

## 均匀圆阵主特征矢量分析解相干算法\*

倪柳柳, 陈辉, 倪萌钰, 王晓戈  
(空军预警学院, 湖北武汉 430019)

**摘要:**为解决均匀圆阵的相干信源波达方向估计问题,提出一种适用于均匀圆阵的虚拟均匀线阵主特征矢量分析算法。采用模式空间变换将均匀圆阵转换为虚拟均匀线阵,对其数据协方差矩阵进行处理以构造主特征矢量矩阵;引入加权最小二乘法,通过重复迭代得到子空间各元素之间的线性预测系数,从而求得相干信源的波达方向估计值。理论分析和仿真结果表明,该算法对相干信源具有较好的估计精度,且具备高分辨率和低复杂度的优点。

**关键词:**均匀圆阵;相干信号;模式转换;线性预测;加权最小二乘法

**中图分类号:**TN95 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2021)03-058-08

## Uniform circular array decoherence algorithm based on principal eigenvector analysis

NI Liuliu, CHEN Hui, NI Mengyu, WANG Xiaoge

(Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

**Abstract:** To solve the problem of coherent signals DOA (direction-of-arrival) based on the uniform circular array, a new VLPEA (virtual uniform linear array principal eigenvector analysis) algorithm was proposed. The uniform circular array was transformed into the virtual uniform linear array in space model by mode excitation, and the principal eigenvector matrix was obtained by data covariance matrix; the weighted least square method was introduced to get the linear prediction coefficient between each element in subspace matrix and to acquire estimation of DOA of coherent signals. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed algorithm has good estimation accuracy, high resolution and low complexity.

**Keywords:** uniform circular array; coherent signals; mode excitation; linear prediction; weighted least square method

波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计一直是无线电通信、电子对抗侦察、声呐以及雷达系统等诸多领域的一个重要问题,在进行DOA估计之前需要确定阵列形状,常用阵型有均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA)、L型阵列及均匀圆阵(Uniform Circular Array, UCA)等,其中,均匀圆阵因其可提供360°的全方位无模糊定位以及各向同性性质而越来越得到重视。同时在实际波达方向估计中,由于反射或折射等引起的传输多径现象,或敌方设置的有源电磁干扰等,相干信号广泛存在,因此对于相干信号的检测与估计也是DOA估计中的重要研究方向。因此本文将研究适用于均匀圆阵的解相干算法。

目前,适用于均匀圆阵的解相干算法主要有三大类。一是虚拟阵变换,其思想就是通过阵列

变换将圆阵转换为虚拟均匀线阵<sup>[1-3]</sup>或者多个相同间距的均匀圆阵<sup>[4-6]</sup>,然后再利用空间平滑等方法进行解相干处理。如模式空间平滑(Method Of Direction Estimation-Space Smoothing, MODE-SS)算法<sup>[1]</sup>,就是将均匀圆阵通过模式空间变换转换成一个同孔径等距均匀线阵,再进行空间平滑处理。模式空间托普利兹(Method Of Direction Estimation-TOEPLITZ, MODE-TOEP)<sup>[2]</sup>是在模式空间变换后重构一个Toeplitz矩阵,这个矩阵的秩只和DOA信息有关,因此可以解相干。而模式空间差分(Method Of Direction Estimation-DIFFERENCE, MODE-DIFF)<sup>[3]</sup>算法将MODE-TOEP算法和差分算法相结合,达到同时估计非相关和相干信源的目的。模式空间中心对称(Method Of Direction Estimation-Central Symmetry, MODE-

\* 收稿日期:2019-10-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62001510)

作者简介:倪柳柳(1991—),男,江苏南通人,博士研究生,E-mail:niliuliu2017@163.com;

陈辉(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:chhgr@sina.com

CS)<sup>[5]</sup>利用均匀圆阵的中心对称性对模式空间数据进行共轭平均,通过相关性构造 Hermitian Toeplitz 矩阵,实现圆阵相干信源的方位估计。这类算法的优点是解相干的信号源数较多;但其缺点为阵列的变换会带来误差,导致 DOA 估计精度不高。二是采用多维搜索类算法<sup>[7-11]</sup>进行估计。这类算法不需要进行解相干预处理,就可以直接进行 DOA 估计,如基于轮换投影的最大似然 (Alternative Projection-Maximum Likelihood, AP-ML) 算法<sup>[10]</sup>、加权信号子空间拟合 (Weighted Signal Subspace Fitting, WSSF) 算法<sup>[8,11]</sup>等。这类算法的优点就是算法的估计精度高;缺点是运算过程中要用到多维搜索,运算量巨大。三是稀疏重构类 DOA 算法<sup>[12-18]</sup>,这类算法利用恢复稀疏信号的思想进行算法设计。Malioutov 等将 DOA 估计算法转变为基于 L1 范数的优化问题,提出了基于 L1 范数的奇异值分解 (L1-Singular Value Decomposition, L1-SVD) 算法<sup>[12]</sup>;文献[13]中的基于 L1 范数的矩阵协方差稀疏重构 (L1-Sparse Representation of Array Covariance Vectors, L1-SRACV) 算法利用了协方差矩阵的稀疏特性,并通过求解二阶锥优化问题来实现 DOA 估计;Yang 等则提出了离格稀疏贝叶斯 (Off Grid-Sparse Bayesian Inference, OG-SBI) DOA 估计方法<sup>[14-15]</sup>,也就是首先设置较粗的网格,而在估计过程中通过不停迭代将真实信源附近的网格不断逼近真实角度,最终实现 DOA 估计。这类算法的优点是无须信源数信息,对相干信源不敏感,估计精度较高。缺点为算法都是有偏估计,其 DOA 估计值相对真实值的偏差取决于网格的划分,而网格划分太小的话复杂度将非常高。

近年来,一种基于均匀线阵的新的解相干 DOA 算法<sup>[19-20]</sup> (Principal-eigenvector Utilization for Modal Analysis, PUMA) 被提出,该算法利用均匀线阵具备的范德蒙德结构来设计 DOA 算法,能够较好地估计相干信源的 DOA。受此启发,本文提出了一种基于虚拟均匀线阵的主特征矢量分析算法 (Virtual uniform Linear array Principal Eigenvector Analysis, VLPEA),算法在模式空间变换的基础上,分析虚拟均匀线阵主特征矢量的特性,通过求解线性预测算子最终成功估计出信源的方向。下节的分析和实验证明了本文算法估计精度高,复杂度低。

## 1 均匀圆阵阵列模型及预处理

本文采用均匀圆阵为阵列模型,其结构如

图 1 所示。

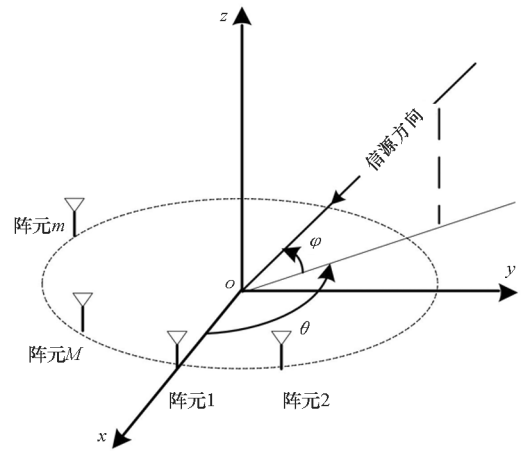


图 1 均匀圆阵阵列模型

Fig 1 Array model of UCA

$M$  个各向同性的阵元均匀分布在半径为  $r$  的圆阵上,远场窄带相干信号以方位角度  $\theta$  和俯仰角度  $\varphi$  入射到各个阵元, $\theta$  为信源和阵列中心的连线在  $xoy$  面上的投影与  $x$  轴的夹角, $\varphi$  为信源和阵列中心连线与  $xoy$  平面之间的夹角,其中  $\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$ 。

假设空间有  $K$  个波长为  $\lambda$  的远场窄带信号入射到 UCA 上,以阵列中心为参考点,第  $m$  个阵元位置为  $p_m = (x_m, y_m, 0)$ ,  $x_m = r \cos \psi_m$ ,  $y_m = r \sin \psi_m$ ,  $\psi_m = 2\pi(m-1)/M$ ,  $\psi_m$  为第  $m$  个阵元和圆心连线与  $x$  轴的夹角,第  $k$  个信号坐标为  $\gamma_k = (\cos \varphi_k \cos \theta_k, \cos \varphi_k \sin \theta_k, \sin \varphi_k)$ ,因此阵列模型导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta_k, \varphi_k) = [e^{-j\omega_0 \tau_{1k}}, e^{-j\omega_0 \tau_{mk}}, \dots, e^{-j\omega_0 \tau_{Mk}}]^T \quad (1)$$

式中:  $\tau_{mk} = \cos \varphi_k \cos(\theta_k - \psi_m) r/c$  为第  $k$  个信号在第  $m$  个阵元相对于参考阵元的时延  $k \in [1, K]$ ;  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda$ ,  $c$  为光速,  $\lambda$  为信号波长。因此流型矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_k, \varphi_k), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, \varphi_K)] \quad (2)$$

第  $t$  次快拍时的接收数据矢量为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), t = 1, \dots, N \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^M$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{C}^K$  和  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^M$  分别表示第  $t$  快拍数下的阵列接收数据、信源矢量和噪声矢量,  $N$  为总快拍数。

本文只讨论所有信源与  $xoy$  平面共面的情况,此时  $\varphi_k = 0$ ,接收数据变为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{A}_c(\theta) = [\mathbf{a}_c(\theta_1), \mathbf{a}_c(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_c(\theta_K)]$ , 导向矢量  $\mathbf{a}_c(\theta_k) = \mathbf{a}(\theta_k, 0)$ 。

综上所述,均匀圆阵的阵列流形矩阵不符合范德蒙德结构,大部分解相干 DOA 估计方法并不

适用,因此考虑利用模式空间变换法将阵列流型进行变换,得到符合范德蒙德结构的阵列流型,为下一步的解相干奠定基础。构造模式空间变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \frac{1}{M} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}^H \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{J} = \text{diag} \{ j^{-Q} J_{-Q}(-\beta), \dots, j^Q J_Q(-\beta) \}$ ,  $J_q(-\beta)$  为  $q$  阶第一类贝塞尔函数,  $\beta = 2\pi r/\lambda$ ,  $Q = \lfloor \beta \rfloor$  为均匀圆阵可以激发的最大相位模式, 这里  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向下取整;  $\mathbf{F} = [w_{-Q}, w_{-Q+1}, \dots, w_Q]$ ,  $w_q = [1, e^{-j2\pi q/M}, \dots, e^{-j2\pi q(M-1)/M}]$ ,  $q = -Q, \dots, Q$ 。

当取  $M > 2h + 1$  时,可以用构造的模式空间变换矩阵得到模式空间中虚拟均匀线阵的接收数据矢量:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_L \mathbf{s}(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t) \quad (6)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{n}(t)$ ,  $\mathbf{A}_L = \mathbf{T}\mathbf{A}_C$  为变换后的虚拟阵列流型矩阵,其形式为

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} e^{-jQ\theta_1} & \dots & e^{-jQ\theta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jQ\theta_1} & \dots & e^{jQ\theta_K} \end{bmatrix} \quad (7)$$

从式(7)可以看出,变换后的阵列流型具有范德蒙德结构,即等效为阵元数为  $D = 2Q + 1$  的虚拟均匀线阵,变换后的阵列数据协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_L = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)] = \mathbf{A}_L \mathbf{R}_s \mathbf{A}_L^H + \tilde{\mathbf{R}}_n \quad (8)$$

式中,  $E[\cdot]$  表示取期望值,  $\mathbf{R}_s$  为信号协方差矩阵,  $\tilde{\mathbf{R}}_n$  为模式空间变换后的噪声矩阵。假设原阵列流型接收到的噪声为高斯白噪声,噪声功率为  $\sigma^2$ ,则有:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_n &= \sigma^2 \mathbf{T}\mathbf{T}^H \\ &= \frac{\sigma^2}{M} \text{diag} \left( \frac{1}{J_{-h}^2(\beta)}, \frac{1}{J_{-h+1}^2(\beta)}, \dots, \frac{1}{J_h^2(\beta)} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可知,模式变换后的各通道噪声功率不一致,因此必须使用广义特征分解求解子空间。设  $\lambda_d (d = 1, 2, \dots, D)$  为矩阵束  $(\mathbf{R}_L, \mathbf{T}\mathbf{T}^H)$  广义特征分解后得到的所有特征值,按从大到小排列,  $\mathbf{u}_d$  为对应的特征矢量,前  $P$  个大特征值对应的主特征矢量组成矩阵  $\mathbf{U}_{LS} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_P]$ , 假设有  $K_1$  个相干信源,则  $P = K - K_1 + 1$ , 但是其张成的子空间并不是虚拟线阵的信号子空间,对其进行进一步的处理,得到修正的主特征矢量矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{U}_{LS} \\ &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_P] \\ &= [\mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_1, \mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_P] \end{aligned} \quad (10)$$

同上可得修正的噪声子空间:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= [\mathbf{v}_{P+1}, \mathbf{v}_{P+2}, \dots, \mathbf{v}_D] \\ &= [\mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_{P+1}, \mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{T}\mathbf{T}^H \mathbf{u}_D] \end{aligned} \quad (11)$$

## 2 虚拟均匀线阵主特征矢量分析算法

由文献[21]证明:

$$\text{span}(\mathbf{V}_s) = \text{span}(\mathbf{A}_L) \quad (12)$$

式(12)表明信号子空间  $\mathbf{V}_s$  和虚拟线阵的流行矩阵张成同一空间,而  $\mathbf{A}_L$  具有范德蒙德结构,因此考虑利用线性预测(Linear Prediction, LP)算法的原理,即  $\mathbf{v}_k (k = K + 1, K + 2, \dots, P)$  中任一元素和此元素之前  $K$  个元素线性相加为 0,来求解线性系数对应的角度。

### 2.1 算法推导

根据 LP 原理,得到

$$[\mathbf{v}_k]_l + \sum_{i=1}^K c_i [\mathbf{v}_k]_{l-i} = 0, l = K + 1, \dots, D \quad (13)$$

式中,  $[\mathbf{v}_k]_l$  为  $\mathbf{v}_k$  中第  $l$  个元素,  $c_i$  为之前第  $i$  个元素对应的 LP 系数。因此第  $k$  个角度  $\theta_k$  包含在如下多项式中:

$$z_k^K + \sum_{i=1}^K c_i z_k^{K-i} = 0 \quad (14)$$

式中,  $z_k = e^{j\theta_k}$ 。式(13)用矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{G}_k \mathbf{c} = \mathbf{h}_k \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_k]_K & [\mathbf{v}_k]_{K-1} & \dots & [\mathbf{v}_k]_1 \\ [\mathbf{v}_k]_{K+1} & [\mathbf{v}_k]_K & \dots & [\mathbf{v}_k]_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\mathbf{v}_k]_{D-1} & [\mathbf{v}_k]_{D-2} & \dots & [\mathbf{v}_k]_{D-K} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_K]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{h}_k = -[ [\mathbf{v}_k]_{K+1}, [\mathbf{v}_k]_{K+2}, \dots, [\mathbf{v}_k]_D ]^T \quad (18)$$

将所有特征向量  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  对应的式(15)合并到同一矩阵分析,得到

$$\mathbf{G}\mathbf{c} = \mathbf{h} \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1^T, \mathbf{G}_2^T, \dots, \mathbf{G}_P^T]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \dots, \mathbf{h}_P^T]^T \quad (21)$$

令  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{c} - \mathbf{h}_k$ , 可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T, \boldsymbol{\varepsilon}_2^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_P^T]^T = \mathbf{0}_{(D-K)P} \quad (22)$$

显而易见,理想情况下,式(19)是经典线性系统,可以用最小二乘(Least Squares, LS)法求解  $\mathbf{c}$ , 其闭式解为

$$\mathbf{c}_{LS} = \mathbf{G}^\dagger \mathbf{h} \quad (23)$$

式中,  $(\cdot)^\dagger$  表示伪逆。将其代入式(14)即可求

得包含角度信息的根。然而实际情况下协方差矩阵  $\mathbf{R}_L$  是无法获得的,因此采用有限快拍数  $N$  条件下的采样协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_L$  代替,即

$$\hat{\mathbf{R}}_L = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{Y} = [y(1), y(2), \dots, y(N)]$ , 对  $(\hat{\mathbf{R}}_L, \mathbf{T} \mathbf{T}^H)$  进行广义特征分解得到特征值  $\hat{\lambda}_d$  ( $d = 1, 2, \dots, D$ ), 前  $P$  个大特征值对应的采样特征矢量  $\hat{\mathbf{u}}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, P$ ), 再进行进一步处理得到修正的采样主特征矢量矩阵为

$$\hat{\mathbf{V}}_S = [\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_P] = [\mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_P] \quad (25)$$

同理得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_n &= [\hat{\mathbf{v}}_{P+1}, \hat{\mathbf{v}}_{P+2}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_D] \\ &= [\mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_{P+1}, \mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_{P+2}, \dots, \mathbf{T} \mathbf{T}^H \hat{\mathbf{u}}_D] \end{aligned} \quad (26)$$

用  $\hat{\mathbf{v}}_k$  代替  $\mathbf{v}_k$  推导产生  $\hat{\mathbf{G}}$  和  $\hat{\mathbf{h}}$ , 因此式(19)可近似为

$$\hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{h}} \quad (27)$$

式中,  $\hat{\mathbf{c}}$  为考虑误差下的 LP 系数。可以看出, 式(27)两端存在误差干扰, 用最小二乘法无法求得最优解, 因此考虑用加权最小二乘 (Weighted Least Square, WLS) 法来估计  $\hat{\mathbf{c}}$ , 其闭式解为

$$\hat{\mathbf{c}}_{\text{WLS}} = (\hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{G})^{-1} \hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{h}} \quad (28)$$

式中

$$\hat{\mathbf{W}} = (E[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T])^{-1} \quad (29)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{h}} \quad (30)$$

要用式(28)估计  $\hat{\mathbf{c}}$ , 需要明确  $\hat{\mathbf{W}}$  的值, 而  $\hat{\mathbf{W}}$  可由  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  得到。

在无误差条件下

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{vec}([\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_P]) = \text{vec}(\mathbf{B}(\mathbf{c}) \mathbf{V}_S) = \mathbf{0}_{(D-K)P} \quad (31)$$

式中

$$\mathbf{B}(\mathbf{c}) = \text{toep}([c_K, \mathbf{0}_{D-K-1}^T], [c_K, \dots, c_1, \mathbf{1}, \mathbf{0}_{D-K-1}^T]) \quad (32)$$

其中,  $\text{toep}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  表示由向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  构成的 Toeplitz 矩阵, 然后将误差考虑进去, 式(31)变为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \text{vec}(\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \hat{\mathbf{V}}_S) \\ &= \text{vec}(\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) (\mathbf{V}_S + \Delta \mathbf{V}_S)) \\ &= \text{vec}(\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \Delta \mathbf{V}_S) \\ &= (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}})) \Delta \mathbf{v}_S \end{aligned} \quad (33)$$

式中,  $\hat{\mathbf{V}}_S = \mathbf{V}_S + \Delta \mathbf{V}_S$ ,  $\Delta \mathbf{v}_S = \text{vec}(\Delta \mathbf{V}_S)$ , “ $\otimes$ ” 表示 kronecker 积, 将式(33)代入式(29), 得到

$$\hat{\mathbf{W}} = [(\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}})) E[\Delta \mathbf{v}_S \Delta \mathbf{v}_S^H] (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}))^H]^{-1} \quad (34)$$

文献[19]指出主特征矢量误差之间具有如下特性:

$$E[\Delta \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_j^H] \approx \frac{\lambda_i}{N} \sum_{k \neq i}^D \frac{\lambda_k}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \delta_{ij} \quad (35)$$

式中,  $\delta_{ij}$  为冲激函数。由式(35)可得

$$E[\Delta \mathbf{v}_S \Delta \mathbf{v}_S^H] \approx \begin{bmatrix} E[\Delta \mathbf{v}_1 \Delta \mathbf{v}_1^H] & & \\ & \ddots & \\ & & E[\Delta \mathbf{v}_K \Delta \mathbf{v}_K^H] \end{bmatrix} \quad (36)$$

由于  $(\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}))$  和  $E[\Delta \mathbf{v}_S \Delta \mathbf{v}_S^H]$  都是块对角矩阵,  $\hat{\mathbf{W}}$  也是块对角矩阵, 由式(31)可得,  $\hat{\mathbf{W}}$  中第  $i$  个对角矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) E[\Delta \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_i^H] \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}}) \\ &\approx \frac{\lambda_i \sigma_n^2}{N(\lambda_i - \sigma_n^2)} \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}}) \\ &= \frac{\lambda_i \sigma_n^2}{N(\lambda_i - \sigma_n^2)} \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) (\mathbf{I}_M - \mathbf{V}_S \mathbf{V}_S^H) \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}}) \\ &\approx \frac{\lambda_i \sigma_n^2}{N(\lambda_i - \sigma_n^2)} \mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}}) \end{aligned} \quad (37)$$

由式(34)、式(36)和式(37)得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}} &\approx \boldsymbol{\Gamma} \otimes [\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}})]^{-1} \quad (38) \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \frac{N(\lambda_1 - \sigma_n^2)^2}{\sigma_n^2 \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{N(\lambda_K - \sigma_n^2)^2}{\sigma_n^2 \lambda_K} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

在实际操作中,  $\lambda_k$  用  $\hat{\lambda}_k$  代替,  $\sigma_n^2$  估计式为

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{D-K} \text{tr}(\hat{\mathbf{A}}_n) \quad (40)$$

式中,  $\text{tr}(\cdot)$  为矩阵的迹,  $\hat{\mathbf{A}}_n$  为小特征值组成的对角矩阵, 由式(28)可得  $N/\hat{\sigma}_n^2$  可在运算过程中被消除, 因此最终估计式为

$$\hat{\mathbf{W}} \approx \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \otimes [\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}}) \mathbf{B}^H(\hat{\mathbf{c}})]^{-1} \quad (41)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}_n^2)^2}{\hat{\lambda}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{(\hat{\lambda}_K - \hat{\sigma}_n^2)^2}{\hat{\lambda}_K} \end{bmatrix} \quad (42)$$

然而此时  $\mathbf{B}(\mathbf{c})$  仍未知, 因此用最小二乘法从式(27)获得  $\hat{\mathbf{c}}$  的初始值

$$\hat{\mathbf{c}}_{\text{init}} = \hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{h}} \quad (43)$$

由式(32)和式(41)获得  $\mathbf{B}(\mathbf{c}) \hat{\mathbf{W}}_{\text{init}}$ , 再将其代入式(28)更新  $\hat{\mathbf{W}}$ , 然后不停修正  $\hat{\mathbf{c}}$ , 当满足收敛条件时停止更新, 并通过求解方程得到最后的角度信息。

## 2.2 算法流程

综上所述本文提出 VLPEA 算法, 算法步骤如下所示。

**步骤 1:** 利用式(43)得到初始化的  $\hat{\mathbf{c}}_{\text{init}}$  和  $\mathbf{B}(\hat{\mathbf{c}})$ 。

**步骤 2:** 将  $\mathbf{B}(\mathbf{c})$  代入式(41), 得到  $\hat{\mathbf{W}}$ 。

**步骤 3:** 然后用加权最小二乘法, 即式(28)计算新的  $\hat{\mathbf{c}}$  (即  $\hat{\mathbf{c}}_{\text{WLS}}$ )。

**步骤 4:** 重复步骤 2 和 3, 更新  $\hat{\mathbf{W}}$  和  $\hat{\mathbf{c}}$ , 直至  $\hat{\mathbf{c}}$  收敛。

**步骤 5:** 由得到的  $\hat{\mathbf{c}}$  求解  $K$  个根  $\hat{z}_k$ , 再根据式(44)求得 DOA 估计。

$$\hat{\theta}_k = \angle \hat{z}_k, k = 1, 2, \dots, K \quad (44)$$

式中, “ $\angle$ ” 为求角度符号

## 2.3 算法分析

MODE - TOEP 算法利用协方差矩阵的某一行重构具有 Toeplitz 结构的矩阵, 因此可以估计相干信源, 然而也是因为上述重构方法, 其信息利用并不充分, 因此其估计精度无法达到最佳。MODE - DIFF 算法使用了差分算法分别估计相干信源和独立信源, 然而差分的同时也去掉了分相干信源的部分信息, 因此同样无法将估计精度提升到最优。改进特征分解 (Excitation Mode EigenValue Decomposition, EMEVD) 算法<sup>[21]</sup>是在上述两种算法的基础之上再加上一次特征分解, 同样无法解决信息利用不全的问题。而本文的 VLPEA 算法通过对式(16)进行 WLS 求解, 该矩阵包含了信源的所有信息, 因此本文算法精度要比 EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法和 MODE - DIFF 算法高, 同时文献[19]证明了式(19)的 WLS 代价式在信噪比或者快拍数趋近于无穷大时可以等价于 ML 算法, 因此 VLPEA 算法估计精度很高。

由文献[14]可知, OG - SBI 中每次循环的复杂度为  $O(\max(MN_1^2, MN_1N))$ ,  $N_1$  是 OG - SBI 中初步设定的粗网格数, MODE - TOEP 算法和 MODE - DIFF 算法的复杂度主要集中在协方差矩阵特征分解及谱峰搜索, 其复杂度为  $O(D^3 + N_2 D^2 (D - K))$ ,  $N_2$  为算法谱峰搜索的网格数, 因

增加一次特征分解的缘故, EMEVD 算法复杂度较之上述两种算法更大。而本文算法的复杂度主要集中在计算  $\hat{\mathbf{R}}_L$  的特征分解、 $\hat{\mathbf{W}}$  和  $\hat{\mathbf{c}}$  这三步, 构造  $\hat{\mathbf{R}}_L$  及其特征分解需要  $O(D^2 N + D^3)$  次浮点运算, 计算  $\hat{\mathbf{W}}$  需要  $O(P(D - K)^3)$  次浮点运算, 计算  $\hat{\mathbf{c}}$  需要  $O(2K^2 P(D - K) + 2KP(D - K)^2 + K^3 + KP(D - K))$  次浮点运算。一般情况下, 当  $D \gg K \geq P$  时, 总的计算复杂度可以降为  $O(D^2 N + GD^3)$ ,  $G$  视迭代次数而定, 一般为 3 ~ 4 次。OG - SBI 中的初始网格数  $N_1$  远大于阵元数  $M$  和虚拟阵元数  $D$ ,  $M$  和  $D$  在相同数量级上, 在迭代终止条件为  $\xi \leq 1 \times 10^{-6}$  时, 迭代次数在 100 次以上。因此, OG - SBI 的计算复杂度比 VLPEA 算法大 2 个数量级以上, 而为达到精确性, 谱峰搜索间隔选定为  $0.02^\circ$ , 故  $N_2$  比  $N$  大 1 个数量级以上, 即 MODE - TOEP 算法和 MODE - DIFF 算法的复杂度比 VLPEA 算法大 1 个数量级以上。

## 3 仿真与分析

为验证 VLPEA 算法的有效性, 本节使用 MATLAB 进行如下仿真实验, 所有实验均采用 15 阵元的均匀圆阵阵列结构 (即  $M = 15$ ), 阵元半径为 0.7 倍的波长。在仿真实验中, 将本文算法与 MODE - TOEP 算法、MODE - DIFF 算法、MODE - CS 算法、ML 算法以及 OG - SBI 算法做比较, 其中 ML 算法采用文献[10]中的 AP - ML 算法, OG - SBI 算法中的终止迭代条件为  $\xi \leq 1 \times 10^{-6}$ , 最大重复迭代次数为 1 000, 初始网格为  $2^\circ$ 。在单次实验中每个真实角度与估计角度的偏差小于 0.4 倍的相邻两角度间隔时, 则认定为算法分辨成功, 完全均方根误差 (Completed Root Mean Squared Error, CRMSE) 定义为成功分辨 DOA 信号的均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE), 如式(45)所示。

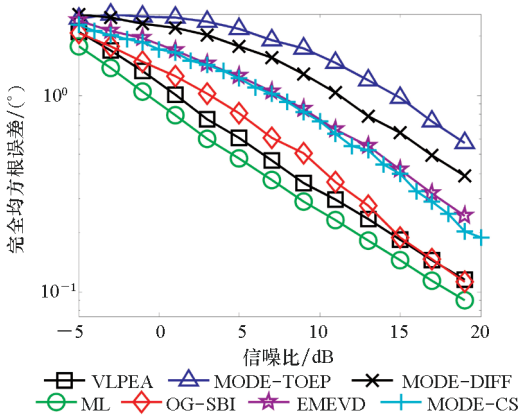
$$C_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{NK} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{ik} - \theta_k)^2} \quad (45)$$

式中,  $\theta_k$  为第  $k$  个信号的真实值,  $\hat{\theta}_{ik}$  为第  $i$  次试验下第  $k$  个信号的估计值, 利用 CRMSE 和成功概率作为评价标准来比较各算法的性能。

### 3.1 实验 1: 比较算法在信噪比变化时的性能

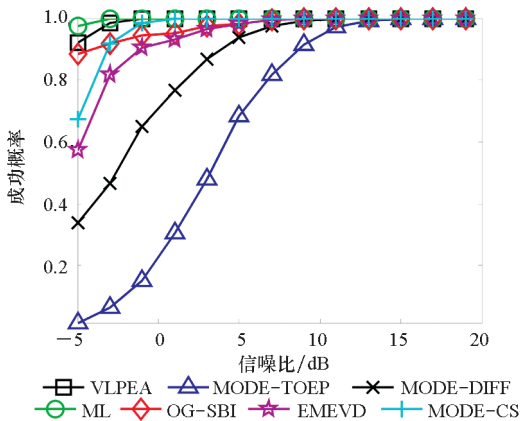
实验 1 比较了不同算法的 CRMSE 和分辨概率随信噪比变化的性能改变情况。假设有 4 个等功率信号入射到阵列上, DOA 分别为  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 25^\circ$ ,  $\theta_3 = 50^\circ$ ,  $\theta_4 = 70^\circ$ , 前两个信号源相干, 快拍数取 200, 信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR)

的变化范围为  $-5 \sim 20$  dB, 步长为 2 dB, 进行 2 000 次蒙特卡洛独立重复实验, 实验结果如图 2 所示。从图 2 (a) 可以看出, ML 算法的信源 CRMSE 是最小的, 本文提出的 VLPEA 算法的性能要比 EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法、MODE - CS 算法和 MODE - DIFF 算法好, 这与上文分析是一致的, 同时在信噪比小于 15 dB 时, VLPEA 算法的 CRMSE 比 OG - SBI 算法小, 当信噪比更大时 OG - SBI 算法性能则有所提升。由图 2 (b) 可以看出, 当 SNR 大于 1 时, VLPEA 算法的成功概率达到 100%, 而 OG - SBI、EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法和 MODE-DIFF 算法的成功概率在 SNR 大于 10 时才能达到 100%。



(a) 不同 DOA 估计算法 CRMSE 随信噪比 SNR 变化

(a) CRMSE of different DOA estimation algorithms versus SNR



(b) 不同算法的 DOA 估计成功概率随信噪比 SNR 变化

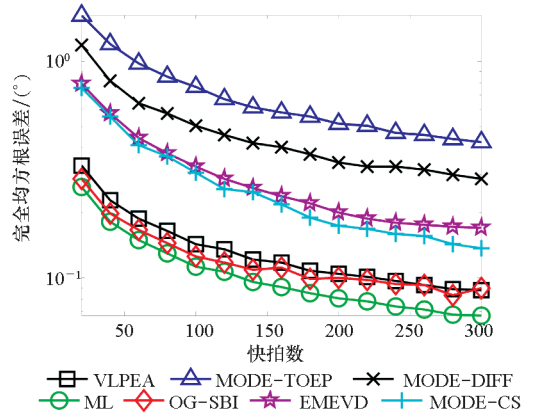
(b) Success probability of different DOA estimation algorithms versus SNR

图 2 不同信噪比情况下的算法性能分析

Fig 2 Performance analysis of the algorithms under different SNR

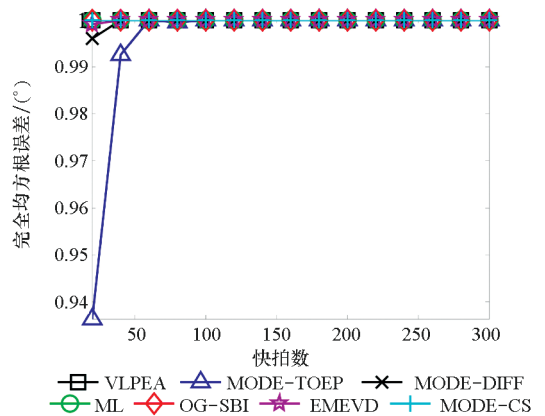
### 3.2 实验 2: 比较算法在快拍数变化时的性能

图 3 显示的是不同算法的 CRMSE 和成功概率随快拍数变化的情况, SNAP 即为快拍数, 此实验中 SNR 固定为 20 dB, 快拍数变化范围为 20 ~ 300, 步长为 20 次快拍数, 其他参数的设定和实验 1 一致。可以看出, 随着快拍数的增加, VLPEA 算法和其他几种算法的 CRMSE 都呈现降低的趋势, 其中依然是 ML 算法的 CRMSE 始终最小, OG - SBI 算法其次, VLPEA 算法的 CRMSE 十分接近上述两种算法, 而 EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法、MODE - CS 算法和 MODE - DIFF 算法的 CRMSE 则比上述三种算法大接近一个数量级, 在图 3 (b) 中, MODE - TOEP 算法和 MODE - DIFF 算法同样需要较多的快拍数才能保持性能稳定。



(a) 不同算法的 DOA 估计 CRMSE 随快拍数 SNAP 的变化

(a) CRMSE of different DOA estimation algorithms versus SNAP



(b) 不同算法的 DOA 估计成功概率随快拍数 SNAP 的变化

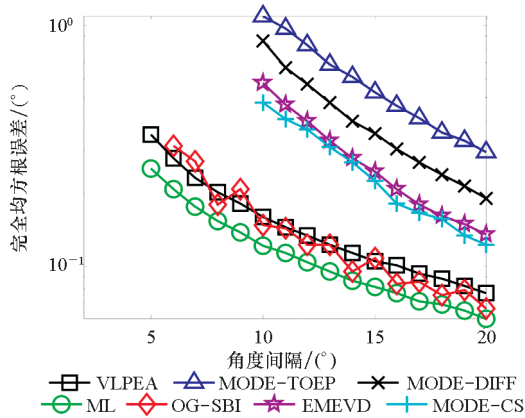
(b) Success probability of different DOA estimation algorithms versus SNAP

图 3 不同快拍数情况下的算法性能分析

Fig. 3 Performance analysis of the algorithms under different SNAP

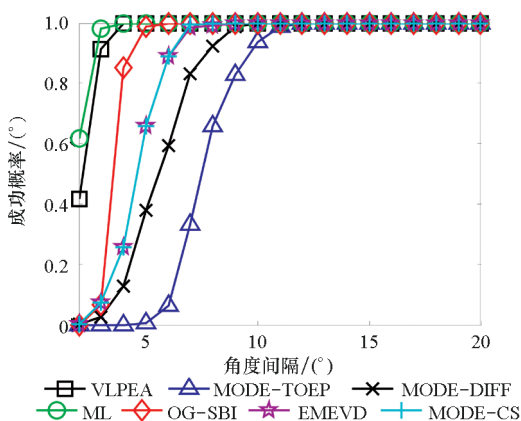
### 3.3 实验 3: 比较算法在角度间隔变化时的性能

本次实验比较各个算法的分辨性能。设定信噪比为 20, 快拍数为 200, 两个相干信源入射到阵列上, 第一个角度  $\theta_1$  固定为  $10^\circ$ , 第二个角度  $\theta_2$  从  $12^\circ$  变化到  $30^\circ$ , 其他参数和前面的实验一致, 结果如图 4 所示。图 4 的横坐标为两个角度的间隔变化, 由图 4(b) 可以看出, 在角度间隔大于  $5^\circ$  时, ML 算法和 VLPEA 算法的成功概率能到 100%, 而 EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法、MODE - CS 算法和 MODE - DIFF 算法在信噪比大于 10 时成功概率才能到 100%, 因此图 4(a) 观察所有算法成功概率等于 100% 时的 CRMSE, 发现 ML 算法、OG - SBI 算法以及 VLPEA 算法的 CRMSE 都维持在一个比较低的水平。



(a) 不同算法的 DOA 估计 CRMSE 随角度间隔的变化

(a) CRMSE of different DOA estimation algorithms versus spacing



(b) 不同算法的 DOA 估计成功概率随角度间隔的变化

(b) Success probability of different DOA estimation algorithms versus spacing

图 4 不同角度间隔下的算法性能分析

Fig.4 Performance analysis of the algorithms under different spacing

### 3.4 实验 4: 算法的时间复杂度分析

本次实验比较各个算法的时间复杂度。快拍

数固定为 200, 两个入射角度分别为  $10^\circ$  和  $25^\circ$ , 信噪比固定为 20, 阵元数不变, 表 1 所示为不同算法在阵元数变化时的单次平均运行时间, 可以看出 OG - SBI 算法的耗时相当长, 这是因为为了达到较高的精度, 其算法中的迭代门限取得很小, 导致重复次数非常高, ML 算法也需要大约 1 s 才能完成 DOA 估计, 而 EMEVD 算法、MODE - TOEP 算法、MODE - DIFF 算法, MODE - CS 算法以及 VLPEA 算法都能在极短时间内分辨出信源, 且 VLPEA 算法运算时间最短, 达到了毫秒级, 说明了 VLPEA 算法的计算量很低, 与前文的分析一致。

表 1 不同算法单次平均运行时间比较

Tab.1 Comparison of single average running time of different algorithms

算法	时间/s
VLPEA	0.006 2
EMEVD	0.181 2
MODE - TOEP	0.153 0
MODE - CS	0.084 5
MODE - DIFF	0.061 7
OG - SBI	2.601 9
ML	1.016 5

## 4 结论

本文提出了一种均匀圆阵的相干信源波达方向估计算法——VLPEA 算法。该算法首先通过模式空间变换技术将均匀圆阵转换为模式空间中的虚拟均匀线阵, 在此基础上对其数据协方差矩阵广义特征分解, 得到新的主特征矢量矩阵; 其次根据均匀线阵的范德蒙德结构, 构造包含信源 DOA 信息的线性多项式; 最后通过加权最小二乘法重复迭代得到线性预测系数成功求得相干信源的波达方向。

通过理论分析和仿真结果, 可以得出 VLPEA 算法的估计精度明显优于 MODE - TOEP 和 MODE - DIFF 算法, 且与 ML 算法和 OG - SBI 算法接近, 但是复杂度远低于上述两种算法, 因此 VLPEA 算法具有较好的估计精度、分辨力且实时估计更可靠。

## 参考文献 (References)

[1] 马常霖, 彭应宁, 田立生, 等. 均匀圆阵相干信源 DOA 估计的模式平滑算法[J]. 电子科学学报, 1998, 20(1): 14 - 19.  
MA Changlin, PENG Yingning, TIAN Lisheng, et al. Mode



- space smoothing algorithm for DOA estimation of coherent sources with uniform circular array [J]. *Journal of Electronics*, 1998, 20(1): 14–19. (in Chinese)
- [2] 高书彦, 陈辉, 王永良, 等. 基于均匀圆阵的模式空间矩阵重构算法[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(12): 2832–2835.  
GAO Shuyan, CHEN Hui, WANG Yongliang, et al. The MODE-TOEP algorithm based on uniform circular array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(12): 2832–2835. (in Chinese)
- [3] 谢菊兰, 李会勇, 何子述. 均匀圆阵相干信源 DOA 估计的差分算法[J]. *电子科技大学学报*, 2012, 41(4): 516–521.  
XIE Julan, LI Huiyong, HE Zishu. DOA estimation of coherent sources using difference algorithm with the uniform circular arrays[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2012, 41(4): 516–521. (in Chinese)
- [4] WEISS A J, FRIEDLANDER B, STOICA P. Direction-of-arrival estimation using MODE with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(1): 296–300.
- [5] 梁国龙, 田蕴琦, 付进, 等. 基于均匀圆阵中心对称性的相干源方位估计[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2019, 40(12): 1958–1964.  
LIANG Guolong, TIAN Yunqi, FU jin, et al. Direction estimation of coherent signals based on the central symmetry of uniform circular array [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2019, 40(12): 1958–1964. (in Chinese)
- [6] 穆世强, 陈天麒. 圆阵中相干信号的高分辨率阵列测向技术[J]. *电子科技大学学报*, 1993, 22(4): 350–355.  
MU Shiqiang, CHEN Tianlin. High resolution direction finding for circle array coherent sources [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 1993, 22(4): 350–355. (in Chinese)
- [7] BOHME J F. Source-parameter estimation by approximate maximum likelihood and nonlinear regression [J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 1985, 10(3): 206–212.
- [8] VIBERG M, OTTERSTEN B. Sensor array processing based on subspace fitting [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(5): 1110–1121.
- [9] 杨克虎, 保铮. 相干信号源最大似然波达方向估计的分辨性能[J]. *电子学报*, 1995, 23(12): 33–37.  
YANG Kehu, BAO Zheng. Maximum likelihood DOA estimation of multiple coherent signal emitters [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1995, 23(12): 33–37. (in Chinese)
- [10] ZISKIND I, WAX M. Maximum likelihood location of multiple sources by alternating projection [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(10): 1553–1559.
- [11] VIBERG M, OTTERSTEN B, KAILATH T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(11): 2436–2449.
- [12] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLISKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source location with sensor arrays [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [13] YIN J H, CHEN T Q. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4489–4493.
- [14] YANG Z, XIE L H, ZHANG C S. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43.
- [15] YANG Z, XIE L H, ZHANG C S. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 4959–4973.
- [16] WEN C, XIE X M, SHI G M. Off-grid DOA estimation under nonuniform noise via variational sparse Bayesian learning [J]. *Signal Processing*, 2017, 137: 69–79.
- [17] 王秀红, 毛兴鹏, 张乃通. 基于降维稀疏重构的相干信源二维 DOA 估计方法 [J]. *系统工程与电子技术*, 2016, 38(8): 1709–1715.  
WANG Xiuhong, MAO Xingpeng, ZHANG Naitong. Two-dimensional DOA estimation for coherent sources based on reduction dimension sparse reconstruction [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(8): 1709–1715. (in Chinese)
- [18] 张坤峰, 郭英, 齐子森, 等. 基于稀疏贝叶斯重构的多跳频信号参数估计 [J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2017, 45(1): 97–102.  
ZHANG Kunfeng, GUO Ying, QI Zisen, et al. Parameter estimation for multiple frequency-hopping signals based on sparse Bayesian reconstruction [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science*, 2017, 45(1): 97–102. (in Chinese)
- [19] QIAN C, HUANG L, SO H C, et al. Unitary PUMA algorithm for estimating the frequency of a complex sinusoid [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(20): 5358–5368.
- [20] QIAN C, HUANG L, SIDIROPOULOS N D, et al. Enhanced PUMA for direction-of-arrival estimation and its performance analysis [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(16): 4127–4137.
- [21] 张薇, 韩勇, 金铭, 等. 基于均匀圆阵的矢量重构解相干算法 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2016, 48(5): 62–66.  
ZHANG Wei, HAN Yong, JIN Ming, et al. DOA estimation of coherent signals based on vector reconstruction with uniform circular arrays [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2016, 48(5): 62–66. (in Chinese)