

高空气球外形计算及通用算法设计*

周江华¹, 金伟城^{1,2}, 李智斌³

(1. 中国科学院空天信息创新研究院, 北京 100094; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要:高空气球为临近空间中的研究提供了可靠的低成本平台。目前高空气球球形一般直接采用“自然形”或以“自然形”为基础,但通用、简捷地求解“自然形”外形方程一直是个难点。将“自然形”气球外形求解问题转化为最优控制问题,利用最优控制领域成熟的求解工具——高斯伪谱法最优化软件包计算气球外形。此外,通过分析外形数据得到外形变化规律,设计通用算法求解任意球形控制因子、任意高度的“自然形”气球外形。结果显示,该算法无须调参便可计算所需的“自然形”球形,便于科研人员快速获得大量所需球形数据。

关键词:高空气球;“自然形”气球;球形设计;高斯伪谱法

中图分类号:V221+.92 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2021)04-017-07



听语音
与作者互动
聊科研

High-altitude balloon shape calculation and general algorithm design

ZHOU Jianghua¹, JIN Weicheng^{1,2}, LI Zhibin³

(1. Aerospace Information Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: High-altitude balloon provides a reliable low-cost platform for high altitude scientific experiments. The shape of the balloon is directly adopted as natural-shape or based on natural-shape; however, how to simply and quickly solve the natural-shape equation general-purpose is a difficult problem. The mature solution tool in the field of optimal control—gauss pseudospectral optimization software was used to solve the natural-shape balloon equation which is transformed into the optimal control description. Furthermore, a general algorithm was designed to solve the natural-shape balloon shape with any spherical control factor and any height by analyzing the shape data. Results show that this algorithm can calculate the required natural-shape without adjusting parameters, which is convenient for researchers to quickly obtain a large amount of required spherical data.

Keywords: high-altitude balloon; natural-shape balloon; balloon shape design; Gaussian pseudospectral method

高空气球利用充入密度小于空气的气体所产生的浮力飞行,是目前可在临近空间工作的几种飞行器之一,具有价格低、工作周期短、吊舱易回收、飞行时间可以根据需要灵活控制等优点,为在高层大气中进行研究提供了可靠的低成本平台。就其结构形式来说,高空气球又分为底部排气管与大气连通的零压式气球以及全封闭的超压式气球^[1]。

高空气球的外形设计以及升空过程中外形的变化是浮空器设计以及浮空器飞行动力学研究的基础。气球外形的第一个理论性成果是 Upson 假设仅存在纵向张力的情况下提出的“自然形”气球^[2]。由于其以 Σ 作为球形控制因子,因此也称为 Σ -shape。现今的球形设计大多直接采用“自

然形”或以“自然形”为基础:Yajima 在文献[3]中指出“自然形”气球的极限形式为欧拉体,而欧拉体作为一种无加强筋的超压球是各种超压球的设计基础^[4-5]。

虽然“自然形”气球外形方程具有简单的形式,但无法获得解析解。现一般采用打靶法进行数值求解。对完全膨胀的设计球形求解:Smalley 利用打靶法以 Σ 表的形式给出了 Σ 在 0~1 之间的部分球形数据^[6];姜鲁华采用 Gill 法并以计算机程序的方式给出 0~1 之间任意 Σ 值的气球外形^[7]。对于 $\Sigma \geq 1$ 时的气球外形,并未见到有相关文献给出参考数据,且 2.2 节结果显示, Σ 从 1.5 变化到 2.0,其初始角度只改变了 1°左右,可

* 收稿日期:2019-12-13

基金项目:国家自然科学基金重点资助项目(61733017)

作者简介:周江华(1973—),男,江西鹰潭人,研究员,博士,硕士生导师,E-mail:zhoufma@aoe.ac.cn

见此初值的敏感度较高,打靶法求解困难。

上升段球形分析对升空过程中的动力学分析以及工程应用有重要的参考价值。Farley 认为升空段氦气泡为水滴形,顶部比较平坦,将其用圆球阻力系数近似并不合适,因此 Farley 用圆锥体近似升空段球形并给出参考阻力系数 ($C_d \approx 0.8$)^[8]。若能通过求解升空球形,获得不同高度下气泡最大横截面积更准确的估计,便可更为精准地估算升空时的气动阻力。上升段球形分析另一个重要的应用是估计升空段球顶压差。高空气球利用球顶排气阀来调节升空段的浮力,而浮力排出率与球顶压差相关,零压气球通常不安装压差传感器,需要依赖事前估计。通过求解升空球形得到的球顶压差比采用圆球近似更为准确^[9]。

然而高空气球为由极薄聚乙烯(PolyEthylene, PE)膜材料构成的软式充气结构,随着升空高度的变化,气球体积不断膨胀,导致其外形轮廓的变化非常之大。相较于平飞段(满充)外形,升空段球体大部分情况下底部呈聚束状,初始角度几乎为零且需一同猜测初始角度及零压面高度两个参数。Smalley^[10]将底部聚束视为负载,用打靶法求解外形,但计算不同高度的球形都需调整模型。Baginski 等^[11]采取解方程的思路:基于 MATLAB 的 fsolve 函数,利用多重打靶法求得底部张角及零压面高度,再借助龙格库塔法获得气球外形,但气球高度越低,分段数越多,计算量越大。杨燕初等^[12]基于 MATLAB 的 fmincon 函数,结合多重打靶法求解外形,计算时长依赖于初值的选取。

试验飞行需要充足的高空气球升空过程中的形体数据,原有的计算方法需花费大量的时间和精力,因而需要一种简单快速的计算方法来求解“自然形”气球外形方程。

高斯伪谱法因其具有收敛性好以及初值敏感度低的优点,已经成为一种较为常用的解决最优控制问题的算法,而基于高斯伪谱法的高斯伪谱法最优化软件包(Gauss Pseudospectral Optimization Software, GPOPS-II)也成为解决最优控制问题的有力工具之一。在此基础之上,本文提出将“自然形”外形方程转化为最优控制描述形式;然后用 GPOPS-II 工具求解的思路,以期精确、简捷得到气球完全膨胀以及升空状态下的外形数据;同时设计通用算法,以实现无须调参便可求解任意 Σ 、任意高度下的“自然形”球形的目标。

1 “自然形”气球外形方程

“自然形”气球也称为 Σ 外形气球。可由如

下六个常微分方程表示^[6,13]:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\bar{s}} = -\frac{\tau_b(\bar{z} + \bar{a})\bar{r} + \Lambda\bar{r}_d\sin\theta}{\bar{Q}} \\ \frac{d\bar{Q}}{d\bar{s}} = \Lambda\bar{r}_d\cos\theta \\ \frac{d\bar{r}}{d\bar{s}} = \sin\theta \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} = \cos\theta \\ \frac{d\bar{S}_a}{d\bar{s}} = 2\pi\bar{r} \\ \frac{d\bar{V}}{d\bar{s}} = \pi\bar{r}^2\cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

式中: θ 为母线上任意点的切线与纵轴的夹角,从纵轴到切线,顺时针为正(见图 1); \bar{s} 为无量纲球膜弧长; \bar{Q} 为无量纲球膜纵向总张力; τ_b 为升限高度与当前高度气球体积比; \bar{z} 为母线上任意点的高度; \bar{a} 为球底相对零压面的高度; \bar{r} 为当前高度气球无量纲半径; \bar{r}_d 为升限高度无量纲半径; \bar{S}_a 为气球表面积; \bar{V} 为气球体积; $\Lambda = \Sigma/(2\pi)^{\frac{1}{3}}$ 。 Σ 为无量纲面密度,也称为球形因子,由飞行任务参数:负载重力 L 、球体完全膨胀体积 V_d 、球体与负载重力之和 G 以及球膜材料面密度 ω_d 决定,则:

$$\Sigma = (2\pi/L)^{\frac{1}{3}}(V_d/G)^{\frac{2}{3}}\omega_d/g \quad (2)$$

$\tau_b = 1$ (此时 $\bar{a} = 0, \bar{r} = \bar{r}_d$) 为满充时的外形,即设计球形。 $\tau_b > 1$ 为设计球形在升空高度的外形,由于方程中含有 \bar{r}_d ,求解升空段外形,需先计算出设计球形。

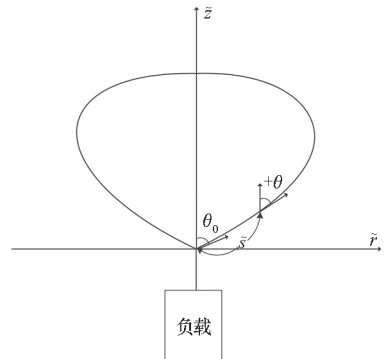


图 1 Σ 外形气球示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Σ -shape balloon

对于 Σ 气球,设计球形及升空段球形的计算,本质上是求解一个两点边值问题:

当 $\bar{s} = 0$ 时, $\bar{r} = \bar{z} = \bar{S}_a = \bar{V} = 0, \theta = \theta_0, \bar{Q} = 1/(2\pi\cos\theta_0)$; 当 $\bar{s} = \bar{l}_s$ 时, $\theta = -\pi/2, \bar{r} = 0$ 。

其中, \bar{l}_s 为母线总长度, θ_0 和 \bar{a} 未知,由上述边界条件唯一确定。

2 数值求解

GPOPS - II 是用于解决非线性最优控制问题的通用 MATLAB 软件包。该软件包利用可变阶的高斯伪谱法,将最优控制问题离散并转换为非线性规划问题,通过非线性规划问题求解器对非线性规划问题进行求解^[14-15]。

由于最优控制问题本身就是一个两点边值问题,因此,GPOPS - II 可用于气球外形的计算。但需对气球模型方程组做适当的处理,将其转换为最优控制问题。

2.1 GPOPS - II 求解工具介绍

GPOPS - II 基于高斯伪谱法,其求解最优控制问题的思路是将连续的最优控制问题离散化为非线性规划问题,然后通过 Karush-Kuhn-Tucker 条件求解^[16-17]。Benson 证明了高斯伪谱法满足协调映射定理,即利用高斯伪谱法离散最优控制问题后得到的非线性规划问题的 Karush-Kuhn-Tucker 条件与最优一阶必要条件的离散形式完全等价^[18],这使得高斯伪谱法同时具备了直接法的快速性与间接法的精确性。

在 GPOPS - II 中,需要设定变量的初值、终值以及变量范围三组参数。得益于高斯伪谱法对初值、终值敏感度低的优点,初值、终值只需猜测一次便可,在求解不同球形时无须调整,因而对于不同的球形,只需猜测变量范围即可。相较于多重打靶法每次计算需猜测数十个参数^[11-12],此方法可将其减少至五个左右;同时一组参数可以计算一段 Σ (或高度) 区间的外形,与打靶法相比具有通用性。

2.2 设计球形的求解

2.2.1 微分方程组的处理

最优控制中各状态变量均为时间的函数,且有代价函数以及控制量。因而对式(1)做如下处理:将弧长 \bar{s} 视为时间,且代价函数为最小化“终止时间” \bar{s}_f ,即:

$$J = \int_0^{\bar{s}_f} d\bar{s} \quad (3)$$

将 Λ 视为控制量;对无量纲总张力进行处理,使其初值条件脱离对 θ_0 的依赖,即令 $\tilde{M} = \tilde{Q} \cdot \cos\theta$,这样当 $\bar{s} = 0$ 时, $\tilde{M} = 1/(2\pi)$;由于此时气球处于完全膨胀状态,因此 $\tilde{r}_d = \tilde{r}$;式(1)中的表面积以及体积可以独立计算,故为了减少计算量在这里暂不计算这两项,可以在之后用梯形积分公式得到。整理上述处理之后,气球模型如下:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\bar{s}} = -\frac{\tau_b(\tilde{z} + \tilde{a})\tilde{r} + \Lambda\tilde{r}\sin\theta}{\tilde{M}}\cos\theta \\ \frac{d\tilde{M}}{d\bar{s}} = \Lambda\tilde{r} + \sin\theta \cdot (\tilde{z} + \tilde{a}) \cdot \tilde{r} \\ \frac{d\tilde{r}}{d\bar{s}} = \sin\theta \\ \frac{d\tilde{z}}{d\bar{s}} = \cos\theta \end{cases} \quad (4)$$

其中: Λ 视为控制量,代价函数为最小化“终止时间” \bar{s}_f ,零压面高度 $\tilde{a} = 0$, $\tau_b = 1$ 。初值条件为:当 $\bar{s} = 0$ 时, $\tilde{r} = \tilde{z} = 0$, $\theta = \theta_0$, $\tilde{M} = 1/(2\pi)$;终值条件为:当 $\bar{s} = \bar{s}_f$ 时, $\theta = -\pi/2$, $\tilde{r} = \tilde{M} = 0$ 。

2.2.2 设计球形数值解

从式(4)可以看出,对于完全膨胀状态球形方程,只有一个自由度 θ_0 且其受终值条件约束,因此只要找到满足终值条件的 θ_0 ,就能得到该方程组的唯一解。此时,在 GPOPS - II 中不同球形需要调整的参数虽然需要 \tilde{M} 、 \tilde{r} 、 \tilde{z} 的最大值以及 l_s 四个参数,但实际计算发现这些参数对 Σ 的变化敏感度较低。相较于原有的计算方法,虽然增加了三个参数,但避免了在大 Σ 情况下, θ_0 变化不明显且难以猜测的缺点。

文献[6]用打靶法给出了部分参考结果,以其计算结果作为初值并用四阶龙格库塔法验算,发现终值符合要求。表1给出了本文与文献[6]计算结果比较,可以看出,两者的计算结果基本一致,说明了本文计算方法的有效性。同时表2补充了 $\Sigma \geq 1$ 时的部分参考数据,从表中的数据也可发现: Σ 从 1.5 变化到 2.0,其初始角度只改变

表1 高斯伪谱法计算结果与 Smalley 计算结果对比

Tab.1 Comparison of calculation result of Gaussian pseudospectral method and Smalley's

Σ	本文 $\theta_0/$ (°)	Smalley $\theta_0/$ (°)	本文 l_s	Smalley l_s
0	50.149	50.149	1.994	1.994
0.1	54.392	54.391	2.155	2.155
0.2	58.886	58.885	2.350	2.350
0.3	63.469	63.468	2.588	2.588
0.4	67.920	67.918	2.870	2.870
0.5	72.012	72.012	3.198	3.198
0.6	75.579	75.578	3.567	3.567
0.7	78.548	78.548	3.971	3.971
0.8	80.937	80.937	4.401	4.401
0.9	82.816	82.816	4.852	4.852
1.0	84.276	84.277	5.317	5.318

表 2 部分 $\Sigma \geq 1$ 的计算结果Tab. 2 Partial calculation result for $\Sigma \geq 1$

Σ	$\theta_0 / (^\circ)$	l_s
1.10	85.407	5.793
1.20	86.282	6.278
1.30	86.963	6.768
1.40	87.497	7.262
1.50	87.918	7.760
1.60	88.254	8.260
1.70	88.523	8.761
1.80	88.742	9.265
1.90	88.920	9.769
2.00	89.067	10.275

了 1° 左右, 此时方程组对初值异常敏感, 此时若用打靶法来求解则较为困难。为验证 Yajima 在文献[3]中“可以用 $\Sigma = 2.0$ 的‘自然形’外形近似做欧拉体外形”的结论, 绘制了大 Σ 外形与欧拉体外形的归一化外形 (r, z 均除以总弧长 \tilde{l}_s) 对比图, 如图 2 所示。可以看到, 虽然 Σ 增加, 但气球外形总体变化不大, 且 $\Sigma = 2.0$ 的外形与欧拉体外形已极为接近, 故可将 $\Sigma = 2.0$ 的“自然形”外形近似做欧拉体外形。

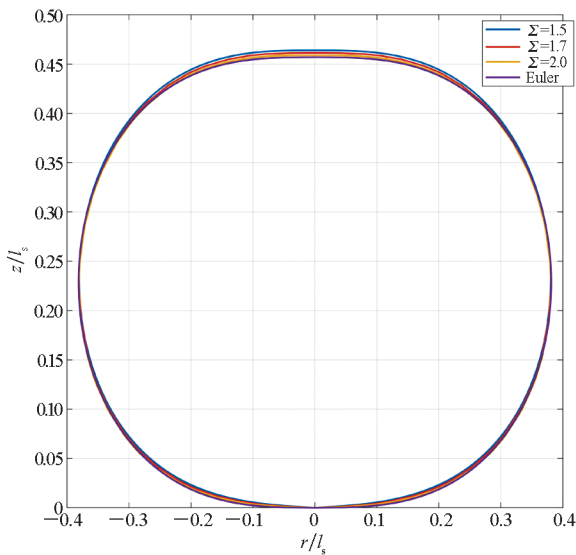
图 2 大 Σ 外形与欧拉体外形的对比图

Fig. 2 Comparison of the shape of large sigma and Euler's elastica

2.3 升空状态球形求解

2.3.1 升空微分方程组处理

不同于式(4)中 $\tau_b \equiv 1$, 在升空状态下, τ_b 与气球飞行高度存在函数关系, 且 Baginski 在文献[11]中指出, 当 $\tau_b \geq 10$ 时, θ 几乎等于零, 此时

方程组对初值异常敏感, 很难直接满足终值条件。因此本文借鉴多重打靶法的思路, 将弧长 \tilde{s} 分为两段: $\tilde{s} \in [0, \tilde{l}_s/k]$ 以及 $\tilde{s} \in [\tilde{l}_s/k, \tilde{l}_s]$, 其中 $k \geq 1$ 。对方程组做如下处理。

对无量纲总张力做与 2.2.1 节一样的处理, 摆脱初值对 θ_0 的依赖; 同样取消式(1)中表面积以及体积的计算; 不同于式(4)中 $\tilde{a} = 0$, 在升空状态下, \tilde{a} 为一个大于零的未知常数, 因此将 \tilde{a} 作为变量, 添加到方程之中; 为保证连续性, 第一段的终值等于第二段的初值。整理后, 得到如下气球模型:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tilde{s}} = -\frac{\tau_b(\tilde{z} + \tilde{a})\tilde{r} + \Lambda\tilde{r}_d \sin\theta}{\cos\theta} \\ \frac{d\tilde{M}}{d\tilde{s}} = \Lambda\tilde{r}_d + \tau_b \cdot \sin\theta \cdot (\tilde{z} + \tilde{a}) \cdot \tilde{r} \\ \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{s}} = \sin\theta \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{s}} = \cos\theta \\ \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{s}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中, Λ 视为控制量, 代价函数为 $J = \tilde{a}$ 。初值条件为: 当 $\tilde{s} = 0$ 时, $\tilde{r} = \tilde{z} = 0, \theta = \theta_0, \tilde{M} = 1/(2\pi)$; 终值条件为: 当 $\tilde{s} = \tilde{s}_f$ 时, $\theta = -\pi/2, \tilde{r} = \tilde{M} = 0$; 同时为保证连续性, 满足

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \tilde{M} \\ \tilde{r} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}_{\left(\frac{\tilde{l}_s}{k}\right)^-} = \begin{bmatrix} \theta \\ \tilde{M} \\ \tilde{r} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}_{\left(\frac{\tilde{l}_s}{k}\right)^+} \quad (6)$$

对于 \tilde{r}_d 的处理, 一种思路是将式(4)、式(5)联立, 这样 \tilde{r}_d 就可以被精确地表示, 但这样方程组过于庞大, 计算量会增加。因此, 本文利用 MATLAB 自带的插值函数 interp1, 将计算平飞状态得到的 \tilde{r}_d 与 \tilde{s} 的值做插值拟合得到 \tilde{r}_d 关于 \tilde{s} 的函数 $\tilde{r}_d(\tilde{s})$, 这样既能准确表示 \tilde{r}_d 又不会增加计算量。

2.3.2 升空状态球形数值解

与完全膨胀球形方程不同, 升空状态的气球外形数学模型除 θ_0 外, 还有自由度 \tilde{a} , 而由于此时有总弧长不变的约束, 正好抵消了自由度 \tilde{a} 。故只要找到满足终值条件的 θ_0 与 \tilde{a} , 就能得到该方程组的唯一解。此时, 在 GPOPS-II 中不同球形需要调整的参数只有 $\tilde{M}, \tilde{r}, \tilde{z}$ 的最大值、 \tilde{a} 的最小值以及 k (记这五个参数为一组升空状态计算参数), 相较于前人需猜测数十组参数的多重打靶法简便不少; 参数数目固定, 便于通用算法的设计。

由于当 $\tau_b \geq 10$ 之后, θ_0 基本等于零, 此时无法用四阶龙格库塔法验证, 文献[10-11]分别采

用打靶法、多重打靶法,得到的计算结果基本一致,因此从侧面证实了计算结果的可靠性。表3给出了本文与 Baginski 计算结果^[11]的比较,可以看出,两者的计算结果基本一致,说明了本文计算方法的有效性。表4给出了 $\Sigma=2.0$ 时,气球升空过程参考计算结果。图3给出了 $\Sigma=2$ 时的“自然形”气球从地面(海拔为零)到升限高度(海拔为20 km)的归一化升空外形曲线。从表4以及图3可以得到球形随高度变化规律:随着气球升高,零压面高度减小,气球高度减小,最大半径增加,在16~20 km处球形变化剧烈。

表3 $\Sigma=0.4$ 的计算结果

Tab.3 Calculation result for $\Sigma=0.4$

τ_b	本文 $\theta_0/(\circ)$	本文 \bar{a}	k 值	Baginski $\theta_0/(\circ)$	Baginski \bar{a}
1.0	67.920	-0.000		67.906	-0.000
1.1	50.937	-0.470	5	50.916	-0.470
1.2	40.616	-0.650	5	40.600	-0.650
1.3	33.231	-0.763	5	33.214	-0.764
1.4	27.613	-0.846	5	27.602	-0.847
1.5	23.191	-0.912	5	23.182	-0.912
2.5	5.276	-1.253	4	5.270	-1.254
6.0	0.098	-1.654	4	0.098	-1.654
15	0.000	-1.965	4	0.000	-1.965
40	0.000	-2.213	4	0.000	-2.213
100	0.000	-2.384	3	0.000	-2.384
200	0.000	-2.484	2	0.000	-2.484
300	0.000	-2.532	2	0.000	-2.532
400	0.000	-2.563	2	0.000	-2.563
500	0.000	-2.585	2	0.000	-2.585

表4 $\Sigma=2.0$ 时,气球升空过程参考计算结果

Tab.4 Reference calculation results during balloon ascent for $\Sigma=2.0$

高度/km	$\theta_0/(\circ)$	\bar{r} 最大值	\bar{z}	\bar{a}
0	0.000	1.418	8.987	-6.925
2	0.000	1.517	8.891	-6.708
4	0.000	1.630	8.780	-6.467
6	0.000	1.758	8.651	-6.197
8	0.000	1.906	8.499	-5.893
10	0.000	2.077	8.315	-5.545
12	0.003	2.305	8.058	-5.098
14	0.065	2.596	7.702	-4.536
16	0.826	2.941	7.226	-3.877
18	7.297	3.361	6.515	-3.034
20	89.067	3.915	4.717	0.000

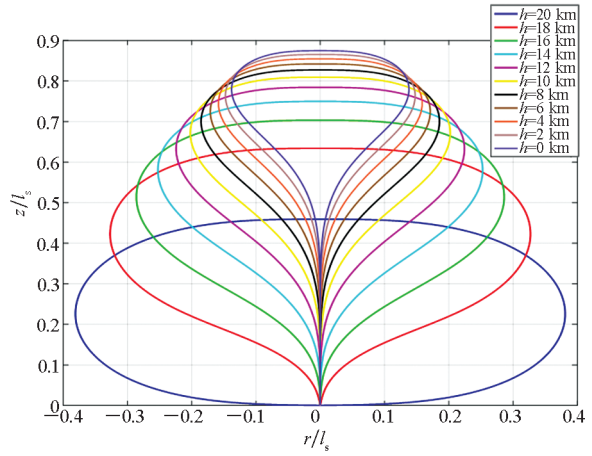


图3 $\Sigma=2.0$ 时,部分高度球形曲线

Fig.3 Balloon profile for partial height values while $\Sigma=2.0$

3 通用算法设计

从2.2.2节的计算分析可知,对于完全膨胀状态的“自然形”气球只需计算 $\Sigma \in [0, 2.0]$ 即可,经过测试,取表5的参数(\bar{r} 最大值恒为20)便能计算任意 Σ 的球形。

表5 平飞状态参数取值

Tab.5 Parameter value of design balloon

Σ	\bar{M} 最大值	\bar{z} 最大值	l_s 最大值
0~0.69	1 000	2	5
0.69~0.93	100	3	5
0.93~1.1	100	3	6
1.1~1.2	100	3	7
1.2~2.0	100	6	11

在计算升空状态的外形时发现, \bar{r} 最大值以及 \bar{M} 最大值对外形变化敏感度低,可以令 \bar{r} 最大值恒为平飞状态的无量纲最大半径, \bar{M} 最大值按经验设定(当 $\Sigma < 1.5$ 时, $\bar{M} = 10$;当 $\Sigma \geq 1.5$ 时, $\bar{M} = 100$)。结合2.3.2节中球形随高度的变化规律,对于其余升空状态计算参数,采用迭代更新的方式获取,即若已知气球在某一飞行高度的球形数据,则利用此球形数据得到飞行高度在此高度之上的球形计算所需的升空状态计算参数,具体如下: \bar{z} 的最大值等于球体高度, \bar{a} 的最小值等于零压面高度的负值, k 为母线总长度与 $\theta = 10^{-3}$ 对应的弧长的比值,设计如算法1所示。

算法 1 球形计算通用算法

Alg. 1 General algorithm of shape calculation

已知:在 $\tau_b = m_0$ 时, 21 组不同 Σ 的升空状态计算参数, 其中 $\Sigma \in [0, 2]$; 各 Σ 气球的平飞状态球形; 所要计算的球形控制因子 Σ_0 以及高度转换后的体积比 τ_{b_0}

1. 对各升空状态计算参数做插值
2. 计算 Σ_0 时, $\tau_b = m_0$ 的球形, 记 $sp_1, n = 1$
3. 设定节点 $m = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ 及 \bar{r}, \bar{M} 的最大值
4. if $\tau_{b_0} < m_n$ then
5. 获取 sp_n 的 \bar{z} 最大值, \bar{a} 及 $\theta = 10^{-3}$ 对应的弧长 l_n
6. 令 $k = l_n / l_n$, 将 \bar{z} 最大值, \bar{a} 最小值, k 更新
7. 计算 $\tau_b = m_n$ 时的球形, $n = n + 1$, return 4
8. end if
9. if $\tau_{b_0} \neq m_n$ then
10. 重复步骤 5 ~ 6, 计算 $\tau_b = \tau_{b_0}$ 的球形
11. else $\tau_b = m_n$ 即为所需球形
12. end if
13. 计算结束

其中, 算法 1 中 21 组升空状态计算参数见表 6, $m_0 = 500$ 。

表 6 升空状态计算参数取值

Tab. 6 Calculating parameters value of lift-off state

Σ	\bar{r} 最大值	\bar{z} 最大值	\bar{a} 最小值	k
0	0.20	2.00	-1.85	2
0.1	0.20	2.20	-2.00	2
0.2	0.20	2.40	-2.20	2
0.3	0.20	2.60	-2.40	2
0.4	0.20	2.80	-2.70	2
0.5	0.20	3.20	-3.00	2
0.6	0.20	3.50	-3.30	4
0.7	0.20	3.95	-3.70	4
0.8	0.20	4.30	-4.10	4
0.9	0.30	4.80	-4.40	4
1.0	0.30	5.20	-4.90	5
1.1	0.30	5.65	-5.30	5
1.2	0.30	6.15	-5.70	5
1.3	0.30	6.60	-6.10	5
1.4	0.35	7.25	-6.75	5
1.5	0.35	7.65	-7.20	5
1.6	0.35	8.10	-7.50	5
1.7	0.47	8.50	-7.90	5
1.8	0.47	9.10	-8.40	5
1.9	0.47	9.60	-9.00	5
2.0	0.47	10.00	-9.40	5

根据测试, 算法 1 对常用 Σ 以及任意整数 τ_b 均能完成计算, 且平均用时 20 s 左右, 而用文献[12]的方法至少需 4 min(相同计算机), 且计算时长对初值的选取更敏感。本算法在计算代价上已大大减小, 且无须猜测参数, 便于快速获得大量所需球形数据。

4 结论

本文对“自然形”气球外形方程求解进行了系统性分析, 将原问题进行无量纲化处理后转换为最优控制形式, 借助 GPOPS - II 工具, 对转化得到的最优控制问题进行求解。计算结果与文献数据对比表明了所提方法的有效性。随后分析球形数据, 设计了通用算法。该算法虽需通过迭代计算球形, 增加了计算时间, 但取消了调参过程, 且相较于多重打靶法, 计算代价已大大减小, 便于工程应用。

参考文献(References)

- [1] 田莉莉, 方贤德. NASA 高空气球的研究及其进展[J]. 航天返回与遥感, 2012, 33(1): 81 - 87.
TIAN Lili, FANG Xiande. Research and progress of NASA's balloon[J]. Spacecraft Recovery & Remote Sensing, 2012, 33(1): 81 - 87. (in Chinese)
- [2] UPSON R H. Stresses in a partially inflated free balloon-with notes on optimum design and performance for stratosphere exploration[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1939, 6(4): 153 - 156.
- [3] YAJIMA N, IZUTSU N, IMAMURA T, et al. Scientific ballooning[M]. New York: Springer, 2008: 19 - 32.
- [4] SMITH M S, RAINWATER E L. Optimum designs for superpressure balloons[J]. Advances in Space Research, 2004, 33(10): 1688 - 1693.
- [5] Batchelor G K. The scientific papers of sir geoffrey ingram Taylor[M]. London: American Institute of Physics, 1963: 21 - 22.
- [6] SMALLEY J H. Determination of the shape of a free balloon: scientific report No. 2: AFCRL - 64 - 734[R]. Massachusetts: Air Force Cambridge Research Laboratories, 1963.
- [7] 姜鲁华. 大型高空气球的球形设计及形变与变工况研究[D]. 北京: 中国科学院高能物理研究所, 1991: 22 - 30.
JIANG Luhua. Shape design and deformation with variable operation condition research of large high-altitude balloon[D]. Beijing: The Institute of High Energy Physics of the Chinese Academy of Sciences, 1991: 22 - 30. (in Chinese)
- [8] FARLEY R. BalloonAscent: 3 - D simulation tool for the ascent and float of high-altitude balloons[C]//Proceedings of AIAA 16th Lighter-Than-Air and Balloon Systems Conference, 2005.

- [9] CARLSON L A, HORN W J. New thermal and trajectory model for high-altitude balloons [J]. *Journal of Aircraft*, 1983, 20(6): 500 – 507.
- [10] SMALLEY J H. Balloon shapes and stresses below the design altitude [R]. Colorado: National Center for Atmospheric Research, 1966.
- [11] BAGINSKI F, WILLIAMS T, COLLIER W. A parallel shooting method for determining the natural shape of a large scientific balloon [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1998, 58(3): 961 – 974.
- [12] 杨燕初, 张航悦, 赵荣. 零压式高空气球球形设计与参数敏感性分析[J]. *国防科技大学学报*, 2019, 41(1): 58 – 64.
YANG Yanchu, ZHANG Hangyue, ZHAO Rong. Shape design of zero pressure high altitude balloon and sensitivity analysis of key parameters[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2019, 41(1): 58 – 64. (in Chinese)
- [13] MORRIS A L. Scientific ballooning handbook [M]. Colorado: National Center for Atmospheric Research, 1975: V4 – V8.
- [14] RAO A V, BENSON D A, DARBY C, et al. Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2010, 37(2): 22 – 39.
- [15] DARBY C L, HAGER W W, RAO A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, 32(4): 476 – 502.
- [16] 王璐. 伪谱法在最优控制问题中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014: 1 – 3.
WANG Lu. Application of pseudo-spectral method for the optimal control[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014: 1 – 3. (in Chinese)
- [17] 彭祺攀, 李海阳, 沈红新, 等. 基于 Gauss 伪谱法和直接打靶法结合的月球定点着陆轨道优化[J]. *国防科技大学学报*, 2012, 34(2): 119 – 124.
PENG Qibo, LI Haiyang, SHEN Hongxin, et al. Lunar exact-landing trajectory optimization via the method combining GPM with direct shooting method [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2012, 34(2): 119 – 124. (in Chinese)
- [18] BENSON D A. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Cambridge: MIT, 2005: 117 – 124.