

## 弯矩作用下热塑性复合材料悬臂梁弹塑性分析\*

雷勇军<sup>1,2</sup>, 刘明伟<sup>1,2</sup>, 张大鹏<sup>1,2</sup>, 高艺航<sup>1,2,3</sup>

(1. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073; 2. 空天任务智能规划与仿真湖南省重点实验室, 湖南长沙 410073;  
3. 中国运载火箭技术研究院北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

**摘要:**基于 Timoshenko 梁理论和 Tsai-Hill 屈服准则,建立了自由端弯曲载荷作用下悬臂梁弹塑性问题的数学模型,并得到了梁应力和位移的精确解。通过与相关文献和有限元计算结果进行对比,验证了该方法的正确性,并在此基础上,进一步分析了纤维方向角、弯矩、跨高比以及纤维体积分数对梁弹塑性应力和位移的影响规律。相关成果可为热塑性复合材料的设计和工程应用提供参考。

**关键词:**热塑性复合材料;悬臂梁;弹塑性;Timoshenko 梁;精确解

**中图分类号:** O344.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2022)02-024-10

## Elastic-plastic analysis for thermoplastic composite cantilever beams by bending moment

LEI Yongjun<sup>1,2</sup>, LIU Mingwei<sup>1,2</sup>, ZHANG Dapeng<sup>1,2</sup>, GAO Yihang<sup>1,2,3</sup>

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Hunan Key Laboratory of Intelligent Planning and Simulation for Aerospace Missions, Changsha 410073, China;

3. Beijing Institute of Aerospace Systems Engineering, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Based on the Timoshenko beam theory and the Tsai-Hill yield criterion, a mathematical model for elastic-plastic analysis for cantilever beams by bending moment was established. Meanwhile, the analytical solutions of stress and displacement were obtained. The solutions were verified in comparison with the ones available in the literature and finite element. Furthermore, the effects of fiber orientation angle, bending moment, aspect ratio and fiber volume fraction on the elastic-plastic stress and displacement of the beam were examined in detail. The results can provide important references for the design and engineering applications of thermoplastic composites.

**Keywords:** thermoplastic composite; cantilever beams; elastic-plastic; Timoshenko beam; analytical solutions

自 1951 年 Bradit 首次制造热塑性复合材料(玻璃纤维增强聚苯乙烯)以来,热塑性复合材料已普遍应用于航空工程、汽车交通、医疗器械等领域<sup>[1-3]</sup>。在当前可重复使用运载器的需求下,具备高抗冲击性能、高损伤容限以及可熔融再加工等特点<sup>[4-5]</sup>的热塑性复合材料必将在航天工程领域得到更广泛运用。试验表明<sup>[6-7]</sup>热塑性复合材料具有明显的弹塑性阶段,进入塑性后有较强的承载能力,这与传统的热固性复合材料弹性阶段后即发生脆性断裂有很大不同。为充分发挥材料的应用潜力,避免以弹性设计代替塑性设计的错误<sup>[8]</sup>,对热塑性复合材料弹塑性力学特性进行分析具有重要意义。

热塑性复合材料具有高度正交各向异性特

点,其力学问题可等效为正交各向异性材料的力学问题进行研究。Lekhnitskii<sup>[9]</sup>得到了受横向力作用的正交各向异性悬臂梁、受均布载荷和线性分布载荷作用的正交各向异性简支梁和悬臂梁的弹性解答。黄德进等<sup>[10-11]</sup>利用 Airy 应力函数建立了均布载荷下正交各向异性梁的力学特性分析模型,并得到了两端固支和一端固支一端简支边界条件下应力场和位移场的解析解。针对均布载荷作用下正交各向异性悬臂梁的变形问题,黄立新等<sup>[12-13]</sup>用有限元法分析了材料各向异性、跨高比等对变形的影响。Kilic 等<sup>[14]</sup>分析了在均布载荷或横向集中力作用下复合材料悬臂梁自由端挠度与纤维方向角之间的关系。然而上述文献中应力函数形式很难确定,为解决这一问题,张浪

\* 收稿日期:2020-09-26

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(11902348);湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5650);国防科技大学科研计划资助项目(ZK20-27)

**作者简介:**雷勇军(1968—),男,湖南澧县人,教授,博士,博士生导师,E-mail:leiyj108@nudt.edu.cn;  
张大鹏(通信作者),男,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:zhangdapenghit@126.com

等<sup>[15]</sup>给出了一种通过求解函数方程获得平面各向异性梁弹性解的新方法。当外载荷较大,材料进入塑性后,相应问题变得更复杂。基于理想弹塑性理论,Aykul 和 Kaya<sup>[16]</sup>以及 Esendemir<sup>[17-18]</sup>研究了集中载荷下热塑性复合材料悬臂梁、均布载荷下或集中载荷下简支梁的弹塑性应力问题,然而理想弹塑性理论与实际热塑性复合材料应力应变关系存在较大差异。结合线性强化弹塑性理论和 Euler-Bernoulli 梁假设,Sayman 等<sup>[19]</sup>对弯矩作用下热塑性复合材料悬臂梁进行研究,得到了弹性解和弹塑性解。对于复合材料短粗梁,Karamanli<sup>[20]</sup>利用 Timoshenko 梁理论研究了复合材料层合梁在不同边界条件下的变形问题;Balduzzi 等<sup>[21]</sup>基于 Timoshenko 梁理论分析了材料的各向异性对梁的本构关系和应力分布的影响;Doeva 等<sup>[22]</sup>给出了考虑拉弯剪扭耦合效应的 Timoshenko 复合材料梁静挠度分析的精确解析解,并指出现有的 Euler-Bernoulli 梁模型不足以解释厚梁特性的问题。但是,以上基于 Timoshenko 梁理论的研究均没有考虑热塑性复合材料的塑性效应。

本文以热塑性复合材料悬臂梁为研究对象,基于 Timoshenko 梁理论和 Tsai-Hill 屈服准则,得到应力和位移的解析解。通过与文献[19,21]和有限元计算结果对比,验证本文所给模型与方法的正确性,并分析了纤维方向角、弯矩、跨高比以及纤维体积分数等对悬臂梁应力和位移的影响规律。

### 1 悬臂梁弹塑性分析模型

研究对象如图 1 所示,热塑性复合材料悬臂梁长为  $l$ 、高为  $2c$ 、厚为  $t$ ,纤维方向角为  $\theta$ ,自由端承受弯矩  $M$  作用,忽略体力,并建立如图所示的坐标系  $xoy$ 。

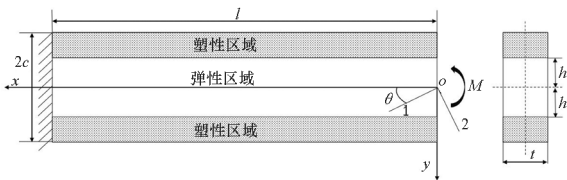


图 1 受弯矩载荷的悬臂梁

Fig.1 Cantilever beam loading by bending moment

不失一般性,对该悬臂梁进行如下 4 个基本假设:

- 1) 梁的变形属于小挠度变形;
- 2) 在  $xoy$  平面内满足平面应力假设;

3) 热塑性复合材料是拉压同性的;

4) 悬臂梁变形满足 Timoshenko 梁理论,轴向位移  $u$ 、横向位移  $v$  和转角  $\phi$  相互独立,则有

$$\begin{cases} u(x,y) = u_0(x) - y\phi(x) \\ v(x) = w(x) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u_0$  为梁中性面轴向位移,  $w$  为梁中性面横向位移。

下面分别建立弹性段和弹塑性段理论分析模型。

#### 1.1 弹性段分析模型

考虑悬臂梁的平面应力问题,基本方程如下:

1) 平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2) 几何方程

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

3) 本构方程

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{16} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{26} \\ \bar{a}_{16} & \bar{a}_{26} & \bar{a}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

在纤维坐标系  $1o2$  下,热塑性复合材料的本构关系为

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

柔度矩阵中各系数与材料弹性参数关系为:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = a_{21} = -\frac{\mu_{12}}{E_2}, a_{22} = \frac{1}{E_2}, a_{66} = \frac{1}{G_{12}}。其中,$$

$E_1$  为纤维方向弹性模量,  $E_2$  为垂直纤维方向弹性模量,  $G_{12}$  为平面 1-2 内剪切模量,  $\mu_{12}$  为泊松比。根据坐标转换关系可得  $xoy$  坐标系下柔度矩阵与  $1o2$  纤维坐标系下柔度矩阵的关系如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{16} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{26} \\ \bar{a}_{16} & \bar{a}_{26} & \bar{a}_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (6)$$

其中,转换矩阵  $\mathbf{T}$  的表达式为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

设应力函数为  $\varphi(x, y)$ , 其与应力  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  的关系为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8)$$

结合式(3)、式(4)和式(8)得控制方程

$$\begin{aligned} \bar{a}_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2\bar{a}_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + (2\bar{a}_{12} + \bar{a}_{66}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ 2\bar{a}_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + \bar{a}_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

梁仅在自由端承受弯矩  $M$ , 因此在梁任意截面上可以得到

$$\int_{-c}^c \sigma_x y t dy = M \quad (10)$$

由弯矩  $M$  为给定常值可知,  $\sigma_x$  只与坐标  $y$  有关, 结合式(8)可得应力函数的表达式为

$$\varphi = F(y) + yA(x) + B(x) \quad (11)$$

其中,  $F(y)$ 、 $A(x)$ 、 $B(x)$  为待求函数, 对于本悬臂梁, 其上下表面为主要边界条件, 则有

$$\sigma_y(x, \pm c) = 0, \sigma_x(x, \pm c) = 0$$

$$\int_{-c}^c \sigma_x y t dy = M, \int_{-c}^c \sigma_x t dy = 0, \int_{-c}^c \tau_{xy} t dy = 0$$

$$u(l, y) = 0, \phi(l, y) = 0, v(l, 0) = 0$$

推导可得在弯矩  $M$  作用下悬臂梁弹性阶段应力场和位移场为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{3M}{2c^3 t} y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ u = y \left( \frac{3\bar{a}_{11} M x}{2c^3 t} - \frac{3\bar{a}_{11} M l}{2c^3 t} \right) \\ v = \frac{3\bar{a}_{12} M y}{4c^3 t} - \frac{3\bar{a}_{11} M x^2}{4c^3 t} + \frac{3\bar{a}_{11} M l x}{2c^3 t} - \frac{3\bar{a}_{11} M l^2}{4c^3 t} \end{cases} \quad (12)$$

由式(12)可知, 当弯矩  $M$  较小时, 梁处于弹性阶段, 梁上下表面处应力最大; 随着  $M$  增大, 梁上下表面先进入塑性状态, 需结合复合材料塑性力学知识建立弹塑性段分析模型。

### 1.2 弹塑性段分析模型

文献[23-25]表明 Tsai-Hill 屈服准则描述的应力空间屈服面与热塑性复合材料真实屈服状态吻合, 本文基于 Tsai-Hill 屈服准则对热塑性复合材料悬臂梁弹塑性段应力和变形进行分析, 平面应力假设下考虑拉压同性的 Tsai-Hill 屈服准则

如下:

$$f = \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \quad (13)$$

其中,  $X$  为复合材料沿纤维方向屈服强度,  $Y$  为垂直纤维方向屈服强度,  $S$  为面内剪切强度。根据式(13), 定义等效应力为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{X^2}{Y^2} \sigma_2^2 + \frac{X^2}{S^2} \tau_{12}^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (14)$$

根据坐标转换矩阵, 材料主轴坐标系下应力  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  和  $xoy$  坐标系下应力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  的转换关系为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (15)$$

由于  $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ , 将式(15)代入式(14)中, 可得等效应力表达式为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 \left[ \cos^4 \theta + \frac{X^2}{Y^2} \sin^4 \theta + \left( \frac{X^2}{S^2} - 1 \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]} \quad (16)$$

材料进入屈服阶段后, 基于线性强化假设, 屈服后的空间应力状态由等效塑性应变  $\varepsilon_p$  表征(其中下标 p 代表塑性)。Ludwik 公式给出了  $\bar{\sigma}$  与  $\varepsilon_p$  的关系。

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + K \varepsilon_p \quad (17)$$

其中,  $\sigma_0$  的大小为  $X$ ,  $K$  是塑性常数, 则复合材料屈服时满足如下关系:

$$\begin{cases} X = X_1 N \\ N = \sqrt{\cos^4 \theta + \frac{X^2}{Y^2} \sin^4 \theta + \left( \frac{X^2}{S^2} - 1 \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $X_1$  为复合材料达到屈服条件时应力  $\sigma_x$  的大小, 即当  $\sigma_x = X_1$  时, 材料进入塑性。选用相关塑性流动法则, 在纤维坐标系  $1o2$  下塑性应变增量表达式为

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^p & d\varepsilon_2^p & d\gamma_{12}^p \end{pmatrix}^T = d\varepsilon_p \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau_{12}} \end{pmatrix}^T \quad (19)$$

总应变增量为弹性应变增量和塑性应变增量之和, 即  $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$ , 则纤维坐标系  $1o2$  下总应变增量为

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p = a_{11} d\sigma_1 + a_{12} d\sigma_2 + d\varepsilon_1^p \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_2^p = a_{12} d\sigma_1 + a_{22} d\sigma_2 + d\varepsilon_2^p \\ d\gamma_{12} = d\gamma_{12}^e + d\gamma_{12}^p = a_{66} d\tau_{12} + d\gamma_{12}^p \end{cases} \quad (20)$$

对式(20)进行积分, 可得到纤维坐标系  $1o2$  下各应变分量, 再利用坐标转换关系, 将其变换到

$xoy$  坐标系下,可得  $xoy$  坐标系下总应变为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}\sigma_x + B_1\varepsilon_p & \bar{a}_{12}\sigma_x + B_2\varepsilon_p \\ \bar{a}_{16}\sigma_x + B_3\varepsilon_p \end{pmatrix}^T \quad (21)$$

其中,  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$  为与材料塑性性能和纤维方向角有关的参数。梁在出现屈服后,结合 Timoshenko 梁理论可得

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{\bar{a}_{11}} = \frac{-y\phi'(x)}{\bar{a}_{11}} \quad (22)$$

由 1.1 节分析可知,  $\sigma_x$  与坐标  $y$  成正比例关系,梁的塑性区域从梁上下表面向中性面扩展,设  $y \in (-h, h)$  为弹性区域,则在弹塑性分界位置存在  $\sigma_x = X_1$ ,可得

$$X_1 = \frac{-h\phi'(x)}{\bar{a}_{11}} \quad (23)$$

由式(23)并结合转角边界条件  $\phi(l, y) = 0$  得

$$\phi(x) = -\frac{\bar{a}_{11}X_1}{h}(x-l) \quad (24)$$

在塑性区域内,利用  $\sigma_x = \frac{\sigma_0 + K\varepsilon_p}{N}$ ,由式(21) ~ (23)可得  $\varepsilon_p$  的表达式为

$$\varepsilon_p = \frac{N\bar{a}_{11}X_1}{(\bar{a}_{11}K + B_1N)h}y - \frac{\bar{a}_{11}\sigma_0}{\bar{a}_{11}K + B_1N} \quad (25)$$

因此考虑塑性后,悬臂梁的应力解如下:

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{X_1}{h}y & (-h, h) \\ \frac{\sigma_0 + K\varepsilon_p}{N} & [-c, -h] \cup [h, c] \end{cases} \quad (26)$$

在梁的任意截面均满足如下关系:

$$2\left(\int_0^h \frac{X_1ty^2}{h}dy + \int_h^c \frac{\sigma_0 + K\varepsilon_p}{N}tydy\right) = M \quad (27)$$

基于 Timoshenko 梁理论并结合式(24),可得轴向位移为

$$u = \frac{\bar{a}_{11}X_1(x-l)}{h}y \quad (28)$$

由式(3)和式(21)积分可得横向位移在弹性区域和塑性区域分别为

$$v_e = \frac{\bar{a}_{12}X_1}{2h}y^2 + V_e(x) \quad (29)$$

$$v_p = \frac{(N\bar{b}_{11}B_2X_1 + \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}KX_1y^2)}{2(\bar{b}_{11}K + B_1N)h}y^2 + \left[\frac{\bar{b}_{12}\sigma_0}{N} - \frac{\bar{b}_{11}\bar{b}_{12}K\sigma_0}{N(\bar{b}_{11}K + B_1N)} - \frac{\bar{b}_{11}B_2\sigma_0}{\bar{b}_{11}K + B_1N}\right]y + V_p(x) \quad (30)$$

其中,  $V_e(x)$  和  $V_p(x)$  为与  $x$  相关的待求函数。进一步由边界条件  $v_e(l, 0) = 0$ 、 $v_p(l, h) = 0$  和连续性条件  $v_e(x, h) = v_p(x, h)$  可得横向位移的表达

式为

$$v_e = \frac{\bar{a}_{12}X_1}{2h}y^2 - \frac{\bar{a}_{11}X_1}{2h}x^2 + \frac{\bar{a}_{11}X_1l}{h}x - \frac{\bar{a}_{11}X_1}{2h}l^2 \quad (31)$$

$$v_p = \frac{(N\bar{a}_{11}B_2X_1 + \bar{a}_{11}\bar{a}_{12}KX_1y^2)}{2(\bar{a}_{11}K + B_1N)h}y^2 - \frac{\bar{a}_{11}X_1}{2h}x^2 + \frac{\bar{a}_{11}X_1l}{h}x + \frac{\bar{a}_{12}hX_1}{2} + \left[\frac{\bar{a}_{12}\sigma_0}{N} - \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{12}K\sigma_0}{N(\bar{a}_{11}K + B_1N)} - \frac{\bar{a}_{11}B_2\sigma_0}{\bar{a}_{11}K + B_1N}\right]y - \frac{\bar{a}_{11}l^2X_1}{2h} - \frac{\bar{a}_{12}h\sigma_0}{N} + \frac{\bar{a}_{11}B_2h\sigma_0}{\bar{a}_{11}K + B_1N} - \frac{N\bar{a}_{11}B_2hX_1}{2(\bar{a}_{11}K + B_1N)} + \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{12}hK\sigma_0}{N(\bar{a}_{11}K + B_1N)} - \frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{12}hKX_1}{2(\bar{a}_{11}K + B_1N)} \quad (32)$$

以上分析将 Timoshenko 梁理论和塑性线性强化理论应用于热塑性复合材料悬臂梁的弹塑性分析中,并获得了梁应力和变形的解析解。此外,由于热塑性复合材料的力学性能与纤维体积分数  $v_f$  有关<sup>[26-27]</sup>,本文所建模型可用于分析不同纤维体积分数下热塑性复合材料悬臂梁弹塑性力学特性。

## 2 算例分析

### 2.1 模型验证

文献[19]基于 Euler-Bernoulli 梁理论和线性强化弹塑性本构模型分析了弯曲载荷下热塑性复合材料悬臂梁弹塑性应力和变形;文献[21]基于 Timoshenko 梁理论分析了在弯曲载荷下双层复合材料悬臂梁的弹性静变形。为验证本文所建模型及求解方法的正确性,以文献[19]中的编织钢纤维增强聚乙烯复合材料悬臂梁为例进行对比分析,算例中涉及的基本参数与文献[19]一致:悬臂梁长 80 mm、高 12 mm、厚 6.4 mm,弹塑性力学参数如表 1 所示。设  $\theta$  为  $45^\circ$ ,  $M$  为  $4 \text{ kN} \cdot \text{mm}$ 。此外,本节给出了梁有限元计算结果,有限元计算采用四节点双线性平面应力四边形单元,共计 2 600 个单元,屈服准则为各向异性 Tsai-Hill 屈服准则<sup>[28]</sup>,硬化方式为各向同性硬化。

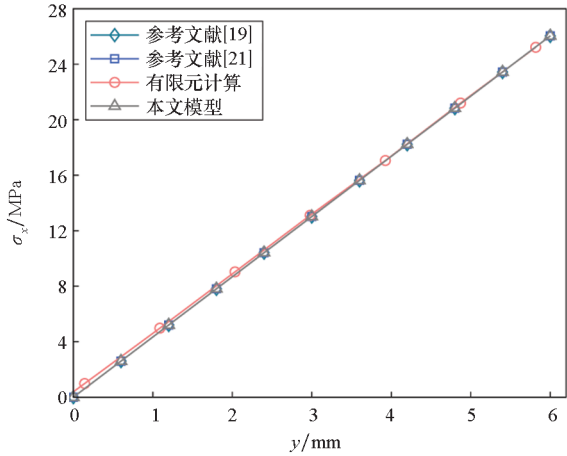
表 1 编织钢纤维增强聚乙烯复合材料力学参数

Tab.1 Mechanical parameters of polyethylene composite reinforced with woven steel fibers

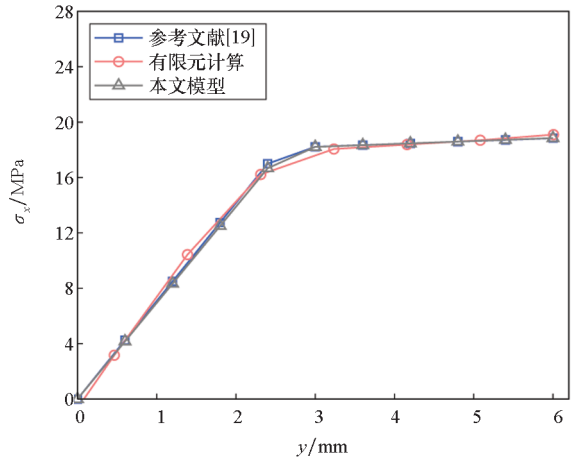
力学参数	$E_1/\text{MPa}$	$E_2/\text{MPa}$	$G_{12}/\text{MPa}$	$\mu_{12}$
数值	13 000	13 000	400	0.46
力学参数	$X/\text{MPa}$	$Y/\text{MPa}$	$S/\text{MPa}$	$K/\text{MPa}$
数值	22	16	11	115

图 2 给出了本文模型与参考文献[19,21]以

及有限元计算在悬臂梁固定端截面应力分布对比结果。由图 2(a)可知,在不考虑塑性的情况下,以上方法获得的数据吻合较好;由图 2(b)可知,在考虑塑性的情况下,本文所建模型与有限元计算结果更接近。对比图 2(a)和图 2(b)可知,塑性效应会显著改变悬臂梁截面应力分布形式。表 2给出了以上方法在自由端下表面点(0 mm, 6 mm)的应力和位移。由表 2可以看出,本文模型所得数据较文献[19]均更接近于有限元计算结果,特别是在考虑塑性的情况下,轴向位移和横



(a) 不考虑塑性  
(a) Not considering plasticity



(b) 考虑塑性  
(b) Considering plasticity

图 2 悬臂梁固定端截面轴向应力分布

Fig. 2 Axial stress distribution at the cross-section of the cantilever beam at the fixed end

向位移较文献[19]的 Euler-Bernoulli 梁模型提高了 1.81%和 2.03%的计算精度。以上分析验证了本文所建模型和求解方法的正确性,说明了在热塑性复合材料悬臂梁弹塑性力学分析中,运用 Timoshenko 梁理论可显著提高求解精度。下面基于本文模型对纤维方向角、弯矩、跨高比以及纤维体积分数等对梁应力和变形的影响做进一步分析。

表 2 参考点(0 mm,6 mm)应力、位移

Tab. 2 Stress and displacement of the reference point(0 mm,6 mm)

分析方法	不考虑塑性			考虑塑性		
	$\sigma_x$ /MPa	$u$ /mm	$v$ /mm	$\sigma_x$ /MPa	$u$ /mm	$v$ /mm
参考文献[19]	26.041 7	-1.345 4	-9.016 2	18.839 2	-2.193 9	-14.693 1
参考文献[21]	26.041 7	-1.345 4	-8.969 0			
有限元计算	25.887 8	-1.341 9	-8.923 6	19.099 1	-2.142 3	-13.712 3
本文模型	26.041 7	-1.345 4	-8.961 1	18.849 4	-2.153 0	-14.409 4

## 2.2 影响因素分析

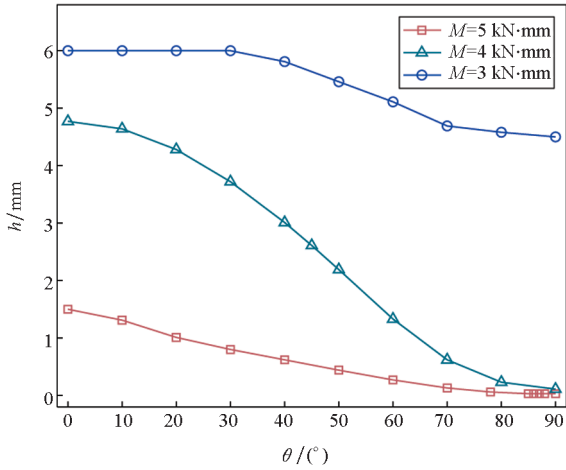
### 2.2.1 纤维方向角对悬臂梁弹塑应力和位移的影响

图 3 分别给出了纤维方向角  $\theta$  对弹塑性区域参数  $h$ 、梁自由端下表面点应力  $\sigma_x$ 、轴向位移  $u$  以及横向位移  $v$  的影响情况。在本算例中,梁的几何参数和弹塑性力学参数同 2.1 节。

由图 3(a)可知,在不同  $M$  作用下, $h$  均随着  $\theta$  增大而减小, $h$  越小表明梁处于塑性的区域范围越大,这说明增大  $\theta$  会显著降低梁的刚度,且该影响随着  $M$  的增大而增强。

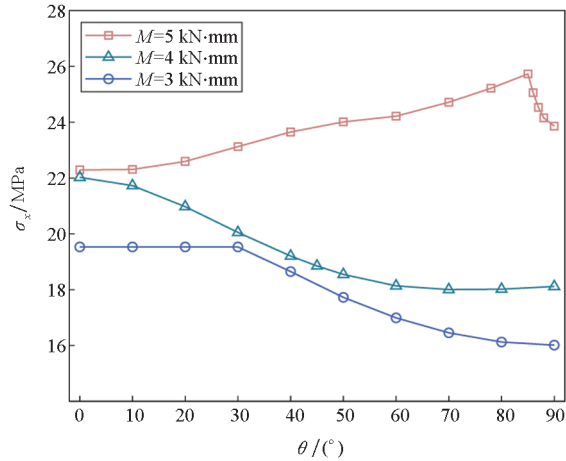
由图 3(b)可知,当  $M$  为  $3 \text{ kN} \cdot \text{mm}$  且  $\theta$  不超过  $30^\circ$  时, $\sigma_x$  几乎不受  $\theta$  的影响。在此条件下参考点处于弹性状态,由式(12)可知该状态下应力大小与纤维方向角无关。当参考点处于塑性状态时,参考点应力与纤维方向角的关系分两种情况:当  $M$  较小时, $\sigma_x$  随  $\theta$  增大而减小;当  $M$  较大时, $\sigma_x$  随  $\theta$  的增大而先增大后减小。塑性应力  $\sigma_x$  的解析表达式(26)可对上述变化做出解释。由式(26)可知,塑性应力  $\sigma_x$  与塑性各向异性参数  $N$  成反比而与等效塑性应变  $\epsilon_p$  成正比,又由  $N$  的表达式可知  $N$  随  $\theta$  的增大而增大,式(25)表明  $\epsilon_p$  与  $h$  成反比, $h$  随  $\theta$  的增大而减小。

由图 3(c)和图 3(d)可知,当  $M$  为  $3 \text{ kN} \cdot \text{mm}$  且  $\theta$  小于  $30^\circ$  时,参考点的位移随  $\theta$  增大而增大,注意在此情况下,参考点处于弹性状态。当参考点进入塑性状态后,不同弯矩作用下的位移随纤



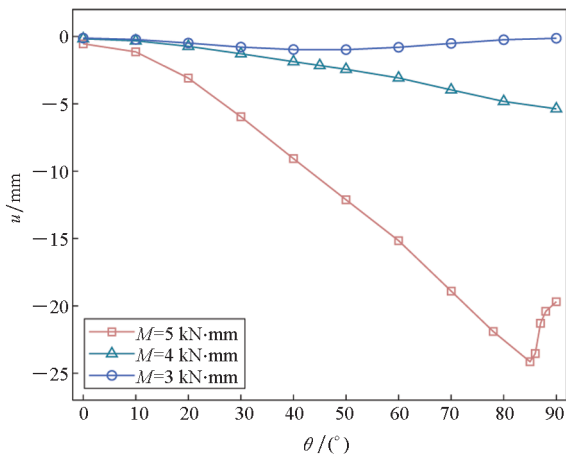
(a) 参数  $h$  随纤维方向角  $\theta$  的变化曲线

(a) Relation of parameter  $h$  and fiber orientation angle  $\theta$



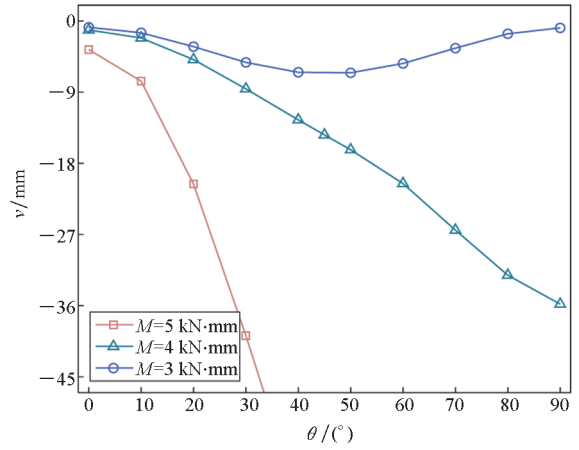
(b) 应力  $\sigma_x$  随纤维方向角  $\theta$  的变化曲线

(b) Relation of stress  $\sigma_x$  and fiber orientation angle  $\theta$



(c) 轴向位移  $u$  随纤维方向角  $\theta$  的变化曲线

(c) Relation of axial displacement  $u$  and fiber orientation angle  $\theta$



(d) 横向位移  $v$  随纤维方向角  $\theta$  的变化曲线

(d) Relation of transverse displacement  $v$  and fiber orientation angle  $\theta$

图 3 应力和位移随纤维方向角  $\theta$  的变化

Fig. 3 Variation of stress and displacement with respect to fiber orientation angle  $\theta$

维方向角的变化表现出不同的规律,位移解析式可对此做出合理解释。以轴向位移  $u$  为例,由式(28)可知,轴向位移  $u$  与弹塑性区域参数  $h$  成反比、与  $X_1$  成正比,结合式(18), $X_1$  与参数  $N$  成反比,由此可知轴向位移  $u$  与  $h$  和  $N$  的乘积成反比。下面结合图 3(c)中  $M$  为  $5 \text{ kN} \cdot \text{mm}$  的情况做进一步解释,由图可知  $u$  随  $\theta$  增大而先增大后减小,这是由于参数  $N$  与参数  $h$  的乘积随  $\theta$  增大而先减小后增大。横向位移  $v$  的分析也如此,在此不做过多赘述。

### 2.2.2 弯矩对悬臂梁弹塑应力和位移的影响

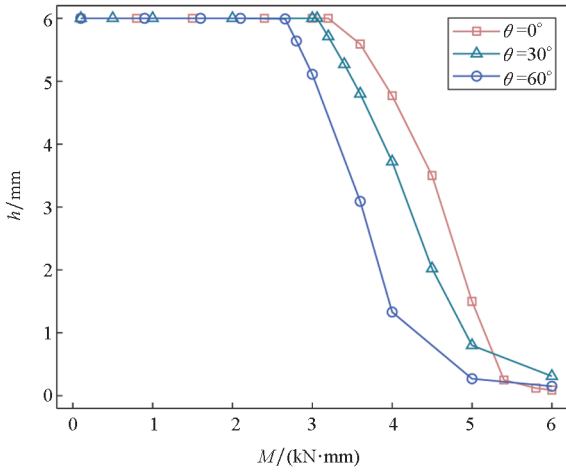
为进一步分析弯矩  $M$  和纤维方向角  $\theta$  对梁应力和位移的影响,在本算例中, $\theta$  分别为  $0^\circ$ 、 $30^\circ$  和  $60^\circ$ ,梁的其他几何参数和材料参数同 2.1 节。图 4 分别给出了在给定纤维方向角下,梁弹塑性区域参数  $h$ 、梁自由端下表面点应力  $\sigma_x$ 、轴向位移  $u$  和横向位移  $v$  与弯矩  $M$  之间的关系。

由图 4(a)可知, $h$  随着  $M$  的增大先保持不变后快速减小。当  $M$  较小时,梁并未出现屈服, $h$  大小始终为梁高的一半,随着  $M$  增大,梁上各点逐渐屈服,导致  $h$  显著减小。

由图 4(b)可知,在梁截面出现屈服前, $\sigma_x$  随着  $M$  增大而线性增大,在屈服后, $\sigma_x$  随着  $M$  先缓慢增大后快速增大。由式(26)可知, $\sigma_x$  与  $h$  成反比,当梁刚屈服时, $h$  值较大因而  $\sigma_x$  增加缓慢,随着  $M$  继续增大,梁截面塑性区域面积增加, $h$  显著减小,从而导致  $\sigma_x$  迅速增大。

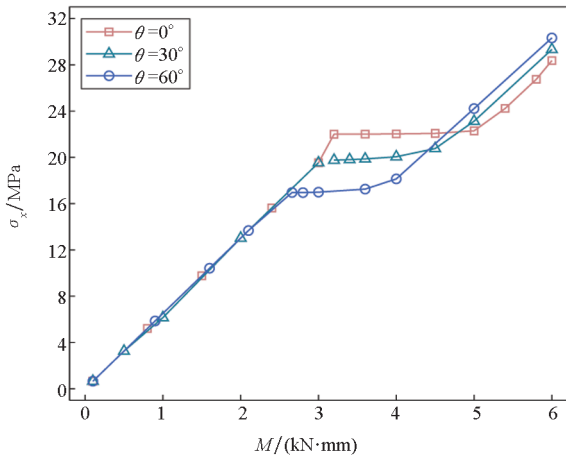
由图 4(c)和图 4(d)可知,当  $M$  较小时,参考

点处于弹性状态,此时位移随  $M$  增大而缓慢增大,当参考点屈服以后,其位移随着  $M$  增大而迅速增大。此外,从图中可以看出当  $\theta$  为  $60^\circ$  且  $M$  超过  $4 \text{ kN} \cdot \text{mm}$  时,参考点的位移尤其是横向位移  $v$  已经很大,此时已不满足小变形假设。



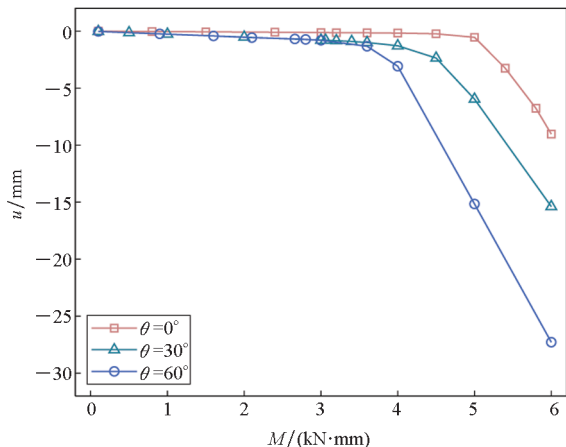
(a) 参数  $h$  随弯矩  $M$  的变化曲线

(a) Relation of parameter  $h$  and moment  $M$



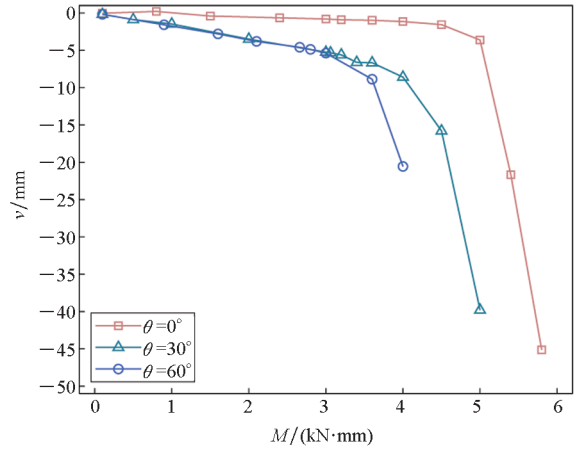
(b) 应力  $\sigma_x$  随弯矩  $M$  的变化曲线

(b) Relation of stress  $\sigma_x$  and moment  $M$



(c) 轴向位移  $u$  随弯矩  $M$  的变化曲线

(c) Relation of axial displacement  $u$  and moment  $M$



(d) 横向位移  $v$  随弯矩  $M$  的变化曲线

(d) Relation of transverse displacement  $v$  and moment  $M$

图 4 应力和位移随弯矩  $M$  的变化

Fig. 4 Variation of stress and displacement with respect to moment  $M$

### 2.2.3 跨高比对悬臂梁弹塑应力和位移的影响

在分析跨高比  $l/(2c)$  对梁应力和位移的影响时,用  $h/c$  表征弹性区域占整个截面面积的比例, $h/c$  的值越接近 1,说明梁截面弹性区域面积越大。图 5 分别给出了在不同载荷下  $h/c$  以及梁自由端下表面参考点的应力  $\sigma_x$ 、轴向位移  $u$ 、横向位移  $v$  与跨高比  $l/(2c)$  的关系。在本算例中,通过改变梁高度  $2c$  来改变梁跨高比,纤维方向角  $\theta$  固定为  $30^\circ$ ,梁其他几何参数和材料参数同 2.1 节。

由图 5(a)可知,随着跨高比  $l/(2c)$  增大, $h/c$  的值从 1 逐渐减小至 0,且跨高比  $l/(2c)$  大于 9 时,梁截面已完全进入塑性状态。这说明在梁长度一定的情况下,梁的高度越小,梁更易屈服。由图 5(b)可知,跨高比  $l/(2c)$  越大, $\sigma_x$  值越大,而且  $M$  越大, $\sigma_x$  随跨高比  $l/(2c)$  增加得越快。参考点的变形情况与跨高比  $l/(2c)$  的关系如图 5(c)和图 5(d)所示,无论是轴向位移还是横向位移,当跨高比  $l/(2c)$  较小时,其随跨高比  $l/(2c)$  的增加而增加缓慢,当跨高比  $l/(2c)$  较大时,其随跨高比  $l/(2c)$  的增加而增加迅速。由以上分析可知大跨高比梁结构偏柔,更易屈服。由图可以看到,当跨高比  $l/(2c)$  大于 8 时,参考点的变形量已超出小变形假定的范围。

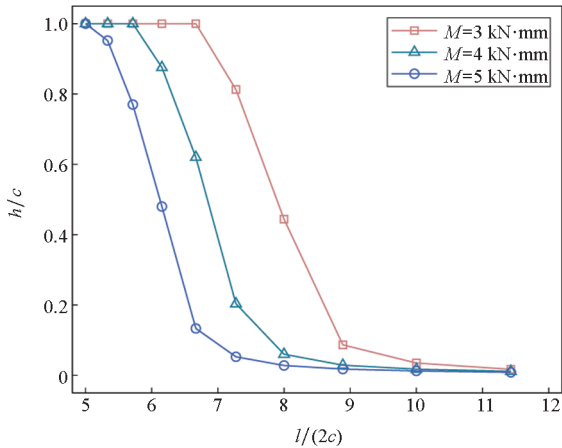
### 2.2.4 纤维体积分数对悬臂梁弹塑性区域分布和应力的影响

本小节分析纤维体积分数  $v_f$  对悬臂梁应力和弹塑性区域分布的影响。在本算例中悬臂梁材料为芳纶纤维增强聚丙烯复合材料,其力学参数



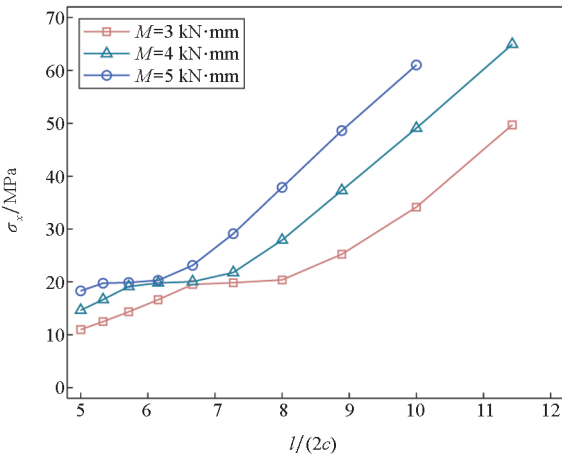
同文献[26]一致,详细如表3所示,梁其他几何参数和材料参数同2.1节,设置两种工况:①外载荷  $M=3\text{ kN}\cdot\text{mm}$ 、纤维方向角  $\theta=30^\circ$ ;②外载荷  $M=2\text{ kN}\cdot\text{mm}$ 、纤维方向角  $\theta=45^\circ$ 。图6给出了当  $v_f$  在10%至25%之间时,梁自由端下表面点应力  $\sigma_x$  和弹塑性区域参数  $h$  随其的变化曲线。

由图6(a)可知,  $v_f$  越大,  $\sigma_x$  越小。由表3可知,随着  $v_f$  增加,复合材料弹性力学性能均提高,相同弯矩作用下,  $\sigma_x$  越小。由图6(b)可知,随着  $v_f$  增加,两种工况下参数  $h$  均逐渐减小。当  $v_f=10\%$  时,  $h$  接近于6 mm,整个梁截面处于弹性状



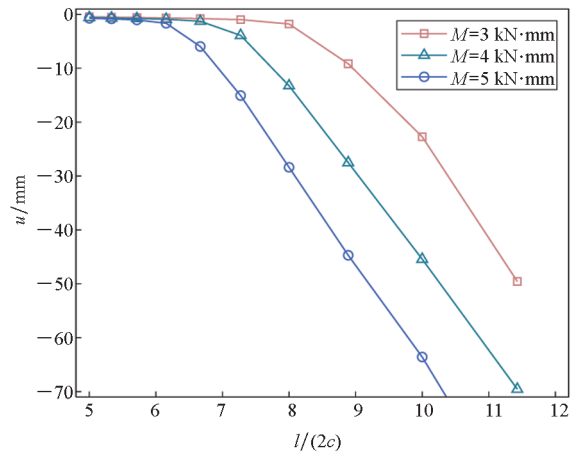
(a) 参数  $h/c$  随跨高比  $l/(2c)$  的变化曲线

(a) Relation of parameter  $h/c$  and aspect ratio  $l/(2c)$



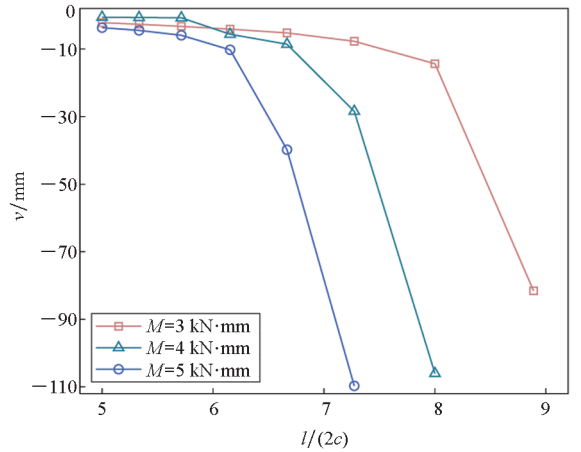
(b) 应力  $\sigma_x$  随跨高比  $l/(2c)$  的变化曲线

(b) Relation of stress  $\sigma_x$  and aspect ratio  $l/(2c)$



(c) 轴向位移  $u$  随跨高比  $l/(2c)$  的变化曲线

(c) Relation of axial displacement  $u$  and aspect ratio  $l/(2c)$



(d) 横向位移  $v$  随跨高比  $l/(2c)$  的变化曲线

(d) Relation of transverse displacement  $v$  and aspect ratio  $l/(2c)$

图5 应力和位移随跨高比  $l/(2c)$  的变化

Fig.5 Variation of stress and displacement with respect to aspect ratio  $l/(2c)$

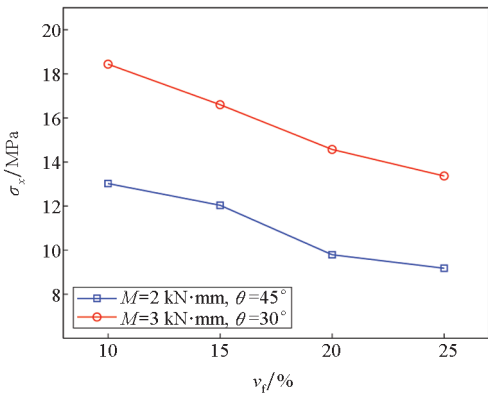
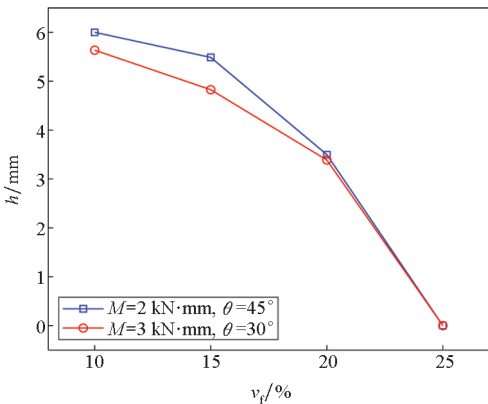
态;当  $v_f=25\%$  时,  $h$  接近于0,整个梁截面处于塑性状态。由表3可知,在塑性力学参数方面,随着  $v_f$  增加,纤维方向屈服强度增大,但垂直纤维方向以及面内剪切屈服强度显著降低。根据 Tsai-Hill 屈服准则,复合材料整体更易屈服,因此在相同弯矩作用下,纤维体积分数越大,梁截面塑性区域面积越大。

表3 芳纶纤维增强聚丙烯复合材料力学参数

Tab.3 Mechanical parameters of polypropylene composite reinforced with Twaron fibers

$v_f/\%$	$E_1/\text{MPa}$	$E_2/\text{MPa}$	$G_{12}/\text{MPa}$	$\mu_{12}$	$X/\text{MPa}$	$Y/\text{MPa}$	$S/\text{MPa}$
10	12 794.2	2 022.3	661.6	0.35	290.9	12.7	8.6
15	18 411.0	2 139.0	712.5	0.32	408.9	9.0	8.1
20	24 028.1	2 277.0	767.9	0.27	510.3	6.3	7.7
25	29 645.5	2 418.1	827.3	0.21	595.1	4.5	7.3



(a) 应力  $\sigma_x$  随纤维体积分数  $v_f$  的变化曲线(a) Relation of stress  $\sigma_x$  and fiber volume fraction  $v_f$ (b) 参数  $h$  随纤维体积分数  $v_f$  的变化曲线(b) Relation of parameter  $h$  and fiber volume fraction  $v_f$ 图 6 应力和参数  $h$  随纤维体积分数  $v_f$  的变化Fig. 6 Variation of stress and parameter  $h$  with respect to fiber volume fraction  $v_f$ 

### 3 结论

本文基于 Timoshenko 梁理论和 Tsai-Hill 屈服准则建立了弯矩作用下热塑性复合材料悬臂梁弹塑性分析模型,得到了应力和位移的解析解,并对梁截面弹塑性应力和变形的影响因素进行了分析,主要结论包括:

1) 在热塑性复合材料悬臂梁弹塑性特性分析中,基于 Timoshenko 梁理论得到的应力和位移精度更高。对于编织钢纤维增强热塑性复合材料,本文模型所得轴向位移和横向位移分别比 Euler-Bernoulli 梁理论提高了 1.81% 和 2.03%。

2) 纤维方向角  $\theta$  和弯矩  $M$  综合影响热塑性复合材料悬臂梁力学特性,当  $M$  较大时,截面最大应力和位移随着  $\theta$  增大而增大;当  $M$  较小时,截面最大应力随着  $\theta$  增大而减小,位移随着  $\theta$  增大而先增大后减小。

3) 跨高比  $l/(2c)$  显著影响热塑性复合材料悬臂梁弹塑性力学特性,在相同弯矩作用下,跨高

比  $l/(2c)$  越大,截面最大应力和位移越大,梁截面塑性区域面积相对越大,且当跨高比  $l/(2c)$  超过 9 时,热塑性复合材料悬臂梁已完全进入塑性状态。

4) 当单向纤维增强聚丙烯复合材料纤维体积分数由 10% 增加至 25% 时,悬臂梁由弹性状态进入完全塑性状态,且随着纤维体积分数增加,悬臂梁截面最大应力逐渐减小。

以上结论可为热塑性复合材料悬臂梁设计应用提供参考,在后续研究中,将进一步考虑热塑性复合材料拉压异性的力学特性建立相关结构的力学模型。

### 参考文献 (References)

- [1] 肖德凯, 张晓云, 孙安垣. 热塑性复合材料研究进展[J]. 山东化工, 2007(2): 15-21.  
XIAO D K, ZHANG X Y, SUN A Y. Advance of the research in thermoplastic composite materials[J]. Shandong Chemical Industry, 2007(2): 15-21. (in Chinese)
- [2] UDAY Vaidya, 李进松, 管佳明. 热塑性复合材料在航空航天中的应用[J]. 航空制造技术, 2015(14): 69-71.  
UDAY V, LI J S, GUAN J M. Thermoplastic composites for aerospace applications[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2015(14): 69-71. (in Chinese)
- [3] 吴海, 肖加余, 邢素丽, 等. 弯曲载荷作用下复合材料 T 型接头的失效分析[J]. 国防科技大学学报, 2016, 38(1): 56-62.  
WU H, XIAO J Y, XING S L, et al. Failure analysis of composite T-joints under bending load[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2016, 38(1): 56-62. (in Chinese)
- [4] 叶铁. 挖掘热塑性复合材料的潜力[J]. 玻璃纤维, 2018(2): 38-39.  
YE Y. Tap the potential of thermoplastic composites[J]. Fiber Glass, 2018(2): 38-39. (in Chinese)
- [5] YAO S S, JIN F L, RHEE K Y, et al. Recent advances in carbon-fiber-reinforced thermoplastic composites: a review[J]. Composites Part B: Engineering, 2018, 142: 241-250.
- [6] CHILALI A, ZOUARI W, ASSARAR M, et al. Analysis of the mechanical behaviour of flax and glass fabrics-reinforced thermoplastic and thermoset resins[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2016, 35(16): 1217-1232.
- [7] 郭书良, 段跃新, 肇研, 等. 连续玻璃纤维增强热塑/热固性复合材料力学性能研究[J]. 玻璃钢/复合材料, 2009(5): 42-45.  
GUO S L, DUAN Y X, ZHAO Y, et al. Research on mechanical properties of continuous glass fiber reinforced thermoplastic/thermosetting composite[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2009(5): 42-45. (in Chinese)
- [8] 杨桂通. 弹塑性力学引论[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.  
YANG G T. Introduction to elasticity and plasticity[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)
- [9] LEKHNITSKII S G, TSAI S W, CHERON T. Anisotropic plate[M]. New York: Gordon and Breach, 1968.

- [10] 黄德进,丁皓江,王惠明. 均布载荷作用下正交各向异性固支梁的解析解[J]. 浙江大学学报(工学版), 2006, 40(3): 511-514.  
HUANG D J, DING H J, WANG H M. Analytical solution for fixed-end orthotropic beams subjected to uniform load[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2006, 40(3): 511-514. (in Chinese)
- [11] 黄德进,丁皓江,王惠明. 均布载荷作用下正交各向异性一端固支一端简支梁的解析解[J]. 宁波大学学报(理工版), 2006, 19(1): 14-17.  
HUANG D J, DING H J, WANG H M. Analytical solution for orthotropic propped cantilever beam subjected to uniform load[J]. Journal of Ningbo University (Natural Science & Engineering Edition), 2006, 19(1): 14-17. (in Chinese)
- [12] 黄立新,李双蓓,周小军,等. 均布荷载作用下正交各向异性悬臂梁固端边界条件对位移的影响[J]. 玻璃钢/复合材料, 2007(4): 6-10.  
HUANG L X, LI S B, ZHOU X J, et al. Effects of boundary conditions at fixed-end on displacement of a uniformly loaded orthotropic cantilever beam [J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2007(4): 6-10. (in Chinese)
- [13] 黄立新,李双蓓,周小军,等. 基于ABAQUS的各向异性复合材料梁的分析研究[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2007, 32(2): 176-182.  
HUANG L X, LI S B, ZHOU X J, et al. A study of anisotropic beam based on ABAQUS[J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2007, 32(2): 176-182. (in Chinese)
- [14] KILIC O, AKTAS A, DIRIKOLU M H. An investigation of the effects of shear on the deflection of an orthotropic cantilever beam by the use of anisotropic elasticity theory[J]. Composites Science and Technology, 2001, 61(14): 2055-2061.
- [15] 张浪,李学武,夏建中. 一种获得各向异性平面梁在任意荷载作用下弹性解的新方法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(6): 630-642.  
ZHANG L, LI X W, XIA J Z. A novel method to obtain the elasticity solutions of anisotropic plane beam subjected to arbitrary loads [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(6): 630-642. (in Chinese)
- [16] AYKUL H, KAYA S M. An elastic-plastic and residual stress analysis steel reinforced thermoplastic composite cantilever beam[J]. Materials & Design, 2010, 31(7): 3474-3481.
- [17] ESENDEMİR Ü. An elastic-plastic stress analysis in a polymer matrix composite beam of arbitrary orientation supported from two ends under a transverse uniformly distributed load [J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2003, 22(9): 833-848.
- [18] ESENDEMİR Ü. An elastic-plastic stress analysis in a polymer matrix composite beam of arbitrary orientation supported from two ends acted upon with a force at the mid point[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2004, 23(6): 613-623.
- [19] SAYMAN O, AKSOY S, AYKUL H. An elastic/plastic solution for a thermoplastic composite cantilever beam loading by bending moment[J]. Composites Science and Technology, 2000, 60(14): 2739-2745.
- [20] KARAMANLI A. Flexure analysis of laminated composite and sandwich beams using Timoshenko beam theory[J]. Journal of Polytechnic, 2018, 21(3): 633-643.
- [21] BALDUZZI G, MORGANTI S, FÜSSL J, et al. Modeling the non-trivial behavior of anisotropic beams: a simple Timoshenko beam with enhanced stress recovery and constitutive relations[J]. Composite Structures, 2019, 229: 111265.
- [22] DOEVA O, MASJEDI P K, WEAVER P M. Static deflection of fully coupled composite Timoshenko beams: an exact analytical solution [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2020, 81: 103975.
- [23] HILL R. Mathematical theory of plasticity [M]. Oxford: Clarendon Press, 1950.
- [24] 张贵杰,夏亮亮,杨莉英,等. 屈服准则研究的新进展[J]. 铸造技术, 2017, 38(1): 20-23.  
ZHANG G J, XIA L L, YANG L Y, et al. New research progress of yield criterion [J]. Foundry Technology, 2017, 38(1): 20-23. (in Chinese)
- [25] 沈观林,胡更开. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.  
SHEN G L, HU G K. Mechanics of composite materials [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)
- [26] MENA-TUN J L, GONZALEZ-CHI P I, DÍAZ-DÍAZ A. Tensile properties of thermoplastic-laminated composites based on a polypropylene matrix reinforced with continuous Twaron fibers[J]. Advances in Polymer Technology, 2013, 32(S1): E749-E759.
- [27] 王秋美,李显波,吴敬欣,等. 双向向纬编织物热塑性单层板的拉伸性能[J]. 纺织学报, 2008, 29(2): 50-53.  
WANG Q M, LI X B, WU J X, et al. Tensile properties of biaxial weft knitted fabric reinforced PP lamina composites [J]. Journal of Textile Research, 2008, 29(2): 50-53. (in Chinese)
- [28] 薛祥义,陈甲元,李宏伟,等. TA1球面件拉深成形的各向异性效应[J]. 塑性工程学报, 2010, 17(2): 11-16.  
XUE X Y, CHEN J Y, LI H W, et al. Anisotropic effects on cold deep drawing of TA1 spherical part [J]. Journal of Plasticity Engineering, 2010, 17(2): 11-16. (in Chinese)