

拦截高速机动目标的捕获区及微分对策导引律*

毛柏源, 李君龙, 张锐, 张鹏飞
(北京电子工程总体研究所, 北京 100854)

摘要:针对高速机动目标拦截场景,研究末制导段捕获区存在条件及微分对策导引律问题。建立弹目相对运动模型并引入控制动力学模型,采用终端投影方法对相对运动模型进行降阶处理;基于微分对策理论推导一种解析形式捕获区,并具体到直/气复合控制导弹对机动目标的拦截中,该捕获区的存在能够保证对任意机动目标进行准确捕获;重新选取性能指标,将目标与直/气复合控制导弹在末端带有碰撞角约束的制导问题转化为零和微分对策问题,并求解出弹目最优拦截策略。仿真分析了几种情形下直/气复合控制导弹对目标实施拦截的捕获区存在域,导引律仿真结果表明微分对策导引律在对高速机动目标进行拦截时具有优良性能。

关键词:捕获区;复合控制;微分对策;碰撞角;导引律

中图分类号:TJ765 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2021)03-165-10

Capture zones and differential game guidance law for high-speed maneuvering target interception

MAO Boyuan, LI Junlong, ZHANG Rui, ZHANG Pengfei
(Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China)

Abstract: Aiming at the high-speed maneuvering target interception scenario, the conditions for the existence of the capture zone in the terminal guidance phase and the differential game guidance law were studied. The relative motion model of missile and target was established and the control dynamics model was introduced, and the relative motion model was reduced by terminal projection method. Based on the differential game theory, an analytic capture zone was derived, which can be used in the interception of maneuvering targets by a missile with dual control. The existence of the capture zone can ensure the accurate capture of any maneuvering target. The performance index function was re-selected, and the guidance problem of the target and the dual control missile with the collision angle constraint at the end was transformed into the zero-sum differential game problem, and the optimal interception strategy was solved. The simulation analyzed the existence of the capture zone of the dual control missile intercepting the target in several cases. Simulation results of the guidance law show that the differential game guidance law has better performance when intercepting high-speed maneuvering targets.

Keywords: capture zones; dual control; differential game; collision angle; guidance law

近年来,高速机动目标拦截技术逐渐成为现代防御系统的研究热点,传统的比例导引律已在低速非机动目标的攻击场景中获得了广泛的应用,并且效果良好。但对于高速机动目标的拦截,比例导引并不适用,因此对机动目标拦截的导引律研究具有重要意义。

文献[1-2]基于非奇异终端滑模控制理论设计了碰撞角约束下的滑模导引律,能够使系统状态在有限时间收敛。文献[3]基于零化视线转率,针对机动目标拦截问题,提出一种非线性微分几何导引律,采用非线性控制理论削弱了目标机动带来的影响。文献[4]采用最优控制方法实现了在时间和角度同时约束条件下对机动目标和非

机动目标的拦截。

相对于其他导引律,微分对策导引律的优势在于其只需要目标的机动能力,而不需要其未来的具体机动形式。文献[5]将机动目标拦截问题转化为零和微分对策问题,并得到了状态依赖里卡蒂微分方程的解,从而推导了微分对策导引律,该导引律不需要对剩余时间进行精确估计。文献[6]将微分对策导引律应用于多导弹协同拦截问题,多个导弹共同组成对策一方,得到的导引律使得导弹组从不同角度对目标实施拦截。文献[7]通过引入适当的性能函数,将鲁棒控制转化为两人零和微分对策问题,仿真验证了所提出鲁棒导引律的有效性。文献[8]针对固定末端时

* 收稿日期:2019-10-27

作者简介:毛柏源(1991—),男,甘肃天水人,工程师,博士,E-mail:mbybit@126.com

刻拦截机动目标的制导系统,构建了非线性有限时间微分对策框架,利用一个具有时变权值和激活函数的评价网络来逼近哈密顿-雅可比方程(Hamilton-Jacobi-Isaacs, HJI)方程的解,得到了基于自适应最优控制的有限时间微分对策制导律。从目前文献来看,微分对策导引律已被广泛应用于协同制导以及机动目标拦截等领域,但将其应用于捕获区的研究较少。

捕获区作为制导性能的一种评价依据,对它的深入研究意义重大,文献[9]推导了顺轨和逆轨的零控拦截条件,并得到了比例和反比例的捕获区。文献[10]通过引入弹目相对运动的单位角动量,将传统的捕获区描述转化为捕获长度描述,推导了三维空间内的理想比例导引律的捕获区。但上述捕获区的推导均是基于比例导引律,在机动目标拦截场景中的应用受到限制。

针对机动目标拦截时,弹目均具有任意阶动力学特性的情形,本文基于微分对策理论推导了一种线性化拦截场景中的解析形式捕获区,并具体到直/气复合控制导弹对机动目标的拦截中,之后重新选取性能指标,将目标与直/气复合控制导弹在末端带有碰撞角约束的制导问题转化为零和微分对策问题,通过求解弹目最优拦截策略,将鞍点解的存在条件转化为制导增益的约束问题。仿真验证了几种情形下直/气复合控制导弹对目标实施拦截的捕获区存在域,同时,导引律仿真结果表明微分对策制导方法在目标机动形式未知的情形下能够实现多种碰撞角约束的预期拦截。

1 弹目运动描述

为了研究方便,将拦截弹和目标均视为质点。弹目二维拦截几何示意图如图 1 所示,图中 R 为弹目相对距离; σ 为视线角; $M(x_M, y_M)$ 、 $T(x_T, y_T)$ 分别代表导弹、目标以及在 XOY 中的位置坐标; V_M 、 V_T 分别代表导弹和目标的的速度; a_M 、 a_T 分别代表导弹和目标的法向加速度; θ_M 、 θ_T 分别代表导弹和目标的弹道倾角;假设导弹与目标碰撞点为 C , θ_M^C 、 θ_T^C 分别代表导弹和目标在碰撞时刻的弹道倾角。在 XOY 坐标系下建立弹目相对运动学方程如下:

$$x = x_T - x_M \quad (1)$$

$$y = y_T - y_M \quad (2)$$

$$\dot{x} = V_T \cos \theta_T - V_M \cos \theta_M \quad (3)$$

$$\dot{y} = V_T \sin \theta_T - V_M \sin \theta_M \quad (4)$$

$$\dot{\theta}_T = a_T / V_T \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_M = a_M / V_M \quad (6)$$

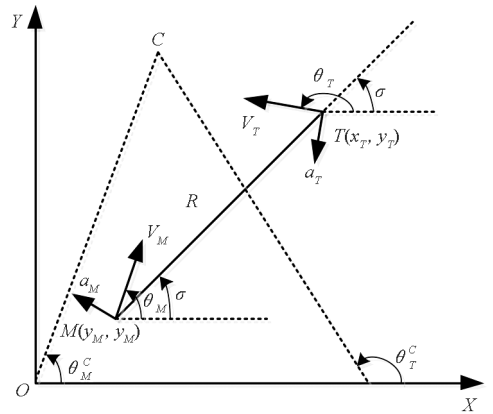


图 1 弹目拦截几何示意图

Fig. 1 Schematic of missile-target planar interception geometry

由导弹、目标在 XOY 平面内的相对位置可知,弹目交汇可看作沿 x 轴方向逐渐接近的运动, y 轴方向上的位移差可看作是脱靶量。定义末制导剩余时间为 $t_{go} = t_f - t$,初始时刻为 t_0 ,当导弹击中目标时,设 $t = t_f$,此时弹目相对法向速度为零,则

$$V_T \sin(\theta_T - \sigma) = V_M \sin(\theta_M - \sigma) \quad (7)$$

为不失一般性,本文的研究基于以下假设。

假设 1 在末制导阶段,认为导弹和目标速度大小不变,并且弹目机动相对于两者的速度为小量。

假设 2 认为导弹和目标的控制输入均有界。

假设 3 末制导过程中,导弹和目标偏离初始碰撞三角形较小。

根据假设 3,引入一个小量

$$\Delta \theta_j = \theta_j - \theta_j^C \quad (8)$$

式中, $j \in \{T, M\}$,本文中下标 j 含义相同。

则得到

$$\sin \theta_j = \sin \theta_j^C + \cos \theta_j^C \cdot \Delta \theta_j \quad (9)$$

结合式(4)、式(7)、式(9)可得

$$\dot{y} = V_T \cos \theta_T^C \cdot \Delta \theta_T - V_M \cos \theta_M^C \cdot \Delta \theta_M \quad (10)$$

结合式(5)、式(6)、式(10)可得

$$\dot{y} = a_T \cos \theta_T^C - a_M \cos \theta_M^C \quad (11)$$

通常,在带有碰撞角度约束的拦截场景中,碰撞角度定义为导弹击中目标时其速度矢量与目标速度矢量的夹角,即

$$\theta_F^C = \theta_T^C - \theta_M^C \quad (12)$$

式中: θ_F^C 为弹目碰撞角度,本文针对逆轨拦截情形,则碰撞角度需满足 $\pi/2 < \theta_F^C < \pi$ 。

考虑一类系统的任意阶控制动力学方程,则

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_j^i = A_{\omega}^j \Gamma_j^i + B_{\omega}^j u_j \\ \mathbf{a}_j = \mathbf{c}_{\omega}^j \Gamma_j^i + \mathbf{d}_{\omega}^j u_j \end{cases} \quad (13)$$

其中, Γ_j^i 代表 n_{ω}^j 维系统中的动力学状态量, $A_{\omega}^j \in \mathbb{R}^{n_{\omega}^j \times n_{\omega}^j}$, $B_{\omega}^j \in \mathbb{R}^{n_{\omega}^j \times n_{\omega}^j}$, $\mathbf{c}_{\omega}^j \in \mathbb{R}^{1 \times n_{\omega}^j}$, $\mathbf{d}_{\omega}^j \in \mathbb{R}^{1 \times n_{\omega}^j}$, u_j 代表系统的控制输入, 且任一输入量均为有界, 即

$$|u_j^i| \leq \bar{u}_j^i, \quad i \in N_{\omega}^j \quad (14)$$

对于系统中第 i 个输入 u_j^i , 定义其在总的机动

能力 $u_j^{\max} = \sum_{i=1}^{n_{\omega}^j} \bar{u}_j^i$ 中的权重系数为 κ_i^j , 则有

$$|u_j^i| \leq \kappa_i^j \cdot u_j^{\max}, \quad 0 \leq \kappa_i^j \leq 1 \quad (15)$$

并且对于 $\mathbf{Q}_j = [\kappa_1^j \quad \kappa_2^j \quad \cdots \quad \kappa_{n_{\omega}^j}^j]^T$ 满足

$$\|\mathbf{Q}_j\|_1 = \sum_{i=1}^{n_{\omega}^j} \kappa_i^j = 1 \quad (16)$$

为后续推导方便, 选取如下状态变量

$$\mathbf{X} = [y \quad \dot{y} \quad \Gamma_M^T \quad \Gamma_T^T \quad \theta_F^C]^T \quad (17)$$

根据式(5)、式(6)、式(11)、式(12)及式(13)可得到导弹与目标相对运动方程如下

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_M u_M + \mathbf{B}_T u_T \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times n_{\Gamma}^M} & \mathbf{0}_{1 \times n_{\Gamma}^T} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{c}_{\Gamma}^M \cos \theta_M^C & \mathbf{c}_{\Gamma}^T \cos \theta_T^C & 0 \\ \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^M \times 1} & \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^M \times 1} & \mathbf{A}_{\Gamma}^M & \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^M \times n_{\Gamma}^T} & 0 \\ \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^T \times 1} & \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^T \times 1} & \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^T \times n_{\Gamma}^M} & \mathbf{A}_{\Gamma}^T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{c}_{\Gamma}^M}{V_M} & \frac{\mathbf{c}_{\Gamma}^T}{V_T} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{d}_{\Gamma}^M \cos \theta_M^C \\ \mathbf{B}_{\Gamma}^M \\ \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^T \times 1} \\ -\frac{\mathbf{d}_{\Gamma}^M}{V_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{\Gamma}^T \cos \theta_T^C \\ \mathbf{0}_{n_{\Gamma}^M \times 1} \\ \mathbf{B}_{\Gamma}^T \\ \frac{\mathbf{d}_{\Gamma}^T}{V_T} \end{bmatrix}.$$

其中, \mathbf{A} 为系统矩阵, \mathbf{B}_M 和 \mathbf{B}_T 分别代表导弹与目标的输入矩阵, u_M 和 u_T 分别代表导弹与目标的控制输入, 状态变量 y 、 \dot{y} 分别代表弹目碰撞时刻的脱靶量及其微分, 状态变量 Γ_M^T 、 Γ_T^T 分别代表 n_{ω}^j 维系统中的动力学状态量, 状态变量 θ_F^C 为弹目碰撞时刻的碰撞角度。

2 捕获区存在条件分析

2.1 复合控制导弹末制导段捕获区分析

为研究方便, 采用文献[11]中的终端投影方法, 对式(18)进行降阶处理。

$$\mathbf{Z}(t) = [z_1(t) \quad z_2(t)]^T = \mathbf{D}\Phi(t_f, t)\mathbf{X}(t) \quad (19)$$

式中, $\mathbf{Z}(t)$ 为降阶处理后重新定义的状态向量, 该向量的物理意义是导弹与目标从当前时刻开始不加任何控制, 直至弹目遭遇所产生的脱靶量和碰撞角。其中, $z_1(t)$ 代表零控脱靶量 (Zero Effort Miss distance, ZEM), $z_2(t)$ 代表零控碰撞角 (Zero Effort impact Angle, ZEA)。 $\Phi(t_f, t)$ 为系统式(18)的状态转移矩阵, \mathbf{D} 为常数矩阵, 其取值如下

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

对式(19)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}(t) &= \mathbf{D}(\dot{\Phi}(t_f, t)\mathbf{X}(t) + \Phi(t_f, t)\dot{\mathbf{X}}(t)) \\ &= \mathbf{D}\Phi(t_f, t)(\mathbf{B}_M u_M + \mathbf{B}_T u_T) \end{aligned} \quad (21)$$

系统降阶后, 首先研究 $z_1(t)$ 与弹目双方机动策略之间的关系。由式(21)可设

$$\dot{z}_1(t) = \mathbf{f}_M(t_f, t)u_M + \mathbf{f}_T(t_f, t)u_T \quad (22)$$

式中, $\mathbf{f}_M(t_f, t) \triangleq \mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f, t) \mathbf{B}_{M1}$, $\mathbf{f}_T(t_f, t) \triangleq \mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f, t) \mathbf{B}_{T1}$, 其中 \mathbf{D}_1 、 $\Phi_1(t_f, t)$ 、 \mathbf{B}_{M1} 、 \mathbf{B}_{T1} 为式(17)选择前四个状态变量时对应的矩阵。

基于 $z_1(t)$ 选取如下性能指标函数

$$J_{z1} = |z_1(t_f)| \quad (23)$$

根据式(22)构造哈密顿函数

$$\begin{aligned} H_{z1} &= \lambda_{z1} z_1(t) \\ &= \lambda_{z1} [\mathbf{f}_M(t_f, t)u_M + \mathbf{f}_T(t_f, t)u_T] \end{aligned} \quad (24)$$

式中, λ_{z1} 为待定的拉格朗日乘子。

则弹目最优拦截策略为

$$\begin{aligned} u_M^* &= \operatorname{argmin} H_{z1} \\ &= -\operatorname{sign}[\lambda_{z1} \mathbf{f}_M(t_f, t)] \cdot \mathbf{Q}_M \cdot u_M^{\max} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u_T^* &= \operatorname{argmax} H_{z1} \\ &= \operatorname{sign}[\lambda_{z1} \mathbf{f}_T(t_f, t)] \cdot \mathbf{Q}_T \cdot u_T^{\max} \end{aligned} \quad (26)$$

协态方程及横截条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{z1} = -\frac{\partial H_{z1}}{\partial z_1} = 0 \\ \lambda_{z1}(t_f) = \operatorname{sign}[z_1(t_f)], \quad z_1(t_f) \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

可得

$$\lambda_{z1} = \operatorname{sign}[z_1(t_f)] \quad (28)$$

结合以上条件, 将式(22)从 t 到 t_f 积分, 得到 $z_1(t)$ 的最优轨迹为

$$\begin{aligned} z_1^*(t) &= z_1(t_f) - \operatorname{sign}[z_1(t_f)] \times \\ &\int_t^{t_f} [F_T(t_f, \varphi) \cdot u_T^{\max} - F_M(t_f, \varphi) \cdot u_M^{\max}] d\varphi \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$F_j(t_f, t) = \sum_{i=1}^{n_{\omega}^j} \kappa_i^j \cdot |f_i^j(t_f, t)| \quad (30)$$

针对目标机动未知的情形,为了研究对策双方在拦截末段的捕获区存在条件,首先给出捕获区定义及相关引理如下。

定义 1 具有非零初始条件的拦截弹能够对目标实现精确拦截的空间区域称为捕获区。

$$\{(t_0, z_1(t_0)) \mid u_M = u_M^*, u_T \in U_T; z_1(t_f) = 0\} \quad (31)$$

引理 1^[12] 在线性一对一拦截情形中,捕获区存在的充分必要条件是

$$\begin{aligned} &\exists t_0 < t_f: u_M^{\max} F_M(t_f, t) - u_T^{\max} F_T(t_f, t) \geq 0, \\ &\forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (32)$$

定理 1 当系统式(13)描述对策双方的自动驾驶仪动态特性,且最优拦截轨迹满足式(29)时,在一对一拦截情形中必然存在如下形式的捕获区。

$$\begin{aligned} |Z_\tau(t_{go}^\tau)| &= |Z_\tau(0)| + \mu_1 [\kappa_1^M \cdot \int_0^{t_{go}^\tau} |f_1^M(\varphi)| d\varphi + \\ &\kappa_2^M \cdot \int_0^{t_{go}^\tau} |f_2^M(\varphi)| d\varphi] - \\ &\mu_2 \kappa_T \cdot \int_0^{t_{go}^\tau} |f_T(\varphi/\mu_2)| d\varphi \end{aligned} \quad (33)$$

证明:针对系统式(13),可得出其传递函数为

$$\begin{aligned} N_j(s) &= \frac{a_j(s)}{u_j(s)} \\ &= [N_1^j(s) \quad N_2^j(s) \quad \dots \quad N_{n_c}^j(s)] \\ &\triangleq \mathbf{c}_R^j (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R^j)^{-1} \mathbf{B}_{j1}^j + \mathbf{d}_R^j \end{aligned} \quad (34)$$

本文为了方便研究,将其中任一传递函数简化为

$$N_i^j(s) = \frac{1 + s\tau_i^j}{1 + s\tau_i^j} \quad (35)$$

将 $N_i^j(s)$ 进一步简化为

$$N_i^j(s) = d_i^j + \frac{1 - d_i^j}{1 + s\tau_i^j} \quad (36)$$

式中, $d_i^j = \tau_i^j/\tau_i^j$, $|d_i^j| < 1$ 。式(36)表明导弹获得的加速度由两部分组成,即直接力作用部分和气动对制导指令的响应部分,其中 d_i^j 相当于前馈环节施加于控制系统,当 $d_i^j > 0$ 时,表示直接力部分作用在质心之前;当 $d_i^j < 0$ 时,表示直接力部分作用在质心之后;当 $d_i^j = 0$ 时,传递函数 N_i^j 退化为一阶惯性环节^[13-14]。

对式(22)中的 $\mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f, t) \mathbf{B}_{j1}$ 进行拉普拉斯反变换可得

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f, t) \mathbf{B}_{j1} &= \mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f - t) \mathbf{B}_{j1} \\ &= \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{\mathbf{c}_R^j (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R^j)^{-1} \mathbf{B}_{j1}^j \cos\theta_j^C + \mathbf{d}_R^j \cos\theta_j^C}{s^2} \right] \\ &= \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{N_j(s)}{s^2} \right] \cdot \cos\theta_j^C \end{aligned} \quad (37)$$

对于 $N_i^j(s)/s^2$,其拉普拉斯反变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{N_i^j(s)}{s^2} \right] &= d_i^j \varphi + (1 - d_i^j) \times \\ &\tau_i^j \cdot \left(e^{-\varphi/\tau_i^j} + \frac{\varphi}{\tau_i^j} - 1 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

则由 $f_j(t_f, t) \triangleq \mathbf{D}_1 \Phi_1(t_f, t) \mathbf{B}_{j1}$ 可得

$$\begin{aligned} f_i^j(\varphi) &= \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{N_i^j(s)}{s^2} \right] \cdot \cos\theta_j^C \\ &= [d_i^j \varphi + (1 - d_i^j) \times \tau_i^j \cdot \left(e^{-\varphi/\tau_i^j} + \frac{\varphi}{\tau_i^j} - 1 \right)] \cdot \cos\theta_j^C \end{aligned} \quad (39)$$

将式(39)看作 f_i^j 关于 t_{go} 的函数时,结合式(30)可得

$$F_j(t_{go}) = \sum_{i=1}^{n_c} \kappa_i^j \cdot |f_i^j(t_{go})| \quad (40)$$

由式(39)、式(40)可知

$$\lim_{t_{go} \rightarrow 0} [u_M^{\max} F_M(t_{go}) - u_T^{\max} F_T(t_{go})] \geq 0 \quad (41)$$

根据引理 1 可知,式(41)满足捕获区存在条件。因此,若选择了系统式(13)描述的对策双方自动驾驶仪动态特性,则在一对一拦截情形中必然存在捕获区,下面将推导捕获区的解析表达式。

本文基于直/气复合控制拦截弹,主要研究在线性一对一拦截情形中的捕获区存在条件。结合定理 1,分别选择导弹与目标的自动驾驶仪动态特性传递函数如下

$$N_i^M(s) = \frac{1 + s\tau_i^M}{1 + s\tau_M} = d_i^M + \frac{1 - d_i^M}{1 + s\tau_M}, i \in \{1, 2\} \quad (42)$$

$$N_T(s) = \frac{1}{1 + s\tau_T} \quad (43)$$

为了进一步分析捕获区的存在范围,将零控脱靶量 $z_1(t)$ 对 $\tau_M^2 u_T^{\max}$ 归一化,剩余时间 t_{go} 对 τ_M 归一化,即

$$Z_\tau(t) = \frac{z_1(t)}{\tau_M^2 u_T^{\max}} \quad (44)$$

$$t_{go}^\tau = \frac{t_{go}}{\tau_M} \quad (45)$$

则由式(22)可得

$$\begin{aligned} \frac{dZ_\tau(t)}{dt_{go}} &= \frac{1}{\tau_M^2 u_T^{\max}} [f_1^M(t_{go}) u_1^M(t) + \\ &f_2^M(t_{go}) u_2^M(t) - f_T(t_{go}) u_T(t)] \end{aligned} \quad (46)$$

将式(25)、式(26)代入式(46),并对 t 从 0 到 t_{go} 积分,得到

$$\begin{aligned} Z_\tau(t_{go}) &= Z_\tau(0) + \frac{\text{sign}\{Z_\tau(0)\}}{\tau_M^2} \times \\ &[\mu_1 \kappa_1^M \cdot \int_0^{t_{go}} |f_1^M(\varphi)| d\varphi + \mu_1 \kappa_2^M \cdot \int_0^{t_{go}} |f_2^M(\varphi)| d\varphi - \end{aligned}$$

$$\kappa_T \cdot \int_0^{t_{go}} |f_T(\varphi)| d\varphi \quad (47)$$

式中

$$\mu_1 = \frac{u_M^{\max} \cdot |\cos\theta_M^C|}{u_T^{\max} \cdot |\cos\theta_T^C|} \quad (48)$$

μ_1 代表拦截弹与目标在垂直于 OY 轴方向的最大机动能力之比, 设 $\mu_2 = \tau_T/\tau_M$, 其代表目标与导弹自动驾驶仪时间常数之比, 由 $f_i^M(t_{go})/\tau_M = f_i^M(t_{go}/\tau_M)$ 及 $f_T(t_{go})/\tau_M = f_T([t_{go}/\tau_M]/\mu_2)$, 并结合式(45)可得位于 $Z_r(t_{go}^r) = 0$ 轴上方的捕获区表达式为

$$\begin{aligned} |Z_r(t_{go}^r)| = & |Z_r(0)| + \mu_1 \left[\kappa_1^M \cdot \int_0^{t_{go}^r} |f_1^M(\varphi)| d\varphi + \right. \\ & \left. \kappa_2^M \cdot \int_0^{t_{go}^r} |f_2^M(\varphi)| d\varphi \right] - \\ & \mu_2 \kappa_T \cdot \int_0^{t_{go}^r} |f_T(\varphi/\mu_2)| d\varphi \quad (49) \end{aligned}$$

□

2.2 基于碰撞角约束的微分对策问题研究

2.1 节定性分析了复合控制导弹对于机动目标在拦截末段的捕获区问题, 本节针对式(18)所示的系统, 主要研究基于直/气复合控制的拦截弹与机动目标在末制导段带终端碰撞角约束的微分对策问题。

设性能指标如下

$$\begin{aligned} J_2 = & \frac{1}{2} c_0 z_1^2(t_f) + \frac{1}{2} c_1 [z_2(t_f) - \theta_F^E]^2 + \\ & \frac{1}{2} \int_t^{t_f} (u_M^2 - c_2^2 u_T^2) dt \quad (50) \end{aligned}$$

式中, c_0, c_1, c_2 为权系数, $c_0, c_1 \geq 0, c_2 > 0$ 表示目标相对于导弹的机动能力, c_2 可表示为 $c_2 = u_M^{\max}/u_T^{\max}$, θ_F^E 为期望的碰撞角, $z_2(t) - \theta_F^E$ 代表零控碰撞角误差。从性能指标分析得知导弹的最优控制策略欲使 J_2 达到最小, 目标欲使 J_2 最大, 弹、目构成了零和对策的双方^[15]。根据式(19)、式(21)、式(42)、式(43)可得

$$\begin{aligned} z_1(t) = & \dot{y}t_{go} + y + [\Gamma_T \tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T) \cos\theta_T^C] - \\ & [\Gamma_M \tau_{\varepsilon 1M} g_1(\tau_M) \cos\theta_M^C] \quad (51) \end{aligned}$$

$$z_2(t) = \theta_F^C - \Gamma_T g_2(\tau_T)/V_T + \Gamma_M g_2(\tau_M) \tau_{\varepsilon 1M}/V_M \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & u_T \tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T) \cos\theta_T^C - \\ & u_M \cos\theta_M^C [\tau_{\varepsilon 1M} g_1(\tau_M) + t_{go} \tau_{\varepsilon 2M}] \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & -u_T g_2(\tau_T)/V_T - \\ & u_M [\tau_{\varepsilon 1M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M}]/V_M \quad (54) \end{aligned}$$

式中, $g_1(\xi) = t_{go} - \xi + \xi e^{-t_{go}/\xi}$, $g_2(\xi) = e^{-t_{go}/\xi} - 1$, $\tau_{\varepsilon 1M} = (2\tau_M - \tau_{zM})/\tau_M$, $\tau_{\varepsilon 2M} = \tau_{zM}/\tau_M$, $\tau_{\varepsilon T} = \tau_T(2\tau_M -$

$\tau_{zM})/\tau_M^2$, 根据式(53)、式(54)构造哈密顿函数如下

$$H = \frac{1}{2} u_M^2 - \frac{1}{2} c_2^2 u_T^2 + \lambda_1 z_1(t) + \lambda_2 z_2(t) \quad (55)$$

由协态方程及横截条件可得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = c_0 z_1(t_f) \\ \dot{\lambda}_2(t) = c_1 [z_2(t_f) - \theta_F^E] \end{cases} \quad (56)$$

基于以上条件可得弹、目最优拦截策略为

$$\begin{aligned} u_M^{* *} = & c_0 z_1(t_f) \cos\theta_M^C [\tau_{\varepsilon 1M} g_1(\tau_M) + t_{go} \tau_{\varepsilon 2M}] + \\ & c_1 [z_2(t_f) - \theta_F^E] [\tau_{\varepsilon 1M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M}]/V_M \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_T^{* *} = & \{ c_0 z_1(t_f) \cos\theta_T^C \tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T) - \\ & c_1 [z_2(t_f) - \theta_F^E] g_2(\tau_T)/V_T \} / c_2^2 \quad (58) \end{aligned}$$

将式(57)、式(58)代入式(53)、式(54), 并从 t 到 t_f 积分, 可得末端时刻状态

$$z_1(t_f) = \frac{(1 - c_1 G_3) z_1(t) - c_1 G_2 (z_2(t) - \theta_F^E)}{G_c} \quad (59)$$

$$z_2(t_f) - \theta_F^E = \frac{(1 - c_0 G_1) (z_2(t) - \theta_F^E) - c_0 G_2 z_1(t)}{G_c} \quad (60)$$

式中

$$\begin{aligned} G_1 = & \int_t^{t_f} \{ [\tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T) \cos\theta_T^C / c_2]^2 - \\ & [\tau_{\varepsilon 1M} g_1(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M} t_{go}] \cos\theta_M^C \}^2 d\varphi \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 = & \int_t^{t_f} \{ [\tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T) g_2(\tau_T) \cos\theta_T^C / (c_2^2 V_T)] + \\ & [\tau_{\varepsilon 1M} g_1(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M} t_{go}] \times \\ & (\tau_{\varepsilon 1M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M}) \cos\theta_M^C / V_M \} d\varphi \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3 = & \int_t^{t_f} \{ [g_2(\tau_T) / (c_2 V_T)]^2 - \\ & [\tau_{\varepsilon 1M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M}]/V_M \}^2 d\varphi \quad (63) \end{aligned}$$

$$G_c = (1 - c_0 G_1) (1 - c_1 G_3) - c_0 c_1 G_2^2 \quad (64)$$

再将式(59)、式(60)代入式(57)、式(58)可得导弹、目标最优拦截策略表示为零控脱靶量与零控碰撞角误差的线性组合形式

$$u_M^{* *} = \frac{K_{M1}}{t_{go}^2} z_1(t) + K_{M2} \frac{V_M}{t_{go}} [z_2(t) - \theta_F^E] \quad (65)$$

$$u_T^{* *} = \frac{K_{T1}}{t_{go}^2} z_1(t) + K_{T2} \frac{V_T}{t_{go}} [z_2(t) - \theta_F^E] \quad (66)$$

式中, t_{go} 代表剩余飞行时间, 其由弹目距离除以弹目相对速度沿视线的分量得到, $K_{M1}, K_{M2}, K_{T2}, K_{T2}$ 代表制导增益。

$$K_{M1} = -c_0 c_1 G_2 \frac{[\tau_{\varepsilon 1M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2M}] t_{go}^2}{G_c V_M} +$$

$$c_0 \cos \theta_M^c (1 - c_1 G_3) \frac{[\tau_{\varepsilon 1 M} g_1(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2 M} t_{go}^2] t_{go}^2}{G_c} \quad (67)$$

$$K_{M2} = -c_0 c_1 G_2 \cos \theta_M^c \frac{[\tau_{\varepsilon 1 M} g_1(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2 M} t_{go}^2] t_{go}}{G_c V_M} + c_1 (1 - c_0 G_1) \frac{[\tau_{\varepsilon 1 M} g_2(\tau_M) + \tau_{\varepsilon 2 M}] t_{go}}{G_c V_M^2} \quad (68)$$

$$K_{T1} = c_0 c_1 G_2 \frac{g_2(\tau_T) t_{go}^2}{G_c V_T c_2^2} + c_0 \cos \theta_T^c (1 - c_1 G_3) \frac{[\tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T)] t_{go}^2}{G_c c_2^2} \quad (69)$$

$$K_{T2} = -c_0 c_1 G_2 \cos \theta_T^c \frac{[\tau_{\varepsilon T} g_1(\tau_T)] t_{go}}{G_c V_T c_2^2} - c_1 (1 - c_0 G_1) \frac{g_2(\tau_T) t_{go}}{G_c V_T V_M c_2^2} \quad (70)$$

对于弹目双方零和微分对策问题,鞍点解存在当且仅当系统式(18)对应的下列里卡蒂微分方程的解有限。

$$\dot{P}(t) = PA + A^T P + P(c_2^{-2} B_1 B_1^T - B_M B_M^T) P \quad (71)$$

式中, $P(t_f) = \text{diag}(c_0, 0, 0, 0, c_1)$, 而 $P(t)$ 有限的充分条件是制导增益有界, 故当式(67)~(70)有界的情况下才存在鞍点解。通过对性能指标式(50)分析可知, 只有当 $c_0, c_1 \rightarrow \infty$ 时才满足理想拦截情形, 故参数 c_0, c_1 的选取需要综合制导增益与性能指标进行确定。

由于微分对策中鞍点解的存在要求制导增益 $K_{M1}, K_{M2}, K_{T1}, K_{T2}$ 有界, 故应从制导增益与 c_0, c_1 的关系来着手分析选取原则。首先, 考虑满足脱靶量指标 $c_0 \rightarrow \infty$, 而 c_1 取为有限值时的制导增益变化趋势; 然后, 进一步分析目标无机动 $c_2 \rightarrow \infty$, 此时制导增益随 c_1 取值的变化趋势, 由此可以得到使制导增益有界, 即分母不为零的约束方程, 从而反向推导 c_0, c_1 的取值范围。

3 仿真分析

本节首先基于式(49)给出的弹目沿最优拦截轨迹运动时的捕获区解析式进行了仿真验证, 之后, 将目标与直/气复合控制导弹在末端带有碰撞角约束的制导问题转化为零和微分对策问题, 并对导引律进行仿真分析。

选择四种情形下的捕获区进行分析说明, 仿真参数为: $\kappa_1^M = 0.5, \kappa_2^M = 0.5, \kappa_T = 1, \mu_1 = 1.2, \theta_M^c = 0^\circ, \theta_T^c = 180^\circ$ 。

情形 1: 拦截弹采用直/气复合控制与纯气动力控制捕获区对比分析, 仿真结果如图 2 所示。

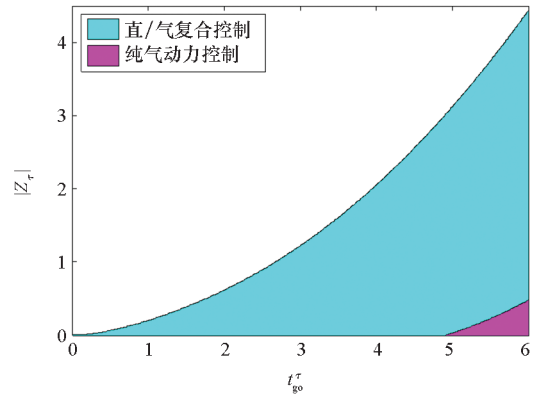


图 2 捕获区分析: 情形 1

Fig. 2 Analysis of capture zones: scenario 1

图 2 为拦截弹采用直/气复合控制与纯气动控制情形下在 $Z_r = 0$ 轴上方的捕获区范围, 全域内捕获区关于 $Z_r = 0$ 轴上下对称。仿真结果表明, 采用复合控制时的捕获区范围远大于采用纯气动力控制的, 这也说明直/气复合控制导弹在拦截末段具有更大的优势。

情形 2: 拦截弹在不同 d_1^M 值时捕获区对比分析, 仿真结果如图 3 所示。

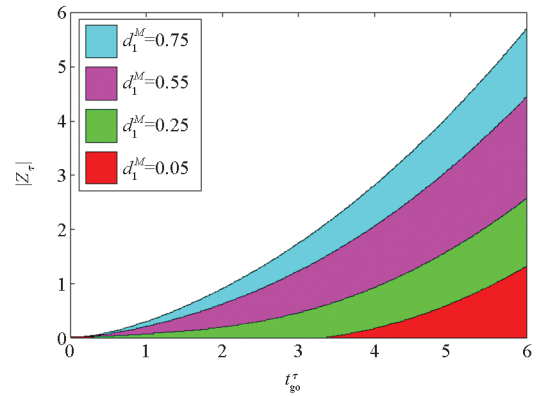


图 3 捕获区分析: 情形 2

Fig. 3 Analysis of capture zones: scenario 2

图 3 表明直接力作用装置安装在质心之前的情况下, d_1^M 值越大, 即导弹自动驾驶仪特性传函中直接力作用部分的影响越大, 捕获区范围也更大。

情形 3: 拦截弹的直接力作用装置安装于质心前后时的捕获区对比分析, 仿真结果如图 4 所示。

由图 4 可知, 当 $d_1^M < 0$ 时, 表明直接力作用装置安装于质心之后, 无论 d_1^M 取何值, 此情况下捕获区均小于直接力作用装置安装在质心之前的情形。

情形 4: 拦截弹与目标的最大机动能力比值 μ_1 对捕获区的影响分析, 仿真结果如图 5 所示。

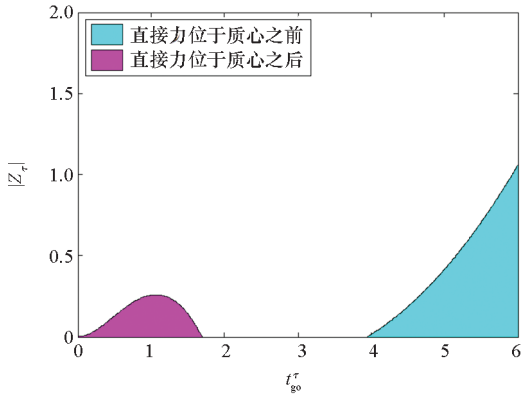


图4 捕获区分析:情形3

Fig. 4 Analysis of capture zones: scenario 3

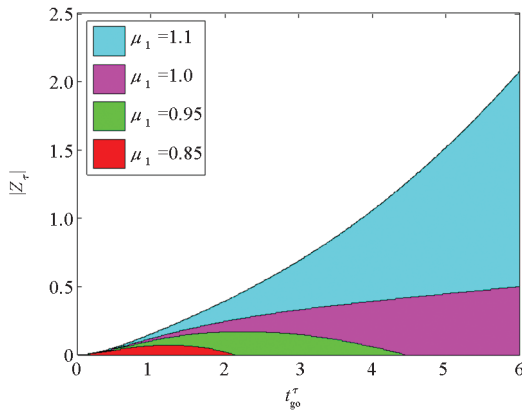


图5 捕获区分析:情形4

Fig. 5 Analysis of capture zones: scenario 4

图5表明,当 $\mu_1 < 1$ 之后,导弹对目标的捕获区迅速减小,表明拦截弹需要更大的机动能力以确保对目标具有足够大的捕获区。

针对本文提出的微分对策导引律,首先在不同碰撞角约束下进行仿真验证。为了进一步验证本文提出的微分对策导引律的性能,与文献[16]中的最优导引律(Optimal Guidance Law, OGL)、文献[17]中的自适应滑模导引律(Adaptive Sliding Mode Guidance Law, ASMGL)进行对比仿真,本文的记为微分对策导引律(Differential Game Guidance Law, DGGL)。从末制导时刻开始,机动目标的初始位置为(30 km, 15 km),目标速度为 $V_T = 1\ 500\ \text{m/s}$ 。拦截导弹的初始位置为(0 km, 12 km),速度为 $V_M = 900\ \text{m/s}$ 。仿真参数取值为 $c_0 = 10^5$, $c_1 = 10^8$, $c_2 = 5$, $\theta_M = 10^\circ$, $\theta_T = 180^\circ$ 。

五种碰撞角约束下的微分对策导引律仿真结果如图6~10所示。

由图6~10可知,本文提出的微分对策导引律在不同的碰撞角约束下均能实现预期拦截,

并且零控脱靶量及零控碰撞角误差均能收敛到零附近,同时导弹的指令加速度不超过 $6g$,这表明该导引律鲁棒性良好,脱靶量小,易于工程实现。

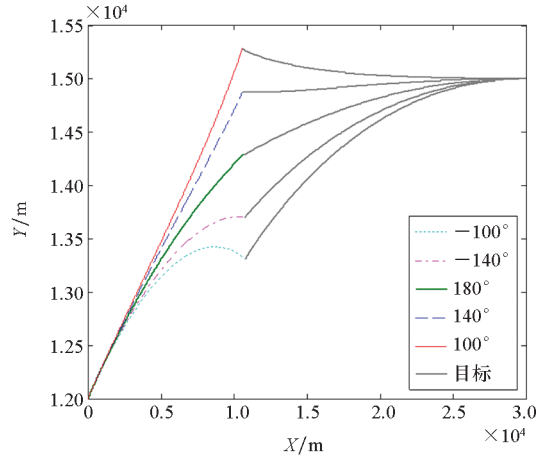


图6 不同碰撞角弹道

Fig. 6 Trajectories of different collision angles

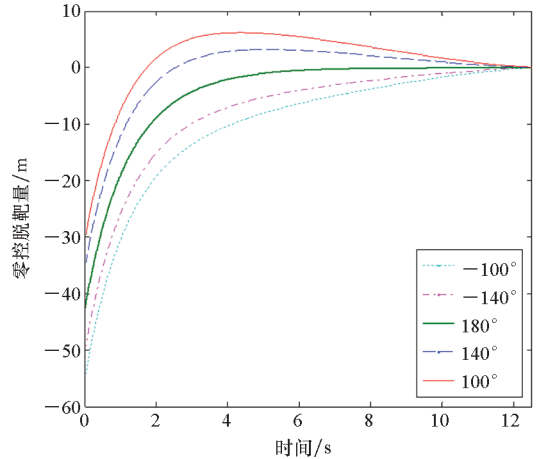


图7 不同碰撞角对应的零控脱靶量

Fig. 7 ZEM of different collision angles

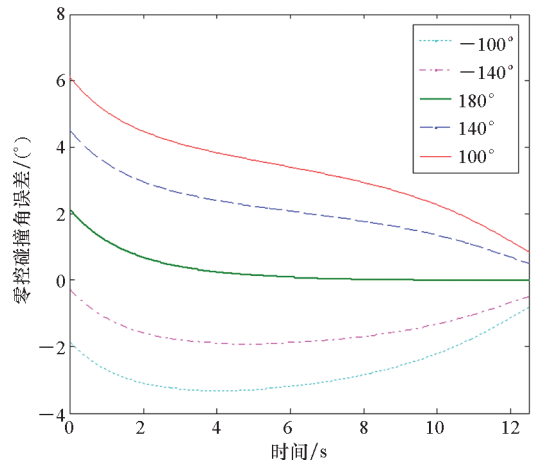


图8 不同碰撞角对应的零控碰撞角误差

Fig. 8 ZEA error of different collision angles

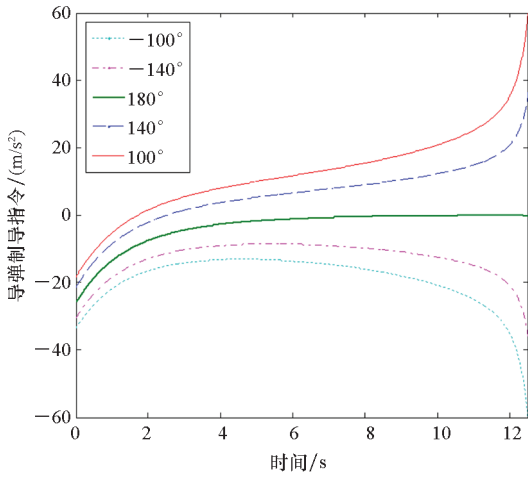


图 9 不同碰撞角对应的导弹制导指令
Fig. 9 Missile's guidance command of different collision angles

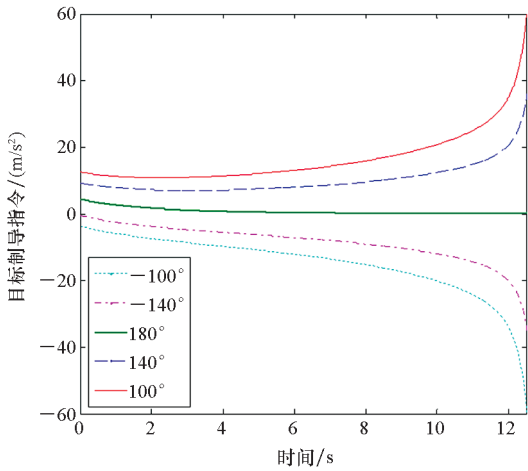


图 10 不同碰撞角对应的目标制导指令
Fig. 10 Target's guidance command of different collision angles

对三种导引律在弹目碰撞角约束为 140° 情况下进行对比仿真,目标执行正弦机动,机动加速度为 $a_t = 7.5g\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \text{ m/s}^2$ 。仿真结果如图 11 ~ 15 所示。

仿真结果表明,在三种导引律的拦截弹道中,自适应滑模导引律的弹道波动幅度最大,并且其 ZEM 也随目标机动呈现较大的上下波动,这是因为滑模导引律的制导目的是使视线角速率趋于零。由于最优导引律是在对目标机动形式精确预估的前提下,直接将导弹导引至预测拦截点,因此加速度指令在三种导引律中相对最小。微分对策导引律的优势在于对目标机动不敏感,因此视线角速率及零控脱靶量曲线最为平缓,并且随时间变化缓慢。

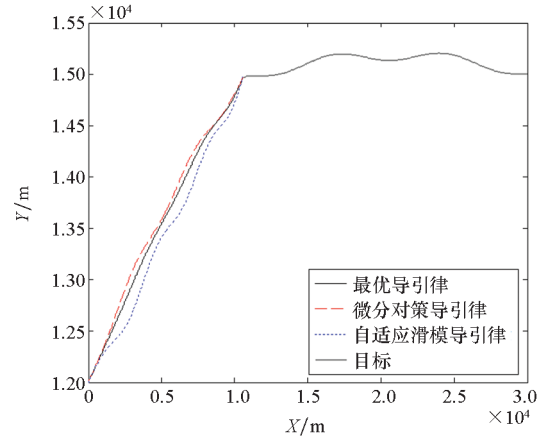


图 11 拦截弹道对比

Fig. 11 Comparison of interception trajectories

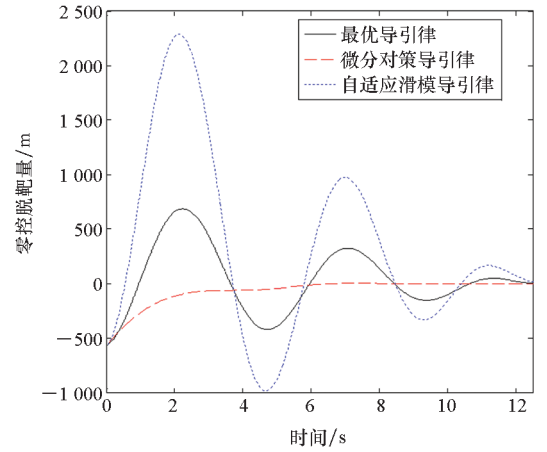


图 12 零控脱靶量对比

Fig. 12 Comparison of ZEM

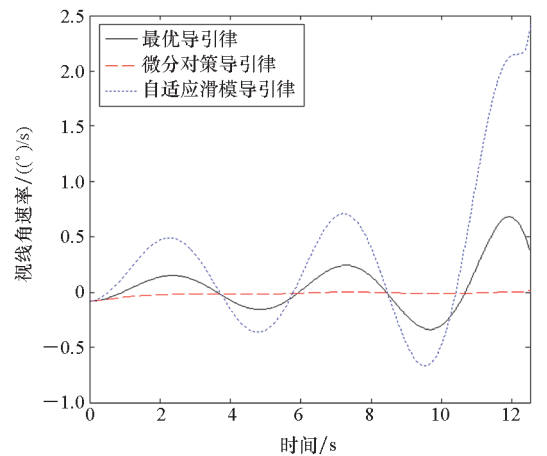


图 13 视线角速率对比

Fig. 13 Comparison of line of sight angular rate

为了更充分地对比三种导引律的性能,根据导弹初始弹道倾角不同,选取三种拦截情形进行对比分析。仿真初值如表 1 所示。

三种拦截情形下的脱靶量统计如表 2 所示。

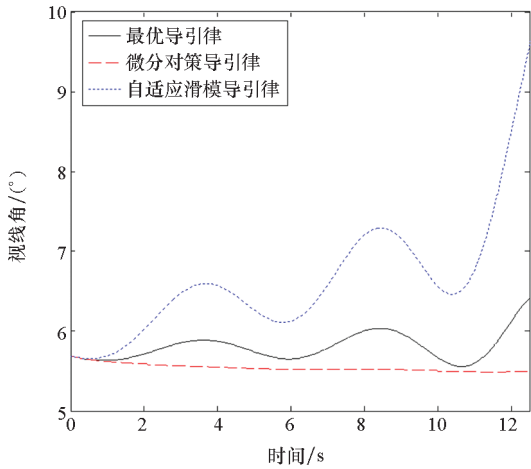


图 14 视线角对比

Fig. 14 Comparison of line of sight angle

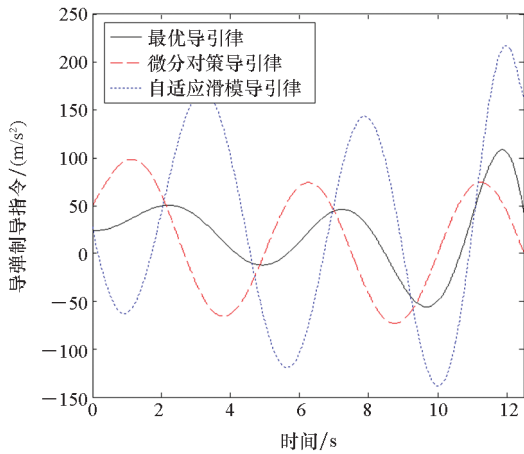


图 15 导弹制导指令对比

Fig. 15 Comparison of missile's guidance command

表 1 三种拦截情形初值

Tab. 1 Initial values of the intercept cases

拦截情形	$\theta_T / (^\circ)$	$\theta_M / (^\circ)$
情形 1	180	10
情形 2	180	15
情形 3	180	20

表 2 仿真结果

Tab. 2 Simulation results

拦截情形	导引律	拦截时间/s	脱靶量/m
情形 1	OGL	12.376	0.467
	DGL	12.362	0.056
	ASMGL	12.381	1.252
情形 2	OGL	12.380	0.212
	DGL	12.374	0.155
	ASMGL	12.388	0.555
情形 3	OGL	12.386	0.131
	DGL	12.379	0.095
	ASMGL	12.391	0.289

通过对三种导引律进行多次仿真对比,表明针对正弦机动目标拦截,微分对策导引律的拦截末端脱靶量最小,制导精度最高。因为其对目标机动不敏感,视线角速度在末端能够收敛到零,这表明其在高速机动目标拦截场景中具有优良的制导性能。

4 结论

本文研究了高速机动目标拦截场景中的末制导段,通过简化弹目运动模型,基于微分对策理论推导出一种直/气复合控制导弹拦截目标的解析形式捕获区表达式。此外,为了得到带碰撞角度约束下的弹目最优拦截策略解析解,通过选取适当的性能指标,求解出两人零和微分对策问题,分别得到复合控制导弹与目标的最优拦截策略。仿真分析了几种情形下的捕获区范围,验证了捕获区的存在条件,导引律仿真结果表明,本文所提出的微分对策导引律在高速机动目标拦截场景中有优良的制导性能,其具有较高的工程实用价值。

参考文献 (References)

- [1] KUMAR S R, RAO S, GHOSE D. Nonsingular terminal sliding mode guidance with impact angle constraints [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(4): 1114 - 1130.
- [2] SONG J H, SONG S M, ZHOU H B. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode guidance law with impact angle constraints[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2016, 14(1): 99 - 114.
- [3] HUANG J S, ZHANG H B, TANG G J, et al. Extended differential geometric guidance law for intercepting maneuvering targets[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2018, 29(5): 1046 - 1057.
- [4] LIVERMORE R, SHIMA T. Deviated pure-pursuit-based optimal guidance law for imposing intercept time and angle[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(8): 1807 - 1814.
- [5] BARDHAN R, GHOSE D. Nonlinear differential games-based impact-angle-constrained guidance law[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(3): 384 - 402.
- [6] SHAFERMAN V, SHIMA T. Cooperative differential games guidance laws for imposing a relative intercept angle [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(10): 2465 - 2480.
- [7] SUN J L, LIU C S, YE Q. Robust differential game guidance laws design for uncertain interceptor-target engagement via adaptive dynamic programming [J]. International Journal of Control, 2017, 90(5): 990 - 1004.
- [8] 陈燕妮, 刘春生, 孙景亮. 基于自适应最优控制的有限时间微分对策制导律[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 877 - 884.

CHEN Yanni, LIU Chunsheng, SUN Jingliang. Finite-time differential guidance law based on adaptive optimal

- control[J]. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(6): 877–884. (in Chinese)
- [9] 周颀, 雷虎民, 侯峰, 等. 拦截高速目标的比例与反比例导引捕获区分析[J]. *宇航学报*, 2018, 39(9): 1003–1012.
ZHOU Jin, LEI Humin, HOU Feng, et al. Capture region analysis of proportional navigation and retro-proportional navigation guidance for hypersonic target interception[J]. *Journal of Astronautics*, 2018, 39(9): 1003–1012. (in Chinese)
- [10] 王婷, 周军. 三维理想比例导引律的捕获区域分析[J]. *西北工业大学学报*, 2007, 25(1): 83–86.
WANG Ting, ZHOU Jun. Is capture region of 3D ideal proportional navigation (IPN) also the biggest? [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2007, 25(1): 83–86. (in Chinese)
- [11] BRYSON A E, HO Y C. *Applied optimal control: optimization, estimation, and control* [M]. Waltham: Blaisdell Press, 1969: 230–290.
- [12] HAYOUN S Y, SHIMA T. Necessary conditions for “hit-to-kill” in missile interception engagements [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 41(4): 916–928.
- [13] SHIMA T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, 126(3): 503–528.
- [14] SHIMA T, GOLAN O M. Bounded differential games guidance law for dual-controlled missiles [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(4): 719–724.
- [15] 花文华, 刘杨, 陈兴林, 等. 具有终端约束的线性二次型微分对策制导律[J]. *兵工学报*, 2011, 32(12): 1448–1455.
HUA Wenhua, LIU Yang, CHEN Xinglin, et al. Linear quadratic differential game guidance law with terminal constraints[J]. *Acta Armamentarii*, 2011, 32(12): 1448–1455. (in Chinese)
- [16] RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(4): 724–732.
- [17] 周荻, 慕春棣, 徐文立. 空间拦截智能自适应变结构导引规律研究[J]. *宇航学报*, 1999, 20(4): 60–65.
ZHOU Di, MU Chundi, XU Wenli. Intelligent adaptive variable structure guidance for space interception[J]. *Journal of Astronautics*, 1999, 20(4): 60–65. (in Chinese)