

基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法*

王平波¹, 马凯^{1,2}, 武彩³

(1. 海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033; 2. 海军潜艇学院 航海观通系, 山东 青岛 266000;

3. 国网山东省电力公司潍坊供电公司, 山东 潍坊 261021)

摘要:针对传统最小均方误差(Least Mean Square, LMS)自适应滤波算法由于步长固定,在解决稳态误差与收敛性之间的关系时,始终处于矛盾状态的问题,在对传统的固定步长 LMS 自适应滤波算法分析的基础上,根据变步长 LMS 自适应滤波算法的步长调整原则,通过构造步长因子与误差信号的非线性函数,提出了一种基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 自适应滤波算法,并分析了参数取值对算法性能的影响。针对实际信号处理过程中参考信号难以选取的问题,提出了一种基于分裂阵的参考信号选取方法。理论和海试数据分析结果表明:该算法的收敛速度和稳态误差明显优于固定步长的 LMS 自适应滤波算法和基于 Sigmoid 函数的变步长 LMS 自适应滤波算法。

关键词:自适应滤波;最小均方误差;变步长;正态分布曲线;Sigmoid 函数

中图分类号:TP301.6 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2020)05-016-07

Segmented variable-step-size LMS algorithm based on normal distribution curve

WANG Pingbo¹, MA Kai^{1,2}, WU Cai³

(1. College of Electronic Engineering, Naval Engineering University, Wuhan 430033, China;

2. Navigation and Observation Department, Navy Submarine Academy, Qingdao 266000, China;

3. State Grid Shandong Power Company Weifang Power Supply Company, Weifang 261021, China)

Abstract: The Traditional LMS(least mean square) adaptive filtering algorithm is always in a contradiction state because it has a fixed step size and resolves the relationship between steady-state error and convergence. Based on the analysis of the filtering algorithm, according to the step-size adjustment principle of the variable-step LMS adaptive filter algorithm, a segmented variable step size LMS adaptive filtering algorithm based on the normal distribution curve was proposed by constructing the nonlinear function of the step-size factor and the error signal, and the influence of the parameter value on the performance of the algorithm was analyzed. Aiming at the problem of difficult selection of reference signal in actual signal processing, a method of reference signal selection based on the splitting array was proposed. The theoretical and sea trial data analysis results show that the convergence speed and steady-state error of the proposed algorithm are obviously better than the fixed-step LMS adaptive filtering algorithm and the variable step size LMS adaptive filtering algorithm based on the Sigmoid function.

Keywords: adaptive filtering; minimum mean square error; variable step size; normal distribution curve; Sigmoid function

最小均方误差算法(Least Mean Square, LMS)最早是由 Windrow 和 Hoff 提出的,在雷达、声呐和心电探测^[1-3]等领域应用较为广泛。LMS 算法可以对权系数进行自适应的调节^[4],但固定步长的 LMS 算法在收敛速度和稳态误差之间存在矛盾^[5-7]。针对此矛盾,许多学者提出了变步长 LMS 算法,在初始阶段采用大步长因子加快收敛速度,收敛后采用小补偿因子降低稳态误差。其中代表算法有基于 Sigmoid 函数的变步长 LMS 自适应滤波(Sigmoid-Variable-Step Least Mean Square, SVS-LMS)算法^[8-10],该算法能同时获得

较快的收敛速度和较小的稳态误差,但其步长因子在稳态阶段变化太快,导致稳态误差较大。并且在处理实际的实验数据时,通常会遇到参考信号难以选取的问题,本文针对上述情况提出一种基于正态分布曲线的变步长 LMS 自适应算法。

1 变步长 LMS 算法

根据自适应滤波器原理框图,如图 1 所示, LMS 算法的迭代公式可写为:

$$y(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{W}(n) \quad (1)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2)$$

* 收稿日期:2019-03-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(511009218)

作者简介:王平波(1979—),男,山东五莲人,教授,博士,博士生导师, E-mail: blackberet@163.com

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n)d(n) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{x}(n)$ 为 n 时刻的输入信号矢量; $\mathbf{W}(n)$ 为 n 时刻自适应滤波器的权值; $d(n)$ 为 n 时刻参考信号; $e(n)$ 为 n 时刻的误差; μ 为算法的步长因子,决定算法的收敛速度和稳态误差^[8]。

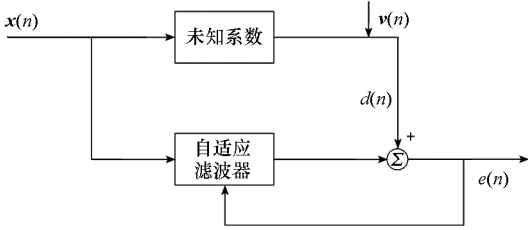


图1 自适应滤波器原理框图

Fig.1 Principle block diagram of adaptive filter

图1中的 $v(n)$ 为干扰信号,信号通过未知系统时会有叠加部分干扰,引起算法失调。为解决固定步长 LMS 算法在收敛速度和稳态误差之间的矛盾,提出了一系列变步长 LMS 算法,其中覃景繁等^[12]提出的基于 Sigmoid 函数 SVS-LMS 算法是一种比较经典的算法,其步长因子为

$$\mu(n) = \beta \left[\frac{1}{1 + \exp(-\alpha |e(n)|)} - 0.5 \right] \quad (4)$$

式中, α 和 β 为控制函数的陡峭程度和取值范围。

由式(4)可得,当 $\mu > \beta/2$ 并且 $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ 时,算法收敛。与固定步长 LMS 算法相比,SVS-LMS 算法的步长因子 μ 随着误差 $e(n)$ 的减小而减小,因此在初始阶段收敛速度较快,当收敛后 $\mu(n)$ 达到最小,约等于0。但如图2、图3所示,步长因子函数底部较为尖锐,在算法收敛阶段, $\mu(n)$ 变化较快,会导致稳态误差变大,且计算量较大。

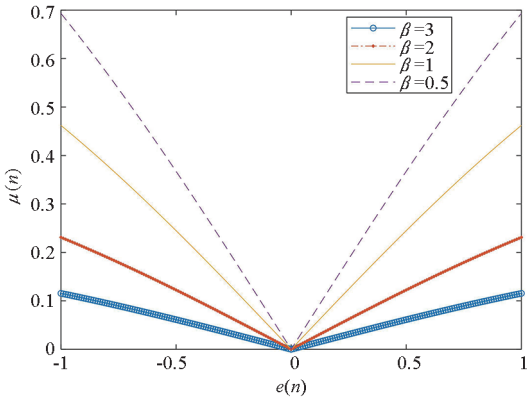


图2 β 取值对误差变化的影响

Fig.2 Influence of the value of β on the error variation

2 本文算法

基于变步长 LMS 的设计原则,提出一种基于

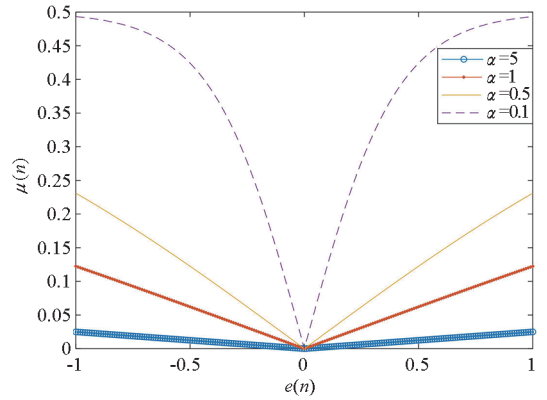


图3 α 取值对误差变化的影响

Fig.3 Influence of the value of α on the error variation

正态分布曲线的变步长 LMS 算法。如图4所示,相比于 Sigmoid 函数,正态分布曲线顶部较为平滑,且具有较快的上升和下降速度。正态分布的概率密度函数为

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

对式(5)作进一步变换,并引入 a 、 b 、 c 三个控制参数得

$$\mu(n) = c[1 - \exp(-a |e(n)|^b)] \quad (6)$$

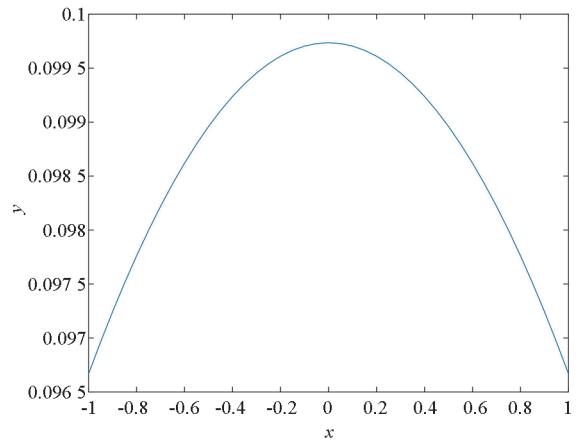


图4 正态分布曲线

Fig.4 Normal distribution curve

2.1 参数 a 对算法的影响

图5为当 $b = 2$ 且 $c = 1$, a 的值为1、2、3、4时,步长因子随误差的变化曲线。从图中可以看出,当误差较大时,步长因子较大,收敛速度较快;在稳态阶段,步长因子变化较为平缓,有利于减小稳态误差。同时,当 a 变大时,曲线变陡,收敛速度变快,即 a 控制了算法收敛速度。

2.2 参数 b 对算法的影响

图6为当 $a = 1$ 且 $c = 1$, b 的值为2、3、4、5时,步长因子随误差的变化曲线。从图中可以看出, b 增大时,函数底部变化较为平缓,即步长因

子变化越平缓,算法的稳态误差越小,因此 b 控制了算法的稳态误差。

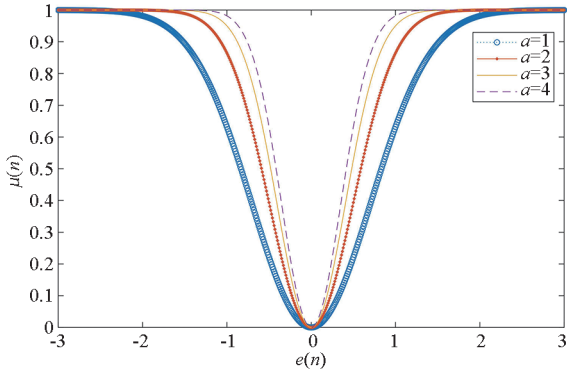


图 5 a 的取值对误差变化的影响

Fig. 5 Influence of the value of a on the variation of error

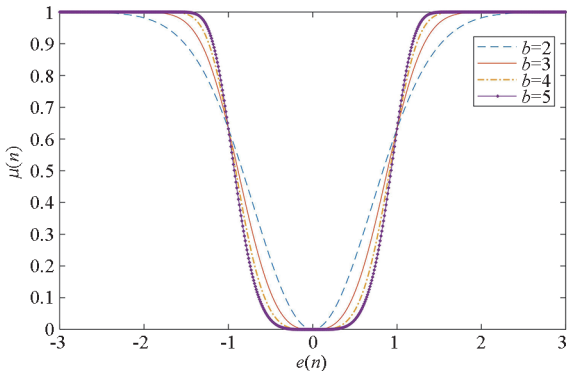


图 6 b 的取值对误差变化的影响

Fig. 6 Influence of the value of b on the variation of error

2.3 参数 c 对算法的影响

图 7 为当 $a = 1$ 且 $b = 2$, c 的值为 1、2、3、4 时,步长因子随误差的变化曲线。从图 7 中可以看出, c 增大时,函数的最大值增大,算法的收敛速度变快,即 c 控制了算法的收敛速度。但 c 的取值不能无限大,它受算法的收敛条件影响。由 LMS 算法的收敛条件可知

$$0 < \mu < 1/\lambda_{\max} \tag{7}$$

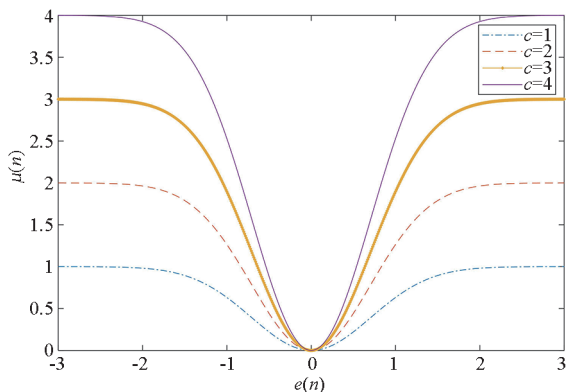


图 7 c 的取值对误差变化的影响

Fig. 7 Influence of the value of c on the variation of error

当 $e(n) \rightarrow \infty$ 时, $\mu(n) \approx c$, 则 c 的取值范围为

$$0 < c < 1/\lambda_{\max} \tag{8}$$

综上分析可得,在处理信号时,应根据实际情况选择合适的参数,以获得较快的收敛速度和较小的稳态误差。

3 计算机仿真及海试数据验证

3.1 计算机仿真

仿真中,输入信号为高斯白噪声加单频正弦信号,均值为 0,方差为 1,信号位于第 1000 个采样点处,信噪比为 0 dB,参考信号是均值为 0、方差为 1 的高斯白噪声,每次仿真均进行 200 次蒙特卡洛仿真。未知系统的权系数为 [0.70, 0.42], 在第 500 个采样点处未知系统发生突变,权系数突变为 [0.31, 0.25]。

图 8 为三种算法的均方误差图。其中,每种算法的步长因子及参数都经过大量的仿真实验确定,固定步长 LMS 滤波算法的步长因子 $\mu = 0.01$, SVS-LMS 算法的参数 $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$, 本文提出的算法 $a = 5, b = 1, c = 0.12$ 。从图中可以看出,在算法的收敛速度上本文算法优于 SVS-LMS 算法及 LMS 算法;当未知系统突变时,本文算法性能最优,SVS-LMS 算法次之,LMS 算法最差。

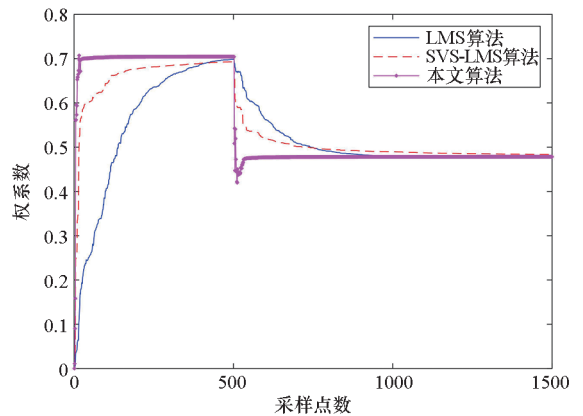


图 8 三种算法的权系数收敛曲线

Fig. 8 Convergence curve of three algorithms's weight coefficient

图 9 为固定步长 LMS 算法、SVS-LMS 算法、本文算法的均方误差图。从图中可以看出,基于正态分布曲线的算法的稳态误差最小,SVS-LMS 算法较大,固定步长 LMS 算法的稳态误差最大。这是因为本文所提算法的步长因子曲线在误差较小时非常平缓,并且较小,所以稳态误差较小,而固定步长 LMS 算法由于步长固定且较大,所以稳态误差较大。当输入信号发生变化时,这几种算法的稳态误差大小排序与未发生变化时一样,本

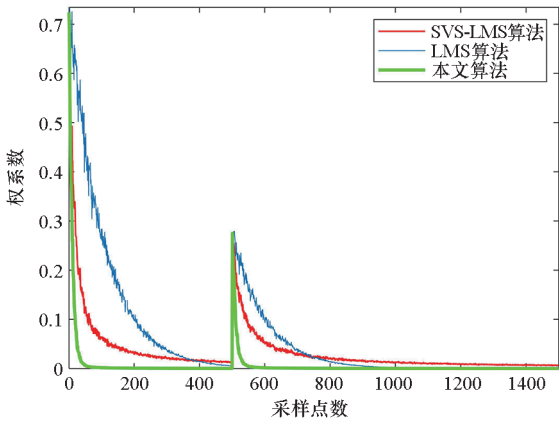


图 9 三种算法的均方误差曲线

Fig. 9 Mean square error curves of the three algorithms

文算法的稳态误差依然最小,固定步长 LMS 算法的稳态误差最大。

图 10 为固定步长 LMS 算法、SVS-LMS 算法和本文基于正态分布曲线的变步长 LMS 算法均方误差的对数表示图。从图中可以看出,固定步长 LMS 算法所能达到的均方误差最小,精度最高,本文提出的算法次之,SVS-LMS 算法的精度最低。

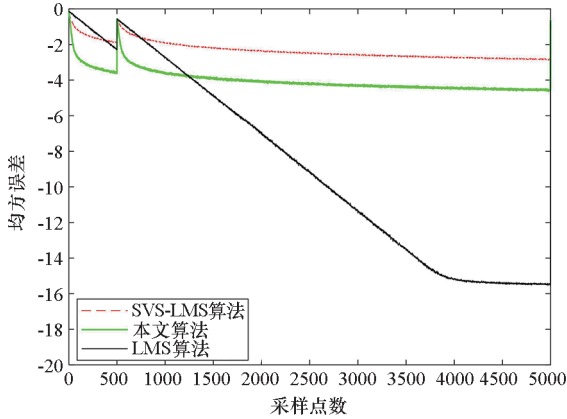


图 10 三种算法权系数收敛曲线

Fig. 10 Convergence curve of three algorithms' weight coefficient

综上,本文提出的基于正态分布曲线的变步长 LMS 算法在收敛速度、稳态误差和跟踪能力方面的性能较好,但由于变步长 LMS 算法的限制,当算法收敛后,为保证算法具有较小的稳态误差,步长因子通常会选择较小的值,因而靠向维纳解的速度较慢,能达到的最小均方误差较固定步长 LMS 算法较大,精度较低。针对此问题,对本文提出的算法做进一步改进。

考虑到固定步长 LMS 算法所能达到的精度最高,将本文提出的基于正态分布曲线的变步长 LMS 算法与固定步长 LMS 算法结合起来,提出一种基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法,

算法表达式如下:

$$\mu(n) = \begin{cases} c[1 - \exp(-a |e(n)|^b)] & |e(n)| > \text{eps} \\ c & |e(n)| \leq \text{eps} \end{cases} \quad (9)$$

式中,eps 代表算法达到的精度,即均方误差的大小。本文中设置的算法精度界限为 0.001,当算法均方误差大于 eps 时,采用变步长的 LMS 算法,在算法之初采用较大步长因子使算法快速收敛,当算法收敛后采用较小的步长因子以减小稳态误差,当算法的均方误差达到 eps 时,采用较大固定步长因子以更快地靠向维纳解,获得更高精度。

图 11 为固定步长 LMS 算法、本文算法和改进后的分段式变步长 LMS 算法的权系数收敛图,由图可知,本文算法和改进算法的收敛速度最快,固定步长 LMS 算法的收敛速度最慢。

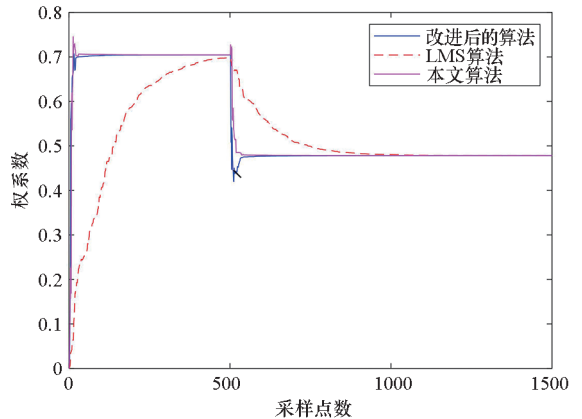


图 11 三种算法权系数收敛曲线

Fig. 11 Convergence curve of three algorithms' weight coefficient

图 12 为固定步长 LMS 算法、本文算法和改进的分段式变步长算法的均方误差图,从图中可以看出,本文算法和改进的分段式变步长算法的稳态误差最小,曲线基本重合,固定步长 LMS 算法的稳态误差最大。

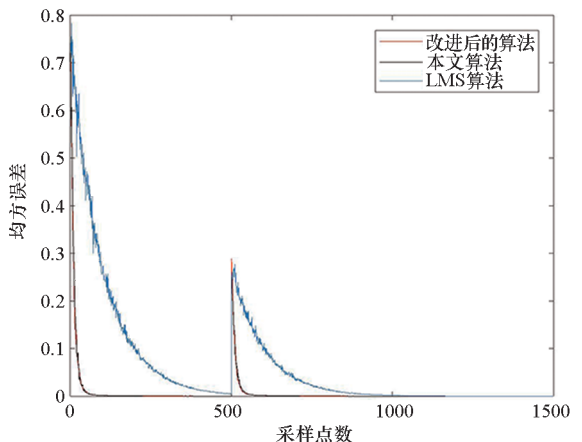


图 12 三种算法均方误差曲线

Fig. 12 Mean square error curves of the three algorithms

图 13 为固定步长 LMS 算法、本文算法和改进算法的均方误差对数表示图,从图中可以看出,改进算法达到的均方误差最小,精度最高。

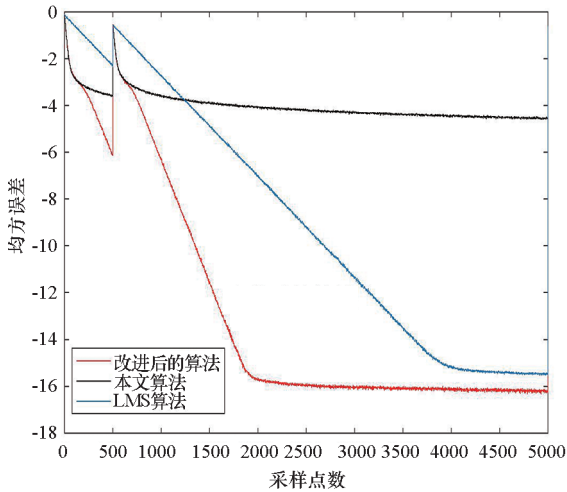


图 13 三种算法均方误差曲线

Fig. 13 Convergence curve of three algorithms' weight coefficient

综上所述可知:基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法在保证收敛速度、稳态误差和跟踪能力性能的同时使最小均方误差最小,即精度最高。仿真结果与理论分析结果相一致,证明本文算法性能较好。下面通过海试数据对三种算法做进一步的比较。

3.2 海试数据验证

3.2.1 参考信号的选取

在实际信号处理应用中,LMS 算法中的参考信号往往难以获取。李根^[11]根据各波束间混响是相关的,从而将相邻波束作为参考信号以达到消除混响的目的,但经过研究发现此方法存在两点不足:首先,混响在空间上的相关性不强,从而将相邻波束作为参考信号这一方法来滤除混响的能力有限;其次,由于波束主瓣宽度限制,信号可能会存在于多个波束内,导致信号也可能被当作参考信号被抵消掉。

考虑到此问题,本文提出一种产生参考信号的方法。如图 14 所示,将 80 元均匀拖线阵分为等长的 4 个子阵,每个子阵 77 个阵元,各子阵间有一部分的重叠。

如图 15 所示,当信号为单频信号时,分别将 2 号和 4 号子阵输出的波束域数据进行相位补偿,使两子阵的输出信号相位对齐,然后进行倒相处理,分别与 1 号子阵和 4 号子阵相加,这样就可以剔除信号,得到纯混响数据 d1 和 d2,分别作为 1 号、2 号和 3 号、4 号子阵的参考信号。

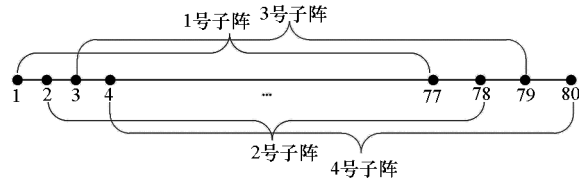


图 14 子阵划分示意图

Fig. 14 Subarray partition diagram

这样选取参考信号的依据是:当存在目标回波信号时,由于分裂波束中的目标回波信号经过相位补偿后已经对齐,因此倒相相加后可去除回波信号得到纯的混响干扰作为参考信号。

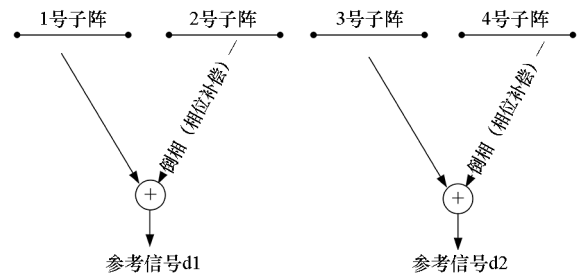


图 15 参考信号选取示意图

Fig. 15 Schematic diagram of reference signal selection

3.2.2 LMS 算法的海试数据处理

下面通过海试数据比较几种 LMS 算法的性能,其中信号为 CW 信号,位于 66° 方向,信号位于 7~8 km 处。现定义“局部信干比”这一概念:假设信号位于 θ_0 , 距离 L km 处,则在距离-方位图中以信号为中心画一矩形框,如图 16 所示,以信号的功率除以矩形框内干扰的平均功率并将其转化为 dB 数作为此方法的输出信干比 (Signal to Interference Ratio, SIR), 下面的局部信干比计算采用的矩形框为:距离为 1~8 km,方位为 40°~130°。其计算公式为

$$SIR = 10 \lg(P_s/P_I) \quad (10)$$

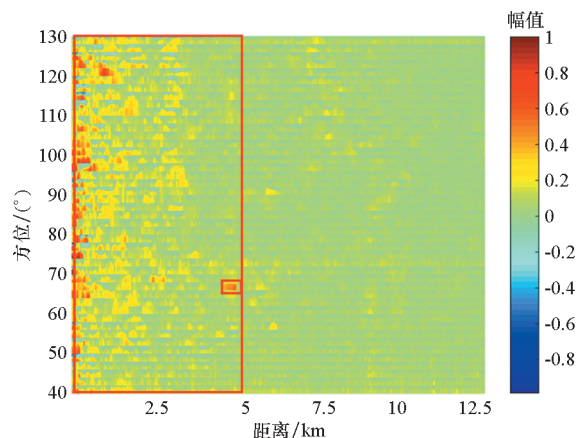


图 16 常规波束形成

Fig. 16 Conventional beamforming

式中, P_s 为信号的功率, P_I 为干扰的平均功率。

图 16 为常规波束形成算法得到的输出结果, 由图可知, 混响区能量较强, 此时局部信干比为 5.0 dB。

图 17 为 LMS 算法滤波后的结果, 从图中可以看出, 混响区能量部分被抑制, 但抑制效果不明显, 此时的局部信干比为 8.1 dB, 相比于滤波前, 信干比提高了大约 3 dB。

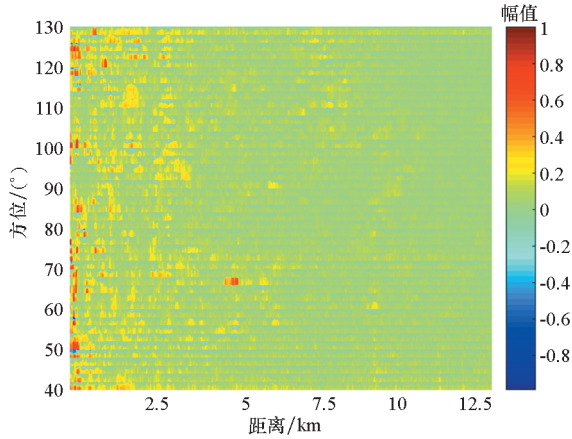


图 17 LMS 算法滤波结果

Fig. 17 Results of LMS filtering

图 18 为 SVS-LMS 算法滤波后的结果, 从图中可知, 混响区大部分能量被抑制, 但局部能量依然较强, 此时的局部信干比为 9.3 dB。

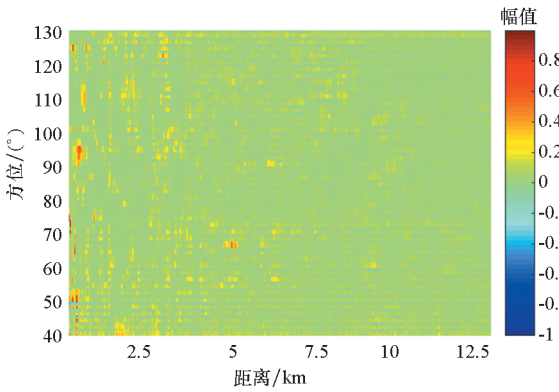


图 18 SVS-LMS 算法滤波结果

Fig. 18 Results of SVS-LMS filtering

图 19 为基于正态分布曲线的变步长 LMS 算法滤波后结果, 此时局部信干比为 10.3 dB。

图 20 为改进后的算法滤波结果, 混响抑制效果较好, 此时的局部信干比为 10.5 dB。

表 1 为几种 LMS 算法输出 SIR 的比较, 综上所述可知: 本文提出的两种自适应 LMS 算法的滤波效果比较明显, 可以滤除大部分的混响, 相比于常规的 LMS 算法, 本文所提算法的局部信干比提高了大约 2.4 dB。

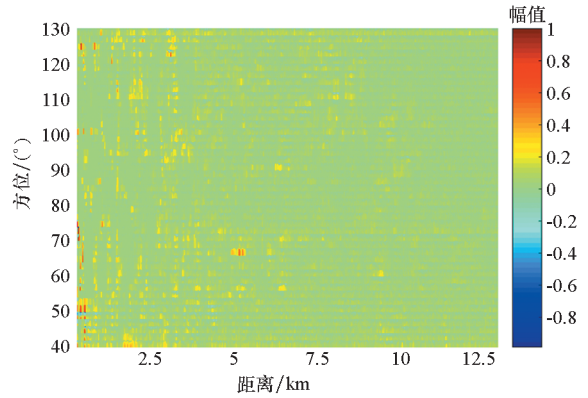


图 19 基于正态分布曲线的算法滤波结果

Fig. 19 Filtering results of the algorithm based on normal distribution curve

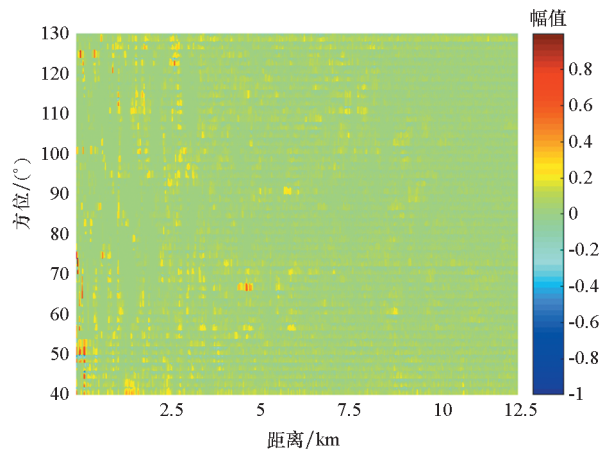


图 20 基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法滤波结果

Fig. 20 Filtering results of piecewise variable step size LMS algorithm based on normal distribution curve are presented

表 1 几种 LMS 算法输出 SIR 的比较

Tab. 1 Comparison of output SIR of several LMS algorithms

LMS 算法	输出 SIR/dB
常规波束形成算法	5.0
常规 LMS 算法	8.1
SVS-LMS 算法	9.3
基于正态分布曲线的变步长 LMS 算法	10.3
基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法	10.5

通过计算机仿真和海试数据的处理结果可以看出, 本文所提算法在收敛速度、跟踪性能和稳态误差等方面具有较大的优势, 综合性能明显优于其他两种方法。

4 结论

本文通过研究固定步长的 LMS 算法在收敛速度和稳态误差方面的矛盾引出了变步长 LMS 算法,在深入分析其步长因子的调整原则后,提出一种基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法,并且在实际信号处理过程中提出一种参考信号选取方法。通过计算机仿真和海试数据验证,结果表明,该算法相比其他算法具有较快的收敛速度和较小的稳态误差。

参考文献 (References)

- [1] Piche S W. Steepest descent algorithms for neural network controllers and filters [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1994, 5(2): 198–212.
- [2] Kwong R H, Johnston E W. A variable step size LMS algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(7): 1633–1642.
- [3] Evans J B, Xue P, Liu B. Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(8): 2517–2535.
- [4] 卢炳乾, 冯存前, 龙戈农. 一种基于正弦函数的新变步长 LMS 算法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2013, 14(2): 47–50.
LU Bingqian, FENG Cunqian, LONG Genong. A new variable step-size LMS algorithm based on sine function [J]. Journal of Air Force Engineering University(Natural Science Edition), 2013, 14(2): 47–50. (in Chinese)
- [5] 吕春英, 敖伟, 张洪顺. 一种新的变步长 LMS 算法[J]. 通信技术, 2011, 44(3): 11–14.
LYU Chunying, AO Wei, ZHANG Hongshun. A new variable step size LMS algorithm [J]. Communication Technology, 2011, 44(3): 11–14. (in Chinese)
- [6] 沈福民. 自适应信号处理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.
SHEN Fumin. Adaptive signal processing [M]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology Press, 2001. (in Chinese)
- [7] Sristi P, Lu W S, Antoniou A. A new variable-step-size LMS algorithm and its application in subband adaptive filtering for echo cancellation [C]// Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2001: 721–724.
- [8] 张喜涛, 张安清. 基于 Sigmoid 函数的变步长 LMS 自适应滤波算法性能分析[J]. 舰船电子对抗, 2013, 36(6): 52–55, 82.
ZHANG Xitao, ZHANG Anqing. Performance analysis of LMS adaptive filtering algorithm with variable step based on Sigmoid function [J]. Shipboard Electronic Countermeasure, 2013, 36(6): 52–55, 82. (in Chinese)
- [9] 付学志, 刘忠, 李朝旭. Sigmoid 函数变步长 LMS 自适应算法的抗干扰性能改进[J]. 北京邮电大学学报, 2011, 34(6): 112–115, 120.
FU Xuezhi, LIU Zhong, LI Chaoxu. Anti-interference performance improvement for Sigmoid function variable step-size LMS adaptive algorithm [J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2011, 34(6): 112–115, 120. (in Chinese)
- [10] 徐洋, 徐松涛, 马健, 等. 基于 Sigmoid 二次型隶属度函数的改进 LMS 算法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(10): 3470–3476.
XU Yang, XU Songtao, MA Jian, et al. Improved LMS algorithm based on Sigmoid quadratic membership function[J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2014, 45(10): 3470–3476. (in Chinese)
- [11] 李根. 基于波束间混响相关性的自适应抵消方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.
LI Gen. Research on adaptive cancellation method based on inter-beam reverberation correlation [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2011. (in Chinese)