

# Kriging 与改进一次二阶矩融合的可靠性分析方法\*

袁修开,孔冲冲,顾健

(厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:**针对结构可靠性分析问题,提出了 Kriging 与改进一次二阶矩方法相融合的分析方法。传统的改进一次二阶矩需要计算结构功能函数的梯度信息,在处理包含有限元模型的隐式极限状态问题时会比较困难。该方法将 Kriging 代理模型与改进一次二阶矩迭代有效而充分地结合,借助 Kriging 方法提供功能函数的梯度信息,以解决隐式极限状态函数的求导难题,提高分析效率。通过数值与工程算例验证了所提方法的可行性和高效性。

**关键词:**可靠性;Kriging 方法;改进一次二阶矩;梯度计算;失效概率

**中图分类号:**TB114.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2020)06-150-07

## Reliability analysis approach based on Kriging and advanced first-order second moment method

YUAN Xiukai, KONG Chongchong, GU Jian

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** For the problem of structural reliability analysis, an analysis method combining Kriging with AFOSM (Advanced first-order second moment) method was proposed. The traditional AFOSM calculation requires the gradient information of the structural limit state function. It is difficult especially when it deals with the implicit limit state function problem involving the finite element model. The proposed method combined Kriging method and AFOSM iteration fully and effectively. The Kriging method provides the gradient information of limit state function so as to overcome the difficulty of the derivation solution and improve the analysis efficiency of limit state function. Finally, numerical and engineering examples are given to verify the efficiency and feasibility of the proposed method.

**Keywords:** reliability; Kriging method; advanced first-order second moment; gradient calculation; failure probability

在结构可靠性分析中,失效概率的求解方法可分为三类:近似解析法、数字模拟法、代理模型方法<sup>[1]</sup>。近似解析方法包括改进一次二阶矩(Advanced First Order Second Moment, AFOSM)<sup>[1-2]</sup>、均值一次二阶矩(Mean Value First Order Second Moment, MVFOSM)和 R-F 法<sup>[3]</sup>等。近似解析方法计算量少,但是在处理复杂非线性问题时,其精度难以保证。数值模拟法包括蒙特卡洛仿真(Monte Carlo Simulation, MCS)<sup>[4]</sup>、线抽样(Line Sampling, LS)<sup>[5-6]</sup>法、重要抽样(Importance Sampling, IS)<sup>[7]</sup>和子集模拟(Subset Simulation, SS)<sup>[8-9]</sup>等。该类方法为了保证计算精度,需调用结构功能函数的计算次数较多,计算代价大,且在处理包含有限元模型的隐式极限状态问题时,计算效率低下,是影响该类方法应用的重要因素。代理模型方法包括响应面法<sup>[7-11]</sup>、神

经网络法<sup>[12-13]</sup>、支持向量机法(Support Vector Machine, SVM)<sup>[14-16]</sup>等。该类方法专门针对隐式极限状态问题,能够显著提高分析效率,因而在工程中得到广泛应用,其中 Kriging 方法作为一种典型的连续插值迭代方法,以其精确的插值技术备受人们的关注<sup>[17]</sup>。本文着眼于采用该技术来进一步提高改进一次二阶矩方法的分析效率和适用范围。

改进一次二阶矩法通过将非线性功能函数线性展开,然后用线性功能函数的失效概率来近似原非线性功能函数的失效概率<sup>[1]</sup>。和均值一次二阶矩法相比,AFOSM 在设计点(Most Probable Point, MPP)处而非均值点处将功能函数线性化,提高了分析计算的精度。吕震宙等<sup>[1]</sup>对改进一次二阶矩的理论介绍和推导过程做了详细的描

\* 收稿日期:2019-06-15

基金项目:国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(U1530122);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(20720180072);航空科学基金资助项目(NSFC-20170968002)

作者简介:袁修开(1981—),男,湖北黄石人,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:xiukaiyuan@xmu.edu.cn

述。改进一次二阶矩亦在众多工程领域得到了广泛的应用,比如:葛耀君等<sup>[18]</sup>在桥梁颤振可靠性评估中,使用改进一次二阶矩方法计算了小失效概率条件下的可靠度;侯晓亮等<sup>[19]</sup>在评价软土基坑支护设计中的抗隆起稳定性时,采用改进的一次二阶矩可靠度计算方法评价基坑抗隆起稳定性;郑财等<sup>[20]</sup>在研究三轴数控机床的运行误差时,用改进一次二阶矩法对其可靠性及灵敏度进行了分析计算;曾照辉等<sup>[21]</sup>在研究动力涡轮工作时的可靠性时,采用参数化建模通过混合模拟(有限元、响应面、改进一次二阶矩法三者结合)的方法对其进行可靠性分析等。改进一次二阶矩针对变量维数小,非线性程度不大的小失效概率问题来说,具有很高的计算效率和良好的分析效果。然而在改进一次二阶矩中求解“设计点”,及其包含的偏导数的计算是难点,目前常用的方法为有限差分法,但是其对于隐式极限状态函数(需有限元分析),有限差分的步长很难确定,且增加了功能函数的计算次数,增大了计算量、效率低。

Kriging 代理模型不仅具有良好的拟合效果和局部估计的特点,而且具有较好的连续性和可导性,故具有广泛的应用前景。韩忠华<sup>[22]</sup>在 Kriging 模型及代理优化算法研究进展中,对 Kriging 方法的背景、意义、理论以及发展现状做了详细的描述;聂雪媛等<sup>[23]</sup>在研究飞行器结构刚度气动优化设计中采用 Kriging 方法建立代理模型,该方法能够处理复杂目标的全局优化问题;黄晓旭等<sup>[24]</sup>提出一种将 Kriging 模型与子集模拟方法结合的可靠性分析方法用于解决小失效概率的工程结构问题;陈立立等<sup>[25]</sup>采用 Kriging 代理模型进一步验证自由变形技术在 RAE2822 翼型优化设计中的应用;韩少强等<sup>[26]</sup>提出了一种将梯度信息与 Kriging 模型构建相结合的方法用于气动反设计研究。

基于改进一次二阶矩的实用性及 Kriging 模型的效率和良好的可导性,本文提出一种 Kriging 与改进一次二阶矩融合的可靠性分析方法。所提方法在改进一次二阶矩迭代计算设计点的过程中借助 Kriging 模型计算迭代点的偏导数值,并将迭代过程中的迭代点用于更新 Kriging 模型,两者有机融合来求解失效概率。最后通过结合数值算例与工程算例验证该方法的可行性和高效性。

## 1 Kriging 方法

Kriging 模型是依据协方差函数对随机过程/

随机场进行空间建模和预测(插值)的回归算法<sup>[27]</sup>。它由两部分组成,一部分是线性回归模型,另一部分是非参数统计过程。对于任意一个输入向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  ( $n$  为随机变量的维度)与其响应量  $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  的数学表达形式如下所示<sup>[28]</sup>:

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}) + \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x})$  为线性回归模型;  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  为一随机过程;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})]^T$  ( $p$  为基函数的数目)为输入向量  $\mathbf{x}$  的多项式基函数,提供模拟的全局近似<sup>[29]</sup>;  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]^T$  为回归系数列向量。

函数  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  为高斯随机过程<sup>[30]</sup>,作为局部近似<sup>[29]</sup>,其均值为 0,方差为  $\sigma^2$ ,协方差满足下式的特征:

$$\text{Cov}[z(\mathbf{x}^{(i)}), z(\mathbf{x}^{(j)})] = \sigma^2 \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \quad (2)$$

式中:  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$  为一个相关函数中参数向量;  $\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}$  是试验样本  $\mathbf{X}$  中任意两个样本点;  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$  为相关函数,相应类型有高斯函数、指数函数、幂函数、样条函数等<sup>[31-33]</sup>。这里采用常用的高斯相关函数,其数学表达式为:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^n \exp[-\gamma^k (x_k^{(i)} - x_k^{(j)})^2] \quad (3)$$

当获得样本输入  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N_0)}\}$  ( $N_0$  为初始样本量)和输出  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N_0)}\}$  后,可以计算得到式(1)中的回归系数向量  $\boldsymbol{\beta}^*$  和式(2)中过程方差  $\sigma^2$ <sup>[32]</sup>:

$$\boldsymbol{\beta}^* = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_0} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^*) \quad (5)$$

相关函数中的参数向量可以通过极大似然估计得到:

$$\boldsymbol{\gamma} = \underset{\boldsymbol{\gamma}}{\text{argmin}} (N_0 \ln \sigma^2 + |\mathbf{R}|) \quad (6)$$

进而可以把式(1)任意输入  $\mathbf{x}$  与响应量  $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  的数学表达形式转化为<sup>[32]</sup>:

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}^* \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}^{(N_0)}, \mathbf{x})]^T$  为输入量  $\mathbf{x}$  与已知样本点  $\mathbf{X}$  的相关函数,  $\mathbf{r}^*$  可以通过计算  $\mathbf{R}\mathbf{r}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^*$  得到。对于 Kriging 模型的详细理论分析可以参考文献[32-33]。

Kriging 模型对输入量和响应量的关系可达到较高的拟合精度,且在工程中已经得到了广泛的应用<sup>[23-26]</sup>。

## 2 基于 Kriging 方法与改进一次二阶矩的融合方法

所提方法采用 Kriging 方法高效计算偏导数,用于

进一步提高改进一次二阶矩的效率。由于 Kriging 模型中的回归函数和相关函数都是简单的函数体,在模型建立好后,即可简便计算出相应的偏导数,因此可将之用于改进一次二阶矩的求解过程中。同时,由于一般情况下样本量越多, Kriging 模型构建越精确。为了充分利用已有信息,所提方法将改进一次二阶矩求解进程中的近似设计点信息运用于 Kriging 模型的更新构建中,提高 Kriging 模型的精度,进而将 Kriging 方法与改进一次二阶矩有机融合。

**步骤 1: 构建 Kriging 模型。**

根据研究问题,确定构建 Kriging 模型的最少样本点数  $N_0$ 。Kriging 中回归模型一般选择一阶或二阶多项式。当选择一阶多项式时,  $N_0$  应满足  $N_0 \geq n + 1$  ( $n$  为变量的维度); 当选择二阶多项式时,  $N_0 \geq \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ 。

采用蒙特卡洛法随机抽取  $N_0$  样本点  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(N_0)}\}$  (含均值点), 代入结构功能函数中计算响应值  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N_0)}\}$ , 然后根据样本点构建初始的 Kriging 模型。

当回归模型采用一阶多项式, 则输入向量  $\mathbf{x}$  的基函数向量为  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [1, \mathbf{x}]$ , 随机过程采用高斯过程, 如式(3)所示, 由第 1 节式(4)可知样本量、回归模型、随机过程确定后, 便得到回归系数向量  $\boldsymbol{\beta}^*$  和  $\mathbf{r}^*$ , 于是得到极限状态函数  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  初始的 Kriging 代理模型

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}^* \quad (8)$$

**步骤 2: 将 Kriging 导数信息运用于 AFOSM。**

在原有改进一次二阶矩方法中, 对原极限状态函数在设计点  $\mathbf{x}^*$  处线性化:

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{g}'_{\mathbf{x}^*} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{g}'_{\mathbf{x}^*} = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right]^T$  为原极限状态函数对各变量偏导在设计点处的取值。

一般采用迭代的算法来获得<sup>[1]</sup>设计点, 即设置初始设计点值, 如设为均值点  $\mathbf{x}^{*(0)} = \boldsymbol{\mu}$ , 而后在迭代过程中逐步对设计点值进行更新。此外, 在计算导数的时候, 需要较多的计算代价, 尤其是在变量维数较多的情形下。在本文所提方法中, 采用构建的 Kriging 代理模型来获取近似导数信息, 进一步提升 AFOSM 的效率。即运用式(8)所示的代理模型计算导数

$$\hat{\mathbf{y}}'_{\mathbf{x}^*} = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right]^T = \mathbf{J}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}^T \boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{J}_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}^T \mathbf{r}^* \quad (10)$$

其中:  $\hat{\mathbf{y}}'_{\mathbf{x}^*}$  为导数向量;  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$  和  $\mathbf{J}_{\mathbf{r}}$  分别为  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{r}$  的雅可比矩阵。令  $\mathbf{g}'_{\mathbf{x}^*} = \hat{\mathbf{y}}'_{\mathbf{x}^*}$  将所计算的导数代入式(9)中得到:

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \hat{\mathbf{y}}'_{\mathbf{x}^*} \quad (11)$$

由此, 在后续改进一次二阶的迭代求解过程中, 导数的计算完全由构建的 Kriging 模型来计算。

**步骤 3: 更新 Kriging 模型及设计点直至收敛。**

将迭代过程中的中间迭代点添加到构建初始 Kriging 代理模型的样本点中, 对前面建立的 Kriging 代理模型进行更新和修正, 提高 Kriging 模型的精度, 从而提供更为准确的导数信息, 为所提融合方法的最终收敛提供保障。做法如下:

重复将步骤 2 中得到的设计点值应用到步骤 1 中, 更新 Kriging 模型的迭代过程, 直到前后两次的可靠度指标的相对误差满足设定的精度要求为止, 最后对应的可靠度指标  $\psi$  和失效概率  $P_f$  为:

$$\psi = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{y}}'_{\mathbf{x}^*}(x_i - x_i^*)}{\left( \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{y}}'^2_{\mathbf{x}^*} \cdot \sigma_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

$$P_f = \Phi(-\psi) \quad (13)$$

本文所提方法的流程图如图 1 所示。

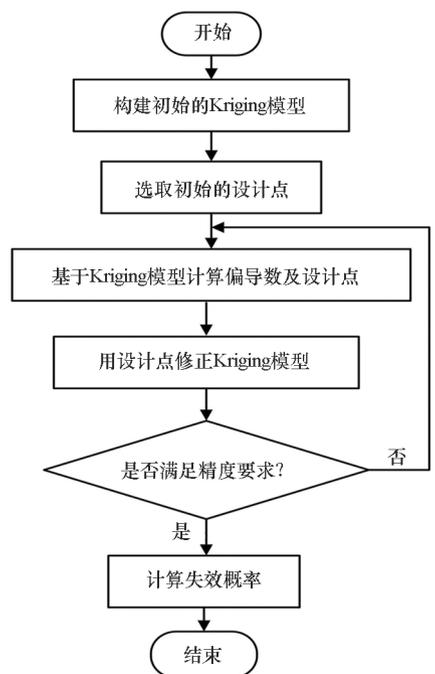


图 1 Kriging 与改进一次二阶矩融合方法流程图  
Fig. 1 Flow chart of Kriging and AFOSM

### 3 算例分析

为了验证所提方法的适用性,该节结合数值算例和屏蔽闸阀结构的工程算例进行说明。采用本文所提融合方法对各例进行可靠性分析,并与其他分析方法进行比较,包括:AFOSM,即常规改进一次二阶矩方法<sup>[1]</sup>;Kriging + MCS,即建立足够精度的 Kriging 模型后再使用 MCS 方法<sup>[28]</sup>;MCS,即直接使用蒙特卡洛法。

本文以 MCS 直接方法计算的值作为精确值(通过大样本数来计算得到),以 AFOSM 和 Kriging + MCS 两种方法来与本文方法进行对比。需要指出的是,对于可靠性计算效率的评定,一般通过极限状态的计算(调用)次数来衡量。本文构建 Kriging 模型所采用的样本点是通过计算极限状态函数得到,所以样本点数也表示了极限状态函数的计算次数。为了考察本文所提方法中初始 Kriging 模型构建的随机性,采用不同数目的样本点构建初始 Kriging 模型,然后进行可靠性分析。在以下三个算例中用本文方法 1 和本文方法 2 表示不同样本点下本文所提方法计算效果。

**算例 1** 非线性极限状态函数  $g_1(\mathbf{x})$  为:

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 x_3 \quad (14)$$

其中:变量  $x_1, x_2, x_3$  均服从正态分布,其分布信息分别为  $x_1 \sim N(7000, 1400^2)$ ,  $x_2 \sim N(187\ 500, 28\ 125^2)$ ,  $x_3 \sim N(0.024, 0.001\ 44^2)$ 。

首先验证用 Kriging 方法计算改进一次二阶矩偏导数的可行性。本文方法采用蒙特卡洛随机抽取 5 个样本点和均值点组成的初始样本点构建初始 Kriging 模型,由构建的 Kriging 模型计算第一次迭代点即均值处偏导数信息,同时使用 AFOSM 中有限差分(其步长为 0.001)计算偏导数,以下算例与此相同,计算结果如表 1 所示。

从表 1 可以看出,在均值点处,根据初始 Kriging 方法得到的偏导数与理论计算出来的偏导数的相对误差在 3% 以内,已具有足够的精度。

采用本文方法及其他方法进行可靠性分析的结果如表 2 所示。以 MCS 方法的结果(视作精确值)作为参照,各方法的失效概率与精确值都比较接近,误差均小于 1%。从计算效率上讲,AFOSM 计算极限状态函数 26 次, Kriging + MCS 方法中使用 200 个样本点构建了 Kriging 代理模型,而后用蒙特卡洛抽样方法计算失效概率。本文方法收敛准则为  $|\psi_i - \psi_{i+1}|/\psi_i \leq 5\%$ , 以下两个算例中设计点的确定方法相同。本文方法 1 使用 6 个初始样本点构建初始 Kriging 模型,经过两

次迭代修正便可计算出极限状态函数的失效概率,计算次数为 6 + 2。为了检验方法稳健性,使用不同的初始样本点进行分析,亦列在表中,记为本文方法 2,计算次数为 4 + 2。表 2 中本文方法 1 和本文方法 2 计算结果一致,与 MCS 计算结果在误差允许范围内,由此可以看出本文所提方法的效率和适用性。

表 1 初始 Kriging 模型计算极限状态函数的偏导数(均值点)

Tab. 1 Partial derivative of the limit state function by the initial Kriging model (at the mean point)

	偏导数值 (理论值)	偏导数值 (AFOSM)	偏导数值 (Kriging)	Kriging 相对 误差/%
$\frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}$	1	1	0.995	0.5
$\frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}$	-0.024 0	-0.024 0	-0.023 4	2.5
$\frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_3}$	-187 500	-187 500	-182 740	2.53

注: $\partial g_1/\partial x_i$ 为极限状态函数对变量的偏导数值。

表 2 算例 1 不同方法得到的可靠性分析结果

Tab. 2 Reliability analysis results obtained by different methods in example 1

方法	失效 概率	极限状态函 数计算次数	相对 误差/%
AFOSM	0.057 1	26	0.35
Kriging + MCS	0.056 7	200	0.35
本文方法 1	0.057 0	6 + 2	0.17
本文方法 2	0.057 0	4 + 2	0.17
MCS	0.056 9	$10^5$	

**算例 2** 非线性极限状态函数  $g_2(\mathbf{x})$  为:

$$g_2(\mathbf{x}) = 4x_1^2 - 3.9x_2^2 + 5x_3^2 - x_4^2 \quad (15)$$

其中:基本随机变量  $x_1, x_2, x_3, x_4$  均服从正态分布,分别为  $x_1 \sim N(83.5, 0.12^2)$ ,  $x_2 \sim N(83.5, 0.12^2)$ ,  $x_3 \sim N(83.5, 0.12^2)$ ,  $x_4 \sim N(150, 0.25^2)$ 。

采用本文融合方法计算均值点处的偏导数值如表 3 所示,可靠性分析结果如表 4 所示。

从表 3 可以看出,在均值点处,根据初始 Kriging 方法得到的偏导数与理论计算出来的偏导数值相对误差在 7% 以内,与算例 1 相比相对误差值偏大,原因是极限状态函数的非线性提高,随机变量的维度增多。

表 3 基于初始 Kriging 模型计算极限状态函数的偏导数 (均值点)

Tab.3 Partial derivative of the limit state function by the initial Kriging model (at the mean point)

	偏导数值 (理论值)	偏导数值 (AFOSM)	偏导数值 (Kriging)	Kriging 相对误差/%
$\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}$	668.00	668	677.8	1.46
$\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}$	-651.3	-651.30	-692.8	6.37
$\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_3}$	835.0	835.00	812.9	2.64
$\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_4}$	-300.0	-300	-317.5	5.83

表 4 算例 2 不同方法得到的可靠性分析结果

Tab.4 Reliability analysis results obtained by different methods in example 2

方法	失效 概率	极限状 态函数 计算次数	相对 误差/%
AFOSM	0.224 9	25	2.38
Kriging + MCS	0.231 9	200	0.65
本文方法 1	0.226 5	6 + 4	1.69
本文方法 2	0.226 6	5 + 3	1.64
MCS	0.230 4	10 <sup>5</sup>	

同样从表 4 可以看出,以 MCS 方法的结果 (视作精确值) 作为参照,其他三种方法的失效概率与精确值都比较接近,但是从计算极限状态函数的次数来说,对于常规改进一次二阶矩调用次数最多为 25 次,Kriging + MCS 方法采用 200 个样本构建 Kriging 模型。而本文方法采用不同的初始样本数来进行分析,结果亦列在表中本文方法 1 和本文方法 2。可以看出本文方法计算次数最少,效率最高。

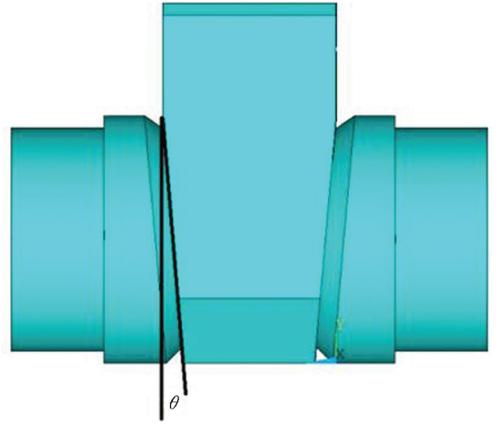
**算例 3** 闸板可靠性分析—屏蔽闸阀的结构如图 2 所示,建立相应的有限元来分析接触面 (闸板与密封座) 最大应力值。该结构的相关参数有:闸板的倾斜角  $\theta$ ,材料弹性模型  $E$ ,闸板与密封座的摩擦系数  $f$ ,闸板上端的均布载荷  $p$ 。假定各参数均服从正态分布,分布参数为  $\theta \sim N(5, 0.1^2)$ ,  $p \sim N(140, 10^2)$ ,  $E \sim N(197\ 000, 1000^2)$ ,  $f \sim N(0.24, 0.01^2)$ 。以结构的最大应力不超过给定极限应力,建立结构的极限状态函数,即

$$g(\theta, E, f, p) = [\sigma] - \sigma_{\max} \quad (16)$$

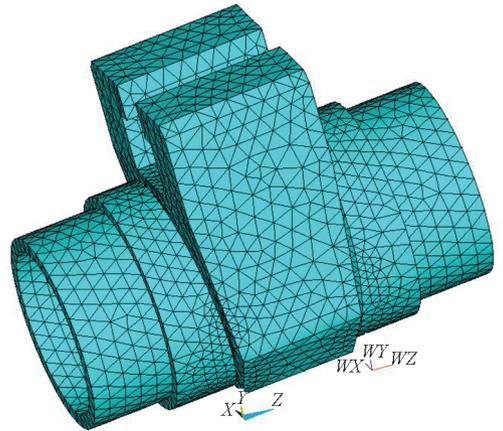
其中:  $[\sigma] = 310\text{ MPa}$  为极限应力;  $\sigma_{\max}$  为结构中闸板和密封座接触面的最大应力值可以表达为:

$$\sigma_{\max} = \text{ANSYS}(\theta, E, f, p) \quad (17)$$

其中,  $\text{ANSYS}(\theta, E, f, p)$  表示由调用 ANSYS 有限元分析得到。



(a) 正视图  
(a) Front view



(b) 有限元网格划分  
(b) Finite element meshing

图 2 屏蔽闸阀结构的三维有限元模型

Fig.2 The three-dimension finite element model of shielded gate valve structure

表 5 给出了各方法的计算结果。可以看出,对于隐式函数,常规的 AFOSM 方法无法计算结构的失效概率,从侧面也反映了本文所提方法的优势。Kriging + MCS 使用 300 个样本点构建了 Kriging 代理模型,然后通过 MCS 计算失效概率。本文方法计算两次,一次调用 6 + 6 次结构极限状态函数,另一次调用 5 + 4 次,计算得到的失效概率值相近。同样从该例可看出本文所提方法的效率和对解决工程结构问题的适用性。

表5 屏蔽闸阀的可靠性分析结果

Tab.5 Reliability analysis results of shielded gate valves

方法	失效 概率	极限状态 函数计算 次数	相对 误差/%
Kriging + MCS	0.006 1	300	7.6
本文方法 1	0.006 3	6 + 6	4.5
本文方法 2	0.006 7	5 + 4	1.5
MCS	0.006 6	10 <sup>4</sup>	

## 4 结论

本文提出了将 Kriging 方法和改进一次二阶相融合的可靠性分析方法。该方法针对 AFOSM 在处理复杂非线性函数或包含有限元分析的隐式极限状态函数的可靠性问题时,采用 Kriging 方法求解极限状态函数的偏导数,为 AFSOM 迭代计算设计点时提供偏导数信息,同时将 AFSOM 迭代产生的中间迭代点用于更新 Kriging 模型进一步提高偏导数的计算精度。

通过两个数值算例可以看出,所提方法中运用 Kriging 得到求解梯度信息与理论计算的基本一致。最终计算的结果亦能满足精度要求,而在效率上与传统的 AFSOM 相比有了进一步的提升。所提方法拓宽了 AFOSM 使用的范围,可以用于解决复杂的工程可靠性问题,且提高了其求解效率。

## 参考文献 (References)

- [1] 吕震宙,宋述芳,李洪双,等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [2] 喻全余. 用改进的一次二阶矩法求应力-强度系统的可靠度系数[J]. 机械设计, 1997(12): 36-38.
- [3] 何水清,王善. 结构可靠性分析与设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
- [4] Gaspar B, Naess A, Leira B J. System reliability analysis by Monte Carlo based method and finite element structural models[J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2014, 136(3): 1-9.
- [5] Pradlwarter H J, Chuller G I, Koutsourelakis P S, et al. Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems[J]. Structural Safety, 2007, 29(3): 208-221.
- [6] Morio J, Balesdent M, Jacquemart D. A survey of rare event simulation methods for static input-output models [J]. Simulation Modelling Practice and Theory, 2014, 49: 287-304.
- [7] Dubourg V, Sudret B, Deheeger F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 33: 47-57.
- [8] Au S K, Beck J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263-277.
- [9] Bourinet J M, Deheeger F, Lemaire M. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines [J]. Structural Safety, 2011, 33(6): 343-353.
- [10] Bucher C, Most T. A comparison of approximate response functions in structural reliability analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(2/3): 154-163.
- [11] Kang S C, Koh H M, Choo J F. An efficient response surface method using moving least squares approximation for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25(4): 365-371.
- [12] Pedroni N, Zio E, Apostolakis G E. Comparison of bootstrapped artificial neural networks and quadratic response surfaces for the estimation of the functional failure probability of a thermal-hydraulic passive system [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2010, 95(4): 386-395.
- [13] Schueremans L, Gemert D V. Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2005, 27(3): 246-261.
- [14] Song H, Choi K K, Lee I, et al. Adaptive virtual support vector machine for reliability analysis of high-dimensional problems[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 47(4): 479-491.
- [15] Richard B, Cremona C, Adelaide L. A response surface method based on support vector machines trained with an adaptive experimental design [J]. Structural Safety, 2012, 39(4): 14-21.
- [16] Alibrandi U, Alania A M, Ricciardi G. A new sampling strategy for SVM-based response surface for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2015, 41: 1-12.
- [17] Sun Z L, Wang J, Li R, et al. LIF: a new Kriging based learning function and its application to structural reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 157: 152-165.
- [18] 葛耀君,周峥,项海帆. 基于改进一次二阶矩法的桥梁颤振可靠性评价[J]. 结构工程师, 2006, 22(3): 46-51, 14.
- [19] 侯晓亮,谭晓慧. 改进的一次二阶矩方法在基坑抗隆起稳定可靠度评价中的应用[J]. 武汉大学学报(工学版), 2016, 49(5): 791-795.
- [20] HOU Xiaoliang, TAN Xiaohui. Application of advanced first order second moment method to reliability assessment of basal heave stability for braced excavation[J]. Engineering Journal

- of Wuhan University, 2016, 49 (5): 791 - 795. (in Chinese)
- [20] 郑财, 黄贤振, 胡明伟. 三轴数控机床加工精度可靠性及灵敏度分析[J]. 制造技术与机床, 2017(1): 54 - 59.  
ZHENG Cai, HUANG Xianzhen, HU Mingwei. Three axis NC machine tool machining precision reliability and sensitivity analysis [J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2017(1): 54 - 59. (in Chinese)
- [21] 曾照辉, 刘扬, 全昌彪, 等. 一种基于响应面法的动力涡轮轴强度可靠性分析计算方法[J]. 机械, 2017, 44(5): 30 - 32, 56.  
ZENG Zhaohui, LIU Yang, QUAN Changbiao, et al. A strength reliability analysis calculation method of power turbine shaft based on response surface [J]. Machinery, 2017, 44(5): 30 - 32, 56. (in Chinese)
- [22] 韩忠华. Kriging 模型及代理优化算法研究进展[J]. 航空学报, 2016, 37(11): 3197 - 3225.  
HAN Zhonghua. Kriging surrogate model and its application to design optimization: a review of recent progress [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(11): 3197 - 3225. (in Chinese)
- [23] 聂雪媛, 刘中玉, 杨国伟. 基于 Kriging 代理模型的飞行器结构刚度气动优化设计[J]. 气体物理, 2017, 2(2): 8 - 16.  
NIE Xueyuan, LIU Zhongyu, YANG Guowei. Aircraft structure stiffness and aerodynamics optimization design based on Kriging surrogate model [J]. Physics of Cases, 2017, 2(2): 8 - 16. (in Chinese)
- [24] 黄晓旭, 陈建桥. 基于主动学习 Kriging 模型和子集模拟的可靠度分析[J]. 应用力学学报, 2016, 33(5): 866 - 871.  
HUANG Xiaoxu, CHEN Jianqiao. Reliability analysis based on active learning Kriging model and subset simulation [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2016, 33(5): 866 - 871. (in Chinese)
- [25] 陈立立, 郭正, 侯中喜. 自由变形技术在 RAE2822 翼型优化设计中的应用[J]. 国防科技大学学报, 2018, 40(5): 45 - 53.  
CHEN Lili, GUO Zheng, HOU Zhongxi. Application of free-form deformation technique for RAE2822 airfoil optimization design [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2018, 40(5): 45 - 53. (in Chinese)
- [26] 韩少强, 宋文萍, 韩忠华, 等. 基于梯度增强型 Kriging 模型的气动反设计方法[J]. 航空学报, 2017, 38(7): 133 - 147.  
HAN Shaoqiang, SONG Wenping, HAN Zhonghua, et al. Aerodynamic inverse design method based on gradient-enhanced Kriging model [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(7): 133 - 147. (in Chinese)
- [27] Le N D, Zidek J V. Statistical analysis of environmental space-time processes [M]. Springer Science & Business Media, 2006.
- [28] LYU Z Y, Lu Z Z, Wang P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(5): 1182 - 1197.
- [29] 张崎, 李兴斯. 基于 Kriging 模型的结构可靠性分析[J]. 计算力学学报, 2006, 23(2): 175 - 179.  
ZHANG Qi, LI Xingsi. Analysis of structural reliability based on Kriging model [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(2): 175 - 179. (in Chinese)
- [30] 晏良, 段晓君, 刘博文, 等. 基于 Kullback-Leibler 距离离散度的加权代理模型[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(3): 159 - 165.  
YAN Liang, DUAN Xiaojun, LIU Bowen, et al. Weighted surrogate models based on Kullback-Leibler divergence [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2019, 41(3): 159 - 165. (in Chinese)
- [31] Rasmussen C E. Gaussian processes in machine learning [J]. International Journal of Neural Systems, 2004, 14(2): 69 - 106.
- [32] Lophaven S N, Nielsen H B, Søndergaard J. A MATLAB Kriging toolbox [R]. Technical University of Denmark, 2002.
- [33] Lophaven S N, Nielsen H B, Søndergaard J. Aspects of the MATLAB toolbox DACE [R]. Technical University of Denmark, 2002.