

基于时间反转声学理论的超声相控阵超分辨率成像方法*

樊程广, 余孙全, 赵勇, 杨磊

(国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073)

摘要:在超声相控阵检测领域,常规成像方法遵守瑞利准则,其成像分辨率受到波长限制。研究时间反转多信号分类(Time Reversal-Multiple Signal Classification, TR-MUSIC)方法,在保持超声波工作频率不变且不影响系统探测深度的前提下,可提高成像分辨率,实现超分辨率成像。通过全矩阵采集方法获取被测对象的超声阵列数据;利用平面B扫描和TR-MUSIC方法处理数据,得到二维和三维超声图像;依据图像特征评估被测对象内部状况。实验选取加工不锈钢试块作为被测对象,搭建超声相控阵检测系统,在试块内部加工6个直径为1 mm、可视为点散射体的相邻贯通孔作为缺陷。实验表明,TR-MUSIC方法能够区分并定位这6个相邻点散射体,而平面B扫描方法则不能。因此,基于时间反转声学理论的TR-MUSIC方法可以提高成像分辨率,改善超声图像质量。

关键词:超分辨率;时间反转;超声相控阵;无损检测

中图分类号:TG115.28+5 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2021)06-060-06

Super resolution imaging method using ultrasonic phased array based on the time reversal acoustic theory

FAN Chengguang, YU Sunquan, ZHAO Yong, YANG Lei

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The imaging methods in the field of ultrasonic phased array abide by the Rayleigh criterion and its resolution is limited by ultrasonic wavelength. The time reversal with multiple signal classification, termed TR-MUSIC (time reversal-multiple signal classification), has been introduced to improve the resolution and achieve super resolution imaging under the premise of keeping the ultrasonic working frequency unchanged and maintaining the detection depth of the system. The ultrasonic array data from the test object can be captured via full matrix capture process. Then the data was post-processed by plane B scan as well as TR-MUSIC to obtain the 2-D and 3-D ultrasonic images. The test object was assessed according to the imaging results. A block of steel with six 1 mm-diameter side drilled holes, which can be considered as point-like targets, has been machined as the test object. Furthermore, the detection system of ultrasonic phased array has also been built. It is shown that TR-MUSIC can distinguish and locate these targets while the method of plane B scan fails. Therefore, the TR-MUSIC based on the theory of time reversal can increase the imaging resolution, and improve the quality of ultrasonic image.

Keywords: super resolution; time reversal; ultrasonic phased array; nondestructive evaluation

超声相控阵是一种新型的超声传感器,包含多个阵元,每一个阵元可以发射和接收声波信号。通过计算机技术控制阵列中各个阵元激励脉冲的时间延迟,可以灵活控制合成波阵面的偏转和聚焦,达到扫描成像的目的。因此,将超声相控阵置于被测对象表面的固定检测位置,可以对被测对象内部的某一个区域进行扫描成像,其已被广泛应用于工业无损检测领域^[1-3]。利用超声相控阵对被测对象进行检测时,首先,采用全矩阵采集(Full Matrix Capture, FMC)方法在线获取超声阵列数据。FMC方法利用阵列的每一对阵元组合

获取超声回波信号,因此数据中包含了与被测对象相关的最大量信息,同时数据可以被不同的成像方法处理,避免了重复采集,降低了实验成本^[4-5];其次,利用不同成像方法对超声阵列数据进行离线处理,得到超声图像。成像方法是时域信号转换为图像的“桥梁”,相同的数据被不同的成像方法处理,得到不同质量的超声图像;最后,提取超声图像特征,评估被测对象内部状况。分辨率是重要的评价指标,表征成像方法区分被测对象包含相邻点目标的能力。

瑞利准则定义了常规成像方法的分辨率极

* 收稿日期:2020-06-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61601489)

作者简介:樊程广(1985—),男,河南新乡人,讲师,博士,E-mail:chengguangfan@nudt.edu.cn

限,若被测对象中相邻点目标的距离小于分辨率极限时,根据超声图像无法区分相邻点目标。其中,分辨率极限与超声波工作波长相关,为了提高成像分辨率,需要使用更高频率的超声波;但是,超声波的工作频率越高,其在介质中传播时的衰减越厉害,影响探测深度^[6]。如何在保持超声波工作频率不变且不影响系统探测深度的前提下,提高成像分辨率,即为本文研究的超分辨率成像。

Fink 等基于声学波动方程的时间反转不变性,提出了时间反转声学(Time Reversal Acoustics, TRA)理论,并将其应用于无损检测领域^[7]。Lev-Ari 等在时间反转声学理论的基础上,结合多信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)法,提出了单阵元脉冲回波工作模式下的时间反转多信号分类(Time Reversal-Multiple Signal Classification, TR-MUSIC)法^[8],并随后扩展至双阵元传输工作模式^[9]。利用 TR-MUSIC 法对介质中相邻点目标进行成像,在理论模型中考虑声波在不同目标之间的多次散射(Multiple Scattering, MS),仿真结果验证了 TR-MUSIC 对相邻点目标的超分辨率特性^[10-11]。Simonetti 等通过理论分析指出,声波在不同目标之间的 MS 包含了目标的次波长信息,因此,MS 是实现超分辨率成像的关键因素,但是,de Rosny 等对该结论提出了异议,故而 MS 在超分辨率成像中的具体作用有待进一步研究^[12-13]。由于 TR-MUSIC 具备超分辨率特性,其已经在医学成像领域得到了研究,并被应用于乳腺癌细胞的成像和定位^[14-17]。此外,由于医学成像领域和无损检测领域存在差异^[18],需要进一步研究 TR-MUSIC 的超分辨率特性及其在无损检测领域的应用。

1 超声相控阵检测原理

利用超声相控阵对被测对象进行检测,其原理如图 1 所示。在笛卡尔坐标系中,一维线性阵列的中心位置为坐标原点 o ,其所包含的 N 个阵元沿 x 轴方向均匀分布,阵元宽度为 a 。激励阵元发出的超声波在 $x-z$ 平面传播,由接收阵元接收, $x-z$ 平面中包含理想点散射体。

对于阵列的任意一组阵元组合 $R_{tx} - R_{rx}$, 超声回波信号的频域表达如式(1)所示^[19]。

$$H_{tx,rx}(\omega) = F(\omega) D_{tx}(\theta_{tx}, \omega) G(R_{tx}, r_s, \omega) f_s G(r_s, R_{rx}, \omega) D_{rx}(\theta_{rx}, \omega) \quad (1)$$

式中, $F(\omega)$ 是阵元输出信号频谱, f_s 为理想点散射体的散射系数。

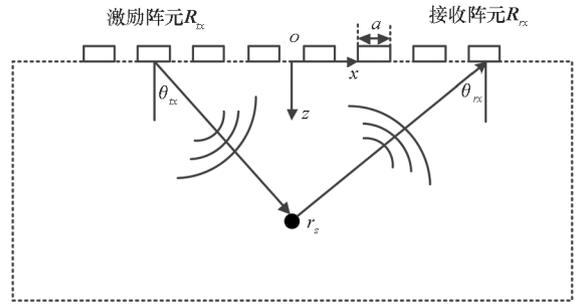


图 1 超声相控阵检测原理图

Fig. 1 Detection schematic diagram of ultrasonic phased array

$D_{tx}(\theta_{tx}, \omega)$ 和 $D_{rx}(\theta_{rx}, \omega)$ 是阵元在固体介质中的远场指向性函数,其定义分别如式(2)~(3)所示。

$$D_{tx}(\theta_{tx}, \omega) = \frac{\pi a \sin \theta_{tx}}{\lambda(\omega)} \text{sinc} \left[\frac{[(c_L/c_S)^2 - 2 \sin^2 \theta_{tx}] \cos \theta_{tx}}{F_0(\sin \theta_{tx})} \right] \quad (2)$$

$$D_{rx}(\theta_{rx}, \omega) = \frac{\pi a \sin \theta_{rx}}{\lambda(\omega)} \text{sinc} \left[\frac{[(c_L/c_S)^2 - 2 \sin^2 \theta_{rx}] \cos \theta_{rx}}{F_0(\sin \theta_{rx})} \right] \quad (3)$$

其中, $\lambda(\omega)$ 为超声波波长, c_L 和 c_S 分别为超声纵波和超声横波在介质中的传播速度, θ_{tx} 和 θ_{rx} 的定义如图 1 所示。 F_0 函数的定义如式(4)所示。

$$F_0(\xi) = [2\xi^2 - (c_L/c_S)^2]^2 - 4\xi^2(\xi^2 - 1)^{1/2}[\xi^2 - (c_L/c_S)^2]^{1/2} \quad (4)$$

$G(R_{tx}, r_s, \omega)$ 和 $G(r_s, R_{rx}, \omega)$ 为介质的格林函数,定义如式(5)所示。

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \omega) = -\frac{j}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \quad (5)$$

式中, k 为波数, $H_0^{(1)}$ 为一阶汉克函数。

利用 FMC 方法获取超声阵列数据,如图 2 所示。由于 FMC 方法利用阵列的任意一对阵元组合获取超声回波信号,因此,由其获取的超声阵列数据包含 N^2 个信号。

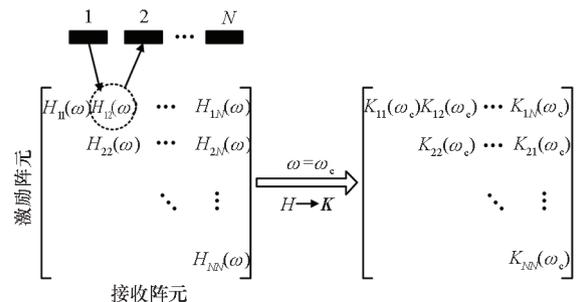


图 2 超声阵列数据和阵列响应矩阵

Fig. 2 Ultrasonic array data and array response matrix

2 时间反转多信号分类法数学定义

2.1 阵列响应矩阵

阵列响应矩阵描述了超声相控阵检测系统中不同阵元之间的脉冲响应。对于一个工作在回波模式的 N 元阵列,其任意阵元均可用于激励和接收声波信号,依次激励阵列中的阵元,由其引起的声波信号同时被阵列的 N 个阵元接收,即可得到阵列响应矩阵 $\mathbf{K}^{[20]}$ 。在实际应用过程中,通常通过超声阵列数据构建阵列响应矩阵 \mathbf{K} ,其计算过程如图 2 所示。给定工作频率,通常选择阵列中心频率 ω_c ,提取其对应的 $H(\omega_c)$ 值,作为矩阵 $\mathbf{K}(\omega_c)$ 的元素,构建阵列响应矩阵,其为 $N \times N$ 复矩阵。

2.2 奇异值分解和子空间划分

TR-MUSIC 法通过对阵列响应矩阵进行奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)实现成像目的^[11, 21]。

$\mathbf{K}(\omega)$ 的奇异值分解方程如式(6)所示。

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \boldsymbol{\Sigma}(\omega) \mathbf{V}^H(\omega) \quad (6)$$

式中, $\mathbf{U}(\omega)$ 和 $\mathbf{V}(\omega)$ 由奇异向量组成, $\boldsymbol{\Sigma}(\omega)$ 由奇异值组成,上标 H 表示复矩阵的共轭转置。

根据奇异值分布特征,将奇异向量($\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\nu}_i$) 划分为信号子空间($\mathbf{U}_s(\omega), \mathbf{V}_s(\omega)$) 和噪声子空间($\mathbf{U}_N(\omega), \mathbf{V}_N(\omega)$),如式(7)~(8)所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\omega) &= [\mathbf{U}_s(\omega) | \mathbf{U}_N(\omega)] \\ &= [\boldsymbol{\mu}_1(\omega), \dots, \boldsymbol{\mu}_m(\omega), \boldsymbol{\mu}_{m+1}(\omega), \dots, \boldsymbol{\mu}_N(\omega)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\omega) &= [\mathbf{V}_s(\omega) | \mathbf{V}_N(\omega)] \\ &= [\boldsymbol{\nu}_1(\omega), \dots, \boldsymbol{\nu}_m(\omega), \boldsymbol{\nu}_{m+1}(\omega), \dots, \boldsymbol{\nu}_N(\omega)] \end{aligned} \quad (8)$$

其中, m 为信号子空间的维度。

2.3 TR-MUSIC 成像函数

给定成像区域,对于成像区域中的任意像素点 \mathbf{r} ,定义方向向量 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega)$,如式(9)所示。

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) = [G(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}, \omega), \dots, G(\mathbf{R}_N, \mathbf{r}, \omega)]^T \quad (9)$$

式中, $\mathbf{R}_l (l=1 \sim N)$ 表示阵元位置,上标 T 表示复矩阵的转置。

在阵列中心频率点 ω_c 处,根据方向向量和信号子空间,定义 TR-MUSIC 成像函数如式(10)所示。

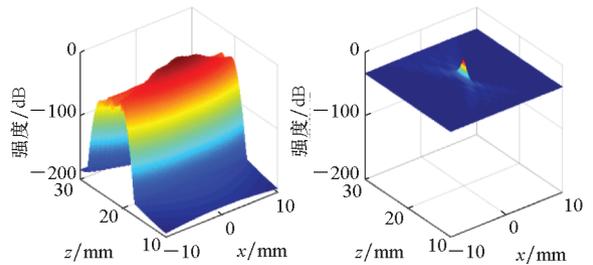
$$I(\mathbf{r}, \omega_c) = \left| \left(1 - \frac{\mathbf{g}^H(\mathbf{r}, \omega_c) \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega_c)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega_c)\|^2} \right)^{-1} \right| \quad (10)$$

式中, $\|\cdot\|$ 表示范数。

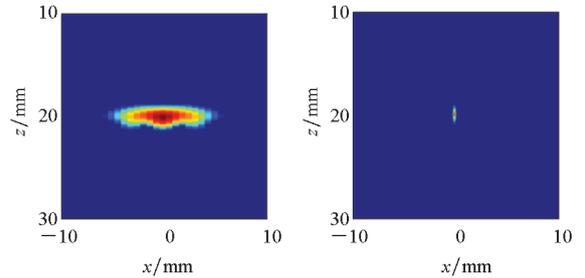
2.4 点扩散函数

点扩散函数(Point Spread Function, PSF)描述超声成像系统对理想点散射体的响应^[19]。给定阵列和理想点散射体,利用 FMC 方法获取超声阵列数据,通过成像方法得到理想点散射体的超声图像,提取图像特征用于评价不同成像方法。

数值仿真参数设置为:一维线性阵列包含 64 个均匀分布的阵元,所有阵元可以激励和接收超声波,超声波在介质中的传播速度为 6 300 m/s,成像区域为 20 mm \times 20 mm,在成像区域中有一个理想点散射体,其位置坐标为($x=0$, $z=20$ mm),其散射系数定义为 1。利用 FMC 方法获取超声阵列数据,由于线性阵列包含 64 个阵元,因此,超声阵列数据共包含 4 096 个时域信号。利用平面 B 扫描方法和 TR-MUSIC 方法处理超声阵列数据,得到理想点散射体的二维和三维超声图像,如图 3 所示。平面 B 扫描是常用的基于延迟和叠加原理(Delay And Sum, DAS)的波束形成技术,由于其操作简单,对噪声具备鲁棒性,已经被广泛用于工业无损检测领域^[4]。对于 TR-MUSIC 方法,利用其对介质中的理想点散射体成像时,在不考虑噪声的前提下,其信号子空间的维度与理想点散射体的数目一致^[22],因此,在仿真过程中,信号子空间的维度选择为 1。



(a) 三维平面 B 扫描图像 (b) 三维 TR-MUSIC 图像
(a) 3-D plane B scan image (b) 3-D TR-MUSIC image



(c) 二维平面 B 扫描图像 (d) 二维 TR-MUSIC 图像
(c) 2-D plane B scan image (d) 2-D TR-MUSIC image

图 3 点扩散函数

Fig. 3 Point spread function

由图 3 可知,基于平面 B 扫描和 TR-MUSIC 图像均可定位理想点散射体的位置。相较于平面 B 扫描方法,TR-MUSIC 方法的成像结果中的理想点散射体的图像区域明显变小,说明其成像分辨率得到提高。

3 实验验证

3.1 实验系统

实验系统原理图如图 4 所示,主要包括阵列控制器、线性阵列传感器以及测试对象。阵列控制器的一端与 PC 机相连,一端与线性阵列相连,阵列通过耦合剂放置在测试对象表面。PC 机发出指令,通过阵列控制器控制阵列传感器中各个阵元的激励和接收。

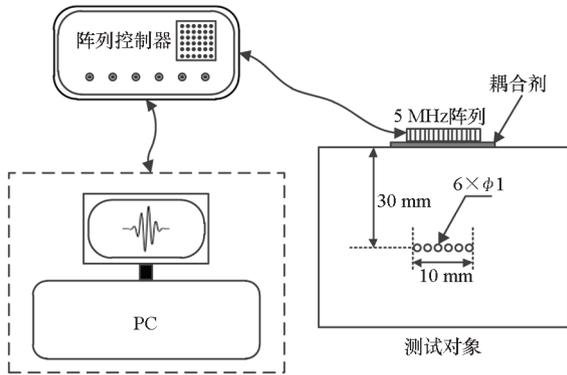


图 4 实验系统原理

Fig. 4 Principle of experimental system

实验设备实物图如图 5 所示,其中阵列控制器选择英国 Peak NDT 公司的 MicroPulse 5PA,其参数见表 1,它包括 128 个独立通道,用于进行数



图 5 实验设备

Fig. 5 Experimental equipment

据传输,其中每一个通道可以进行 16 位的数据采集。线性阵列传感器选择法国 Imasonic 公司的 5 MHz、64 元线性阵列,其参数见表 2。

表 1 阵列控制器参数

Tab. 1 Array controller parameters

参数	值
脉冲宽度/ns	80
脉冲电压/V	100
采样频率/MHz	50
采样点数目	1 600
放大器增益/dB	40

表 2 线性阵列参数

Tab. 2 Linear array parameters

参数	值
阵元数目	64
阵元宽度/mm	0.53
阵元间距/mm	0.63
中心频率/MHz	5
带宽(-6 dB)/MHz	3~7

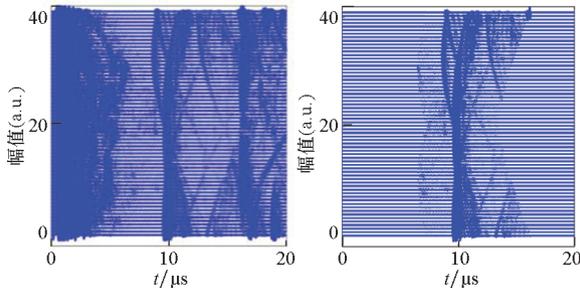
测试对象选择不锈钢试块,在其内部加工 6 个直径为 1 mm 的贯通孔。超声波在不锈钢试块中的传播速度为 6 150 m/s,在阵列传感器中心频率 5 MHz 处,其对应的波长为 1.23 mm,大于贯通孔直径 1 mm,因此,这 6 个贯通孔可视为点散射体。

3.2 实验结果分析

首先,利用 FMC 方法获取超声阵列数据。由于超声波在固体介质中传播时,存在超声纵波、横波等,因此,对于超声阵列数据中的每一个时域信号,需要从中提取与缺陷相关的散射信号,选择在时域加窗函数的方法进行提取,部分原始信号和提取的散射信号如图 6 所示。

其次,对预处理后的时域信号进行时域-频域转换,在阵列传感器的中心频率点处,构建阵列响应矩阵。由于阵列包含 64 个阵元,因此,阵列响应矩阵为 64 × 64 的复矩阵。

再次,对阵列响应矩阵进行奇异值分解,在阵列中心频率点处,得到 64 个奇异值,其分布曲线如图 7 所示。在 64 个奇异值中,前 11 个奇异值大于剩下的奇异值,因此,信号子空间的维度设定为 11。信号子空间维度会影响超声成像结果质



(a) 原始信号 (b) 缺陷散射信号
(a) Original signal (b) Scattered signals related with defect

图 6 原始信号和缺陷散射信号

Fig. 6 Original signals and scattered signals related with defect

量。信号子空间维度过小,基于超声图像无法定位所有目标;信号子空间维度过大,超声成像结果中存在伪目标,无法准确评估被测对象内部状况。

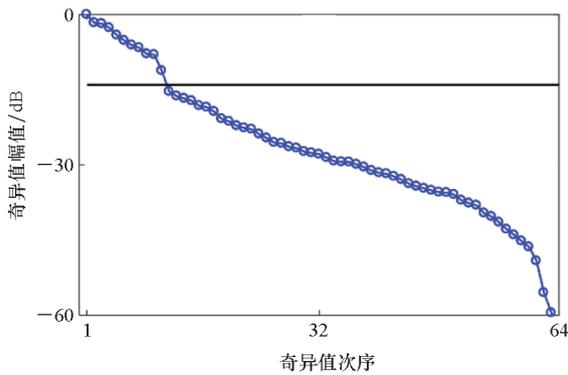
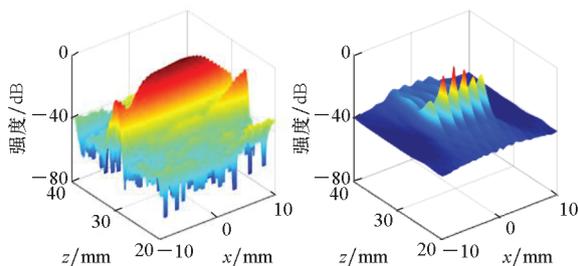


图 7 奇异值分布曲线

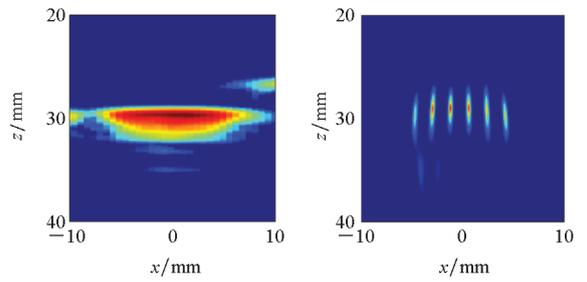
Fig. 7 Distribution of singular values

最后,设定成像区域 $20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$,对于其中的任意像素点,定义方向向量,基于信号子空间得到 TR-MUSIC 图像,如图 8 所示。为了进行比较,图 8 给出了基于相同超声阵列数据得到的常规平面 B 扫描图像。

由图 8 可知,基于平面 B 扫描图像,无法区分不锈钢试块包含的 6 个相邻贯通孔,基于 TR-MUSIC 图像,则可以区分这 6 个相邻贯通孔,并且对其进行准确定位。实验结果验证了 TR-



(a) 三维平面 B 扫描图像 (b) 三维 TR-MUSIC 图像
(a) 3-D plane B scan image (b) 3-D TR-MUSIC



(c) 二维平面 B 扫描图像 (d) 二维 TR-MUSIC 图像
(c) 2-D plane B scan image (d) 2-D TR-MUSIC image

图 8 实验结果

Fig. 8 Experimental results

MUSIC 方法的超分辨率特性。

4 结论

本文研究基于时间反转声学理论的超分辨率成像方法,用于解决常规超声成像分辨率受到超声波波长限制的问题。详细阐述了超声相控阵检测原理;给出了 TR-MUSIC 法的数学定义,通过数值仿真分析了其点扩散函数;搭建了实验系统,通过实验验证了其超分辨率特性。实验在不锈钢试块上完成,在试块的内部加工 6 个可视点散射体、直径为 1 mm 的贯通孔。实验结果表明,相比较常规的平面 B 扫描方法,TR-MUSIC 方法可以克服瑞利准则,实现超分辨率成像,提高超声图像质量。

参考文献 (References)

[1] 周正干,李洋,周文彬.相控阵超声后处理成像技术研究、应用和发展[J].机械工程学报,2016,52(6):1-11.
ZHOU Zhenggan, LI Yang, ZHOU Wenbin. Ultrasonic phased array post-processing imaging techniques: a review [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(6): 1-11. (in Chinese)

[2] 靳世久,杨晓霞,陈世利,等.超声相控阵检测技术的发展及应用[J].电子测量与仪器学报,2014,28(9):925-934.
JIN Shijiu, YANG Xiaoxia, CHEN Shili, et al. Development and application of ultrasonic phased array inspection technology [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2014, 28(9): 925-934. (in Chinese)

[3] SUMANA S, KUMAR A. Total focusing method-based ultrasonic phased array imaging in thick structures [J]. Journal of Nondestructive Evaluation, Diagnostics and Prognostics of Engineering Systems, 2021, 4(4): 041005.

[4] HOLMES C, DRINKWATER B W, WILCOX P D. Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit-receive array data for non-destructive evaluation [J]. NDT & E International, 2005, 38(8): 701-711.

[5] SAMPATH S, DHAYALAN R, KUMAR A, et al. Evaluation of material degradation using phased array ultrasonic technique

- with full matrix capture [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2021, 120: 105118.
- [6] SIMONETTI F. Breaking the resolution limit: a new perspective for imaging in NDE [C]//*Proceedings of AIP Conference*, 2006, 820(1): 700–707.
- [7] FINK M, CASSEREAU D, DERODE A, et al. Time-reversed acoustics [J]. *Reports on Progress in Physics*, 2000, 63(12): 1933–1995.
- [8] LEV-ARI H, DEVANEY A J. The time-reversal technique re-interpreted: subspace-based signal processing for multi-static target location [C]//*Proceedings of the IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, 2000: 509–513.
- [9] LEHMAN S K, DEVANEY A J. Transmission mode time-reversal super-resolution imaging [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2003, 113(5): 2742–2753.
- [10] GRUBER F K, MARENGO E A, DEVANEY A J. Time-reversal imaging with multiple signal classification considering multiple scattering between the targets [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 115(6): 3042–3047.
- [11] DEVANEY A J, MARENGO E A, GRUBER F K. Time-reversal-based imaging and inverse scattering of multiply scattering point targets [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, 118(5): 3129–3138.
- [12] SIMONETTI F. Multiple scattering: the key to unravel the subwavelength world from the far-field pattern of a scattered wave [J]. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2006, 73(3): 036619.
- [13] DE ROSNY J, PRADA C. Comment on “multiple scattering: the key to unravel the subwavelength world from the far-field pattern of a scattered wave” [J]. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2007, 75(4): 048601.
- [14] LABYED Y, HUANG L J. Ultrasound time-reversal MUSIC imaging with diffraction and attenuation compensation [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2012, 59(10): 2186–2200.
- [15] LABYED Y, HUANG L J. Ultrasound time-reversal MUSIC imaging of extended targets [J]. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 2012, 38(11): 2018–2030.
- [16] LABYED Y, HUANG L J. TR-MUSIC inversion of the density and compressibility contrasts of point scatterers [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2014, 61(1): 16–24.
- [17] OUYANG Y L, ZHOU Z H, WU W W, et al. A review of ultrasound detection methods for breast microcalcification [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, 16(4): 1761–1785.
- [18] HALE R D, HSU D K. Ultrasonic NDE of three-dimensional textile composites [M]//*Anon. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*. Boston: Springer, 1995: 1407–1414.
- [19] DRINKWATER B W, WILCOX P D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: a review [J]. *NDT & E International*, 2006, 39(7): 525–541.
- [20] DEVANEY A J. Time reversal imaging of obscured targets from multistatic data [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, 53(5): 1600–1610.
- [21] 吴鹏英, 王强, 范昕炜, 等. 基于时间反转 MUSIC 的奥氏体不锈钢超声成像分析 [J]. *应用声学*, 2016, 35(2): 102–108.
- WU Pengying, WANG Qiang, FAN Xinwei, et al. The ultrasonic inspection of austenitic stainless steels applying the multiple signal classification algorithm [J]. *Journal of Applied Acoustics*, 2016, 35(2): 102–108. (in Chinese)
- [22] PRADA C, THOMAS J L. Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2003, 114(1): 235–243.