a_3 b_1 + a_3 b_2$ 。

定理 1 系统式(5)达成二阶一致性, 当且仅当矩阵 M 的 1 特征值代数重数是 6, 几何重数是 3, 矩阵 M 的其余特征值在单位圆内, 特别地, 如果二阶一致性达成, 则有下式成立:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|R_i(k) - (R_\infty + kV_\infty)\| = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \|V_i(k) - V_\infty\| = 0, i=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其中, $R_\infty = (\mathbf{p}^T \otimes I_3)R(0), V_\infty = (\mathbf{p}^T \otimes I_3)V(0), \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ 是拉普拉斯矩阵 L 的 0 特征值的左特征向量, 且满足 $p_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n, \mathbf{p}^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1}$ 。

证明(充分性): 由引理 5, 存在一个非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{12n \times 12n}$ 使得:

$$B = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & J \end{bmatrix}$$

其中, J 是由矩阵 M 除 1 以外的特征值组成的约当块。所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$, 由引理 5 可知, P 的前 6 列为 $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, P^{-1}$ 的前 6 行为 $\eta_{21}, \eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12}, \eta_{23}, \eta_{13}$, 直接计算可得:

$$\begin{aligned} P^{-1}B^k P &= \sum_{l=1}^3 \sigma_{l1} \eta_{l1}^T + k \sigma_{l1} \eta_{l2}^T + \sigma_{l2} \eta_{l2}^T \\ &= \sum_{l=1}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} & k \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} & (k-1) \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \kappa_l \rho_l & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} & k\mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} & (k-1)\mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{Z}(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{M}^k \mathbf{Z}(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^k \mathbf{P} \mathbf{Z}(0)$$

即

$$\mathbf{R}(k) = (\mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{R}(0) + k(\mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{V}(0)$$

$$\mathbf{V}(k) = (\mathbf{1}_n^T \mathbf{p}^T \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{V}(0)$$

(必要性) 通过反证法来证明, 假设矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值代数重数为 6, 几何重数为 3, 矩阵 \mathbf{M} 的其余特征值在单位圆内这一条件不满足。由于矩阵 \mathbf{L} 至少有一个 0 特征值, 由引理 3, 矩阵 \mathbf{M} 至少有 6 个 1 特征值, 代数重数为 6, 几何重数为 3, 所以, 有以下三种情况需要讨论:

第一种情况: 矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值代数重数是 6, 几何重数是 3, 存在至少一个特征值不在单位圆内;

第二种情况: 矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值代数重数大于 6, 其余特征值均在单位圆内;

第三种情况: 矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值代数重数大于 6, 还至少存在一个 1 特征值不在单位圆内。

对第一种情况, 由引理 4, 若矩阵 \mathbf{M} 有一个特征值不在单位圆内, 则矩阵 \mathbf{W} 也有一个特征值不在单位圆内, 系统式 (8) 的渐进稳定性不能达成, 系统式 (6) 的二阶一致性不能达成, 与已知矛盾。同样可以证明第二、三种情况。 □

定理 1 中的代数条件不容易被验证。对于一个给定的网络结构, 提出了如下选择定理来选择适当的控制参数和离散步长, 确保达成二阶一致性。

定理 2 令 $T, \tau > 0$, 系统式 (5) 达成二阶一致性, 当且仅当有向图 \mathbf{G} 具有有向生成树, 同时满足以下条件:

$$\begin{cases} A_i(T, \tau, \gamma) = \gamma - \frac{3T\tau}{2} > 0 \\ B_i(T, \tau, \gamma, \theta) = a_1^2 a_2 - a_1(3a_1 + a_2 + 5) - b_2^2 > 0 \\ C_i(T, \tau, \gamma, \theta) = (3a_1 + a_2 + 5)B^2 + b_2 HB - aH^2 > 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中, $i = 2, 3, \dots, n$, $a_1 = \frac{2\gamma}{T\tau} - 3$, $a_2 = -\frac{4\gamma}{T\tau} + 3 + \frac{4\cos(\arg(u_i) + \theta)}{T^2\tau^2|u_i|}$, $b_2 = \frac{4\sin(\arg(u_i) + \theta)}{T^2\tau^2|u_i|}$, $H = a_1^2 b_2 - (3a_1 + a_2 + 5)b_2$ 。

证明(充分性): 若系统式 (5) 能达成二阶一致性, 由定理 1 可知, 矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值代数重数为 6, 几何重数为 3, 其余特征值均在单位圆内, 由引理 3, 拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的 0 特征值为单根, 也就是说, 有向图 \mathbf{G} 具有有向生成树。

由式 (9) 可知, 0 是矩阵 \mathbf{W} 的特征值, 对剩余的特征多项式应用双线性变换 $s = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$, 令 $\alpha = T^2\tau^2 u_i c_i$, 得到新的多项式为:

$$f_i(s) = (\lambda - 1)^3 \left[\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)^3 - 2 \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)^2 + \lambda \left(1 + \frac{2\gamma}{T\tau} \right) - \frac{2\gamma}{T\tau} + \alpha \right]$$

$$= \lambda^3 \alpha + \lambda^2 \left(\frac{2\gamma}{T\tau} - 3\alpha \right) + s \left(4 - \frac{4\gamma}{T\tau} + 3\alpha \right) + 4 + \frac{2\gamma}{T\tau} - \alpha$$

定义

$$\varphi(s) = \frac{f_i(s)}{\alpha} = s^3 + s^2 \left(\frac{2\gamma}{T\tau} - 3 \right) + s \left(\frac{4}{\alpha} - \frac{4\gamma}{T\tau} + 3 \right) + \frac{4}{\alpha} + \frac{2\gamma}{T\tau} - 1 \quad (12)$$

由双线性函数的性质可知, 式 (9) 所有的根在单位圆内, 当且仅当式 (12) 的所有根具有负实部对 $i = 2, 3, \dots, n$ 成立, 由 (12) 式可知: $a_1 + b_1 i = \frac{2\gamma}{T\tau} - 3$, $a_2 + b_2 i = \frac{4}{\alpha} - \frac{4\gamma}{T\tau} + 3$, $a_3 + b_3 i = \frac{4}{\alpha} + \frac{2\gamma}{T\tau} - 1$ 。

固定 i , 容易得到:

$$a_1 = \frac{2\gamma}{T\tau} - 3, b_1 = 0, a_2 = \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\alpha} \right) - \frac{4\gamma}{T\tau} + 3 = -\frac{4\gamma}{T\tau} + 3 + \frac{4\cos(\arg(u_i) + \theta)}{T^2\tau^2|u_i|}, b_2 = b_3 = \operatorname{Im} \left(\frac{4}{\alpha} \right) = \frac{4\sin(\arg(u_i) + \theta)}{T^2\tau^2|u_i|}, a_3 = \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\alpha} \right) + \frac{2\gamma}{T\tau} - 1 = \frac{2\gamma}{T\tau} - 1 + \frac{4\cos(\arg(u_i) + \theta)}{T^2\tau^2|u_i|} = 3a_1 + a_2 + 5。$$

由引理 4, 式 (12) 所有根具有负实部对 $i = 2, 3, \dots, n$, 当且仅当条件式 (11) 成立, 所以充分性成立。

(必要性) 若条件式 (11) 成立, 式 (12) 的所有根在单位圆内对 $i = 2, 3, \dots, n$ 成立, 由引理 4 可知, 矩阵 \mathbf{M} 的特征值除 0 和 1 以外, 都在单位圆内。此外, 由于有向图 \mathbf{G} 具有有向生成树, 可知拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的特征值 0 是单根, 由引理 3 可知, 矩阵 \mathbf{M} 的 1 特征值的代数重数是 6, 几何重数是 3, 由定理 1 可知, 系统式 (5) 会达成二阶一致性。 □

3 算例

本节通过数值模拟验证本文的主要结论,并对结论的应用场景进行分析。

例1 假设智能体数 $n = 4$,反映系统结构的拉普拉斯矩阵 L 选取为如下形式:

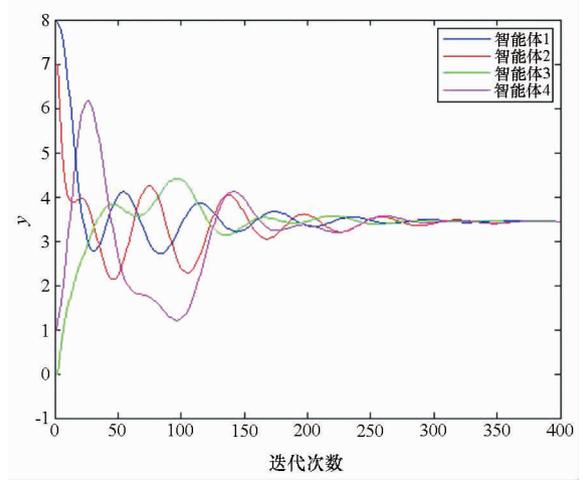
$$L = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & -1.1 & -0.4 \\ -1.2 & 1.2 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.5 & 0.6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初始位置 $R(0)$ 和初始速度 $V(0)$ 选取如下:

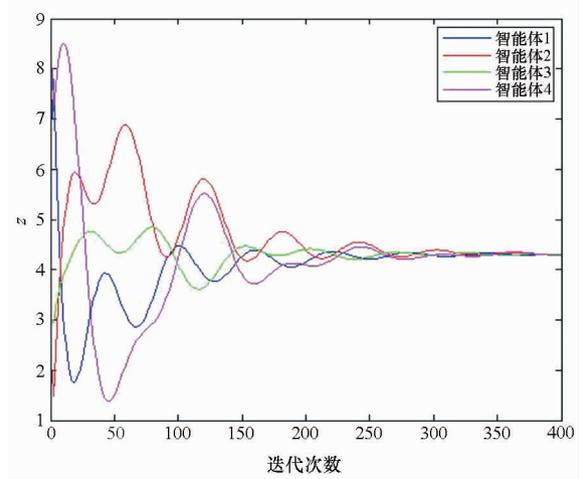
$$R(0) = (4, 2, 9, 1, 4, 1, 3, 4, 6, 3, 6, 7)$$

$$V(0) = (7, 8, 7, 4, 7, 2, 7, 0, 3, 0, 1, 8)$$

经过计算可知,矩阵 L 的特征值为 $u_1 = 0$, $u_2 = 0.9525$, $u_3 = 1.6737 + 0.4691i$, $u_4 = 1.6737 - 0.4691i$ 。矩阵 L 的 0 特征值的左特征向量为 $(0.2502, 0.1911, 0.4587, 0.1001)$,由定理1可知,达成二阶一致性后,最终速度值为 $(5.7262, 3.4392, 4.3099)$ 。由定理2可知,当 $T = 0.01$, $\tau = 3$, $\gamma = 2$, $\theta^c = 57.1393^\circ$ 为系统临界值。当 $\theta(50^\circ) < \theta^c(57.1393^\circ)$ 时,计算可知,当 $i = 2, 3, 4, A_i(0.01, 3, 2) > 0, B_i(0.01, 3, 2, 50) > 0, C_i(0.01, 3, 2, 50) > 0$ 满足条件式(11),由定理2可知,系统式(5)将达成二阶一致性,如图1所示。而当 $\theta(60^\circ) > \theta^c(57.1393^\circ)$ 时,通过直接计算可知,当 $i = 3, C_3(0.01, 3, 2, 60) < 0$ 不满足条件式(11),由定理2可知,系统式(5)发散,如图2所示。



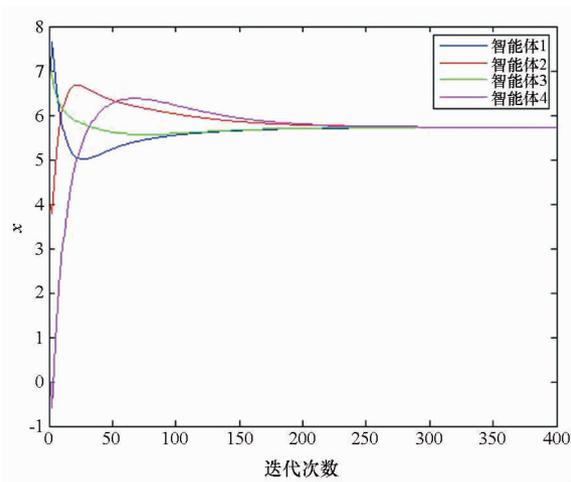
(b) y 轴方向速度
(b) Velocity in y-axis



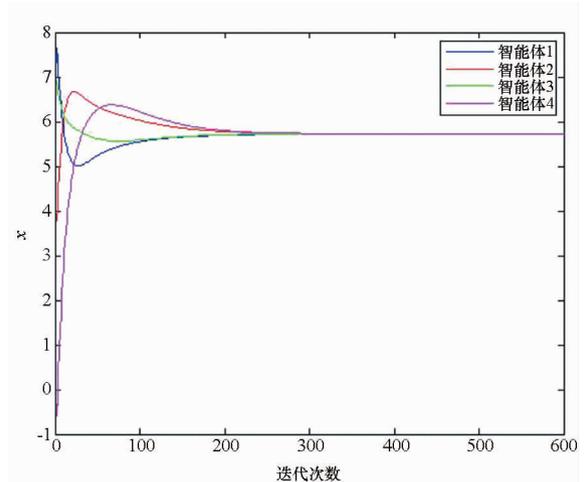
(c) z 轴方向速度
(c) Velocity in z-axis

图1 $n = 4, \theta < \theta^c$ 时的速度收敛

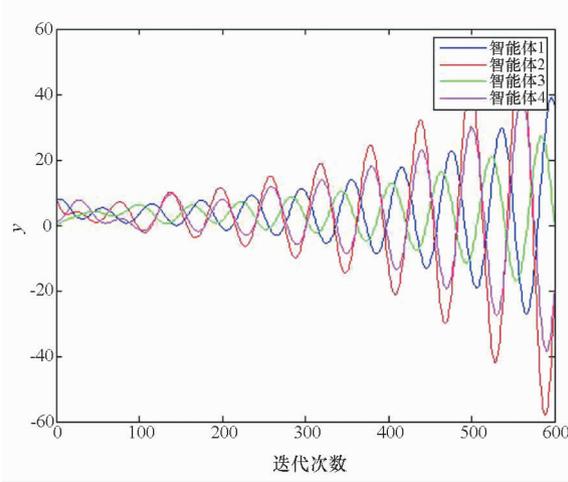
Fig. 1 Velocity convergence when $n = 4, \theta < \theta^c$



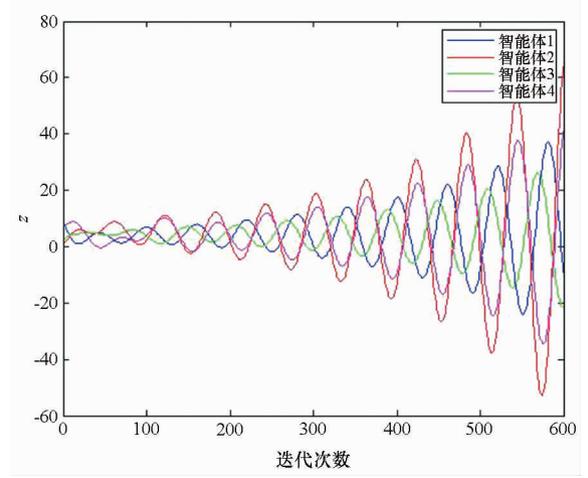
(a) x 轴方向速度
(a) Velocity in x-axis



(a) x 轴方向速度
(a) Velocity in x-axis



(b) y 轴方向速度
(b) Velocity in y-axis



(c) z 轴方向速度
(c) Velocity in z-axis

图 2 $n=4, \theta > \theta^c$ 时的速度收敛

Fig. 2 Velocity convergence when $n=4, \theta > \theta^c$

例 2 在数值模拟中假设智能体数 $n=30$, 构建系统结构的拉普拉斯矩阵 L 选取为如下形式:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 9 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

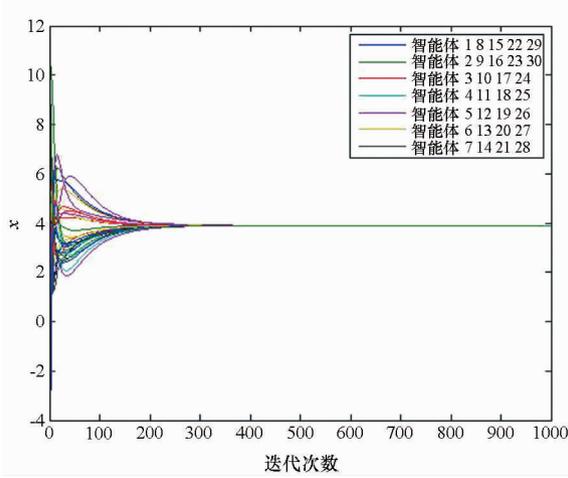
初始位置和初始速度取:

$$R(0) = (8, 9, 1, 9, 6, 1, 3, 5, 10, 10, 2, 10, 10, 5, 8, 1, 4, 9, 8, 10, 7, 0, 8, 9, 7, 8, 7, 4, 7, 2, 7, 0, 3, 0, 1, 8, 7, 3, 10, 0, 4, 4, 8, 8, 2, 5, 4, 6, 7, 8, 3, 7, 7, 2, 1, 5, 10, 3, 6, 2, 8, 3, 5, 7, 9, 10, 5, 1, 1, 3, 8, 3, 8, 2, 9, 3, 2, 3, 6, 5, 4, 8, 6, 5, 9, 3, 8, 8, 4, 6)$$

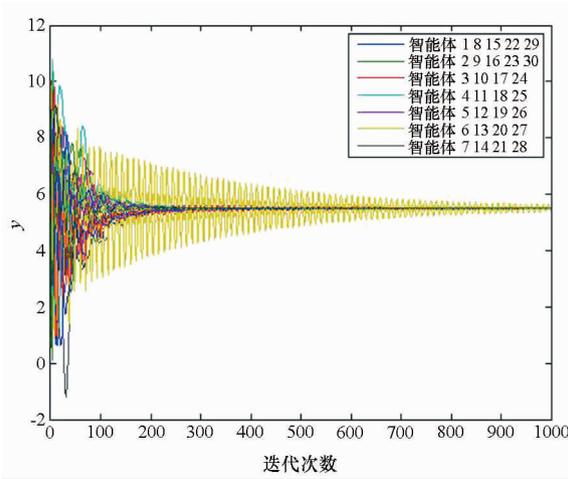
$$V(0) = (5, 3, 7, 2, 7, 2, 4, 6, 8, 1, 9, 8, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 8, 8, 6, 4, 8, 5, 4, 9, 9, 6, 6, 6, 2, 3, 5, 2, 8, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 9, 4, 2, 9, 10, 4, 1, 3, 4, 6, 3, 6, 7, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 1, 3, 8, 0, 9, 7, 5, 6, 2, 5, 10, 5, 5, 2, 5, 6, 7, 4, 4, 10, 0, 9, 9, 8, 1, 3, 3, 7, 1, 7)$$

经过计算可知,当 $i = 1$ 时,矩阵 L 的特征值 $u_1 = 0$,当 $2 \leq i \leq 30$ 时,矩阵 L 的特征值 $\text{Re}(u_i) >$

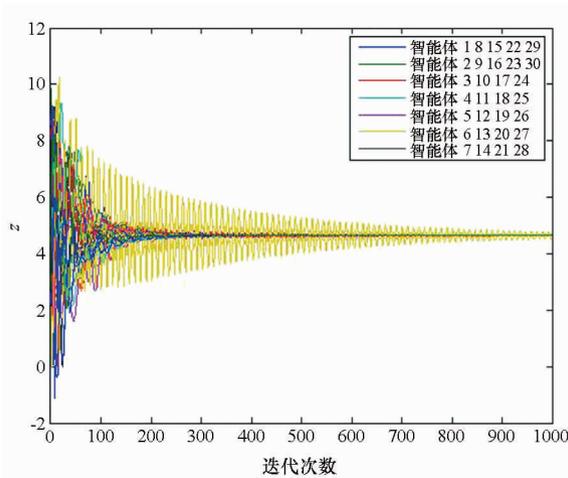
0,系统具有有向生成树,由定理 2 可知, $T=0.01$, $\tau=3, \gamma=2, \theta^c = 40.5473^\circ$ 为系统临界值。当 $\theta(40^\circ) < \theta^c(40.5473^\circ)$ 时,计算可知,当 $i = 2, \dots, 30$, $A_i(0.01, 3, 2) > 0$, $B_i(0.01, 3, 2, 40) > 0$, $C_i(0.01, 3, 2, 40) > 0$ 成立,由定理 2 可知,系统式(5)将达成二阶一致性,如图 3 所示。假设在执行任务的过程中,智能体 7 和 23 损毁,导致系统拉普拉斯矩阵第 7、23 列数据全部变成 0,影响智能体 16 收不到所有智能体所发的信息,破坏了系统有向生成树的结构,即使与图 3 取同样的参数值,系统式(5)仍发散,如图 4 所示。另外,如果是智能体 6 和 22 损毁,没有破坏系统有向生成树的结构,则不影响群体的性能。取与图 3 同样的参数值,系统式(5)收敛,如图 5 所示。



(a) x 轴方向速度
(a) Velocity in x -axis



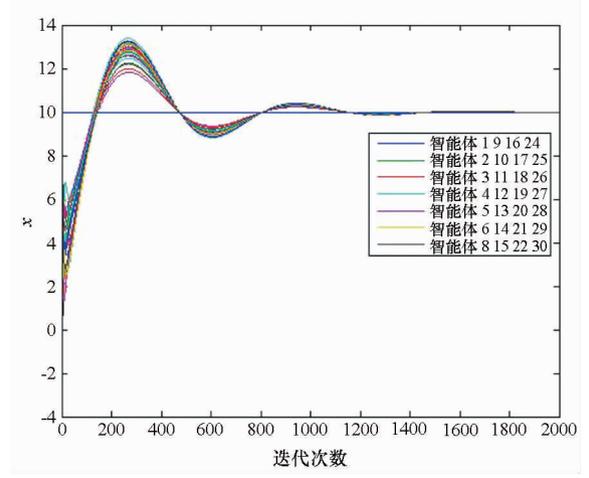
(b) y 轴方向速度
(b) Velocity in y -axis



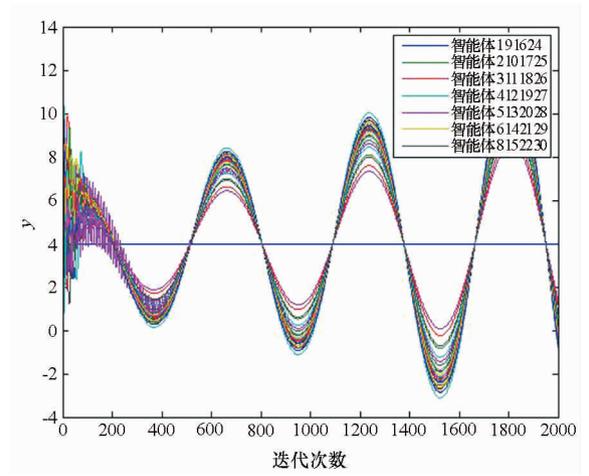
(c) z 轴方向速度
(c) Velocity in z -axis

图 3 $n = 3, \theta < \theta^c$ 时的速度收敛

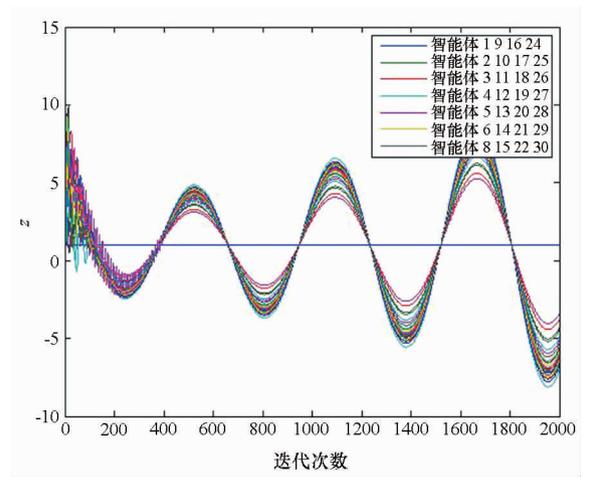
Fig. 3 Velocity convergence when $n = 3, \theta < \theta^c$



(a) x 轴方向速度
(a) Velocity in x -axis



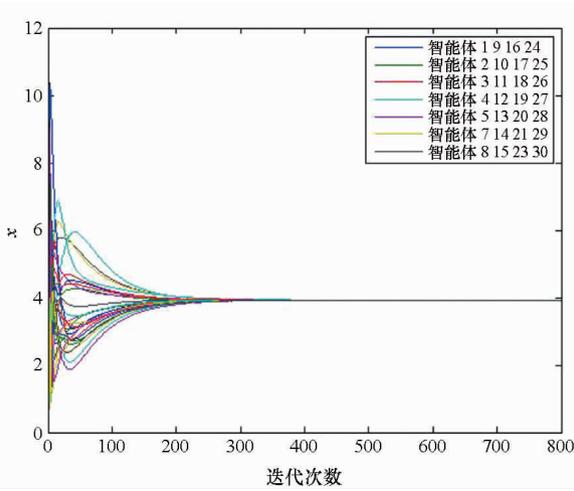
(b) y 轴方向速度
(b) Velocity in y -axis



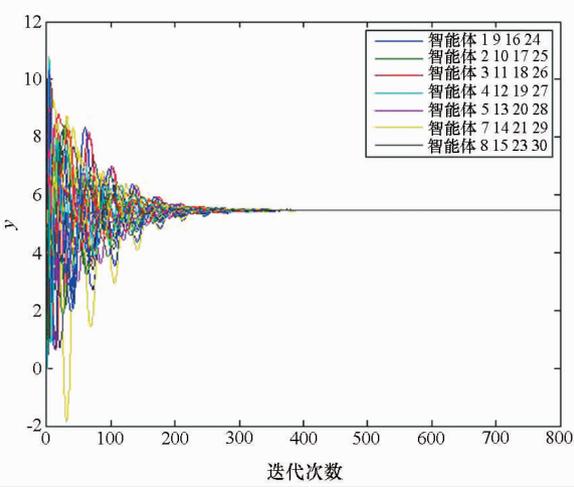
(c) z 轴方向速度
(c) Velocity in z -axis

图 4 智能体 7, 23 损毁后的速度发散

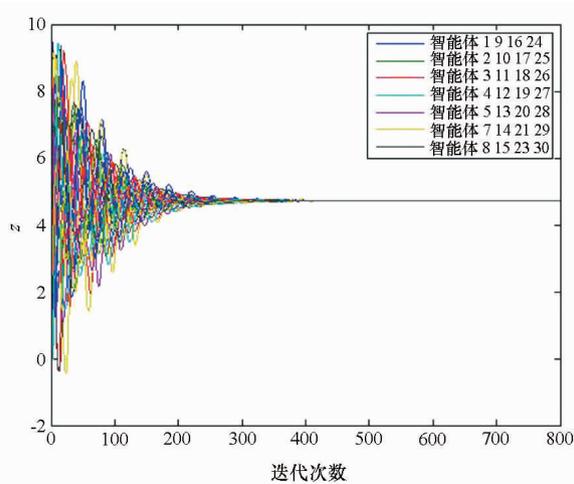
Fig. 4 Velocity divergence when agent 7 and 23 were damaged



(a) x 轴方向速度
(a) Velocity in x -axis



(b) y 轴方向速度
(b) Velocity in y -axis



(c) z 轴方向速度
(c) Velocity in z -axis

图 5 智能体 6,22 损毁后的速度收敛

Fig. 5 Velocity convergence when agent 6 and 22 were damaged

4 结论

本文讨论了带坐标耦合和处理时滞的二阶离散多智能体系统的一致性问题,证明了当 0 是拉普拉斯矩阵的单根时,旋转角小于由代数方程确定的临界值时,系统会出现二阶一致性;而旋转角、离散步长大于临界值时,系统发散。本文针对特征参数的临界值结论,可为控制领域一致收敛分析提供理论支撑。

参考文献 (References)

- [1] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17: 1002 – 1033.
- [2] Xie G M, Wang L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10/11): 941 – 959.
- [3] Yu W, Chen G, Ming C. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems [J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089 – 1095.
- [4] Zhu J, Tian Y P, Kuang J. On the general consensus protocol of multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(5/6/7): 701 – 715.
- [5] Yu W, Chen G, Cao M, et al. Delay-induced consensus and quasi-consensus in multi-agent dynamical systems [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2013, 60(10): 2679 – 2687.
- [6] Hou W, Fu M, Zhang H, et al. Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay [J]. Automatica, 2017, 75: 293 – 298.
- [7] Ren W. Collective motion from consensus with cartesian coordinate coupling [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1330 – 1335.
- [8] 刘易成, 李翔, 聂芬. 具有空间坐标耦合的二阶集群模型分析 [J]. 国防科技大学学报, 2017, 39(6): 118 – 125. LIU Yicheng, LI Xiang, NIE Fen. Analysis for second-order collective model with spatial coordinates coupling [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2017, 39(6): 118 – 125. (in Chinese)
- [9] Zhang Y, Tian Y P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology [J]. Automatica, 2009, 45(5): 1195 – 1201.
- [10] Lin P, Jia Y. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies [J]. Automatica, 2009, 45(9): 2154 – 2158.
- [11] Xie D, Wang S. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with fixed topology [J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2012, 387(1): 8 – 16.
- [12] Gao Y, Ma J, Zuo M, et al. Consensus of discrete-time second-order agents with time-varying topology and time-varying delays [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(8): 2598 – 2608.

- [13] Zhu J. Consensus of discrete time second-order multiagent systems with time delay [J]. *Discrete Dynamics in Nature Society*, 2012(12): 1951 – 1965.
- [14] Cao Y, Wei R. Multi-vehicle coordination for double-integrator dynamics under fixed undirected/directed interaction in a sampled-data setting [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(9): 987 – 1000.
- [15] Wang Y, Sun Q. Sampled-data collective rotating consensus for second-order networks under directed interaction [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(5): 1057 – 1066.
- [16] Liu X L, Xu B G, Xie L H. Mean square consensus control for second order multi-agent systems under fixed topologies and measurement noises [J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 403/404/405/406/407/408: 4036 – 4043.
- [17] Wu Z, Peng L, Xie L, et al. Stochastic bounded consensus tracking of second-order multi-agent systems with measurement noises and sampled-data [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2012, 68(3/4): 261 – 273.
- [18] Zhao L, Jia Y. Finite-time consensus for second-order stochastic multi-agent systems with nonlinear dynamics [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 270: 278 – 290.
- [19] Qian Y, Wu X, Lü J H, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics and time delay [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 495 – 503.
- [20] Cao Y, Wei R. Finite-time consensus for second-order multi-agent networks with inherent nonlinear dynamics under an undirected fixed graph [C]// *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, 2011: 3452 – 3457.
- [21] Xu X, Wang J. Finite-time consensus tracking for second-order multiagent systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(4): 1246 – 1250.
- [22] Sun F, Guan Z H. Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent system [J]. *International Journal of Systems Science*, 2013, 44(4): 727 – 738.
- [23] Xie G, Liu H, Wang L, et al. Consensus in networked multi-agent systems via sampled control; fixed topology case [C]// *Proceedings of American Control Conference*, 2009: 3902 – 3907, 4525 – 4530.
- [24] Cao Y, Ren W. Multi-vehicle coordination for double-integrator dynamics under fixed undirected/directed interaction in a sampled-data setting [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(9): 987 – 1000.
- [25] Agaev R P, Chebotarev P Y. The matrix of maximal outgoing forests of a digraph and its applications [J]. *Institute of Control Sciences*, 2000, 61(9): 15 – 43.
- [26] 范弘毅. 复常数线性系统稳定性的新判据 [J]. *沈阳建筑工程学院学报*, 1997, 13(1): 96 – 100.
FAN Hongyi. New stability criterion for linear system with constant complex coefficients [J]. *Journal of Shenyang Architecture and Civil Engineering University*, 1997, 13(1): 96 – 100. (in Chinese)