

# 无人机集群作战中连续时间 Markov 链模型的求解方法\*

黄树彩, 谢家豪, 韦道知, 张墨宇

(空军工程大学 防空反导学院, 陕西 西安 710051)

**摘要:** 针对无人机集群目标作战解析建模时在状态转移过程中计算速率低的问题, 提出了一种基于行压缩存储的四阶 Runge-Kutta 法。根据无人机集群作战样式将无人机集群作战过程划分为三个阶段, 并分阶段对无人机集群作战的状态转移过程建立连续时间 Markov 链模型。以无人机集群完成作战任务的可靠性作为求解指标, 运用四阶 Runge-Kutta 法对 Markov 模型进行求解。由于求解过程中速率转移矩阵具有稀疏特性, 采用基于行压缩存储的算法优化求解速率。仿真实验表明, 运用连续时间 Markov 理论建立的无人机集群作战过程模型的有效性和可行性优于其他模型。同时, 与其他算法及模型相比, 该算法计算速率更高、能更好地满足结果精度的可靠性需求, 进一步说明了本算法的优越性。

**关键词:** 无人机集群作战; 连续时间 Markov 链; 分阶段建模; 行压缩存储; 四阶 Runge-Kutta 法

中图分类号: TP732 文献标志码: A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1001-2486(2022)04-043-09



听语音  
与作者互动  
聊科研

## Solution to continuous time Markov chain model for unmanned aerial vehicle swarm operation

HUANG Shucui, XIE Jiahao, WEI Daozhi, ZHANG Zhaoyu

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of low computing speed in the process of state transition in the analytical modeling of UAV (unmanned aerial vehicle) swarm operation, a fourth-order Runge-Kutta method based on the row compressed storage was proposed. The UAV swarm operation process was divided into three stages according to the UAV swarm operation style, and continuous time Markov chain model was established for the state transition process of UAV swarm operation in stages. In the meantime, taking the reliability of UAV swarm to complete combat mission as the solving index, the fourth-order Runge-Kutta method was used to solve the Markov model, and the method based on row compressed storage was used to optimize the solving rate owing to the sparsity feature of the rate transfer matrix. Simulation results show that the established continuous time Markov chain model has better effectiveness and feasibility than other models. At the same time, compared with other algorithms, the proposed algorithm has higher computing speed and better reliability requirements to meet the accuracy of results, which further shows the superiority of it.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle swarm operation; continuous time Markov chain; phased modeling; row compressed storage; fourth-order Runge-Kutta method

近年来爆发的纳卡冲突表明无人机集群作战将在未来军事领域中对作战模式产生颠覆性变革, 同时也因其在未来战场具有协同探测、协同攻击、干扰压制等方面的巨大优势, 使其成为一支不可忽视的新质力量。

而当前国内外针对无人机集群作战过程的研究主要从框架建模、技术建模和数学解析建模三个层面展开。Giles<sup>[1]</sup>提出一种自上而下兼有条令与设计一体化的集成框架, 该框架下无人机集

群作战去中心化和扁平化, 同时也研究了指控架构。文献[2-5]主要针对无人机任务规划中的任务分配问题展开研究, 主要包括群智能算法、基于图论的任务分配方法、合同算法和拍卖算法等。文献[6-9]主要针对无人机任务规划中的航迹规划问题展开研究, 主要包括基于数学模型的规划方法, 如启发式算法、搜索法等, 还包括基于学习的规划方法<sup>[10-12]</sup>, 如基于先验知识学习方法和基于强化学习方法等。文献[13-15]主要针对

\* 收稿日期: 2021-12-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61703424)

作者简介: 黄树彩(1967—), 男, 湖北黄梅人, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: hsc\_67118@163.com;

谢家豪(通信作者), 男, 博士研究生, E-mail: 18222517021@163.com

载人作战飞机 (manned combat aircraft vehicle, MCAVs) 与无人作战飞机 (unmanned combat aircraft vehicle,UCAVs) 共同形成协同作战体系, 将该系统划分为任务级、集群级和系统级三个层次, 并建立相应的数学模型。为了求解这些模型, 提出量子人工蜂群算法 (quantum artificial bee colony algorithm, QABC)、两阶段贪婪策略 (two stage greedy strategy, TSGS) 等算法来验证所提算法的有效性和优越性。文献 [16 - 18] 利用概率论, 重点通过建模对无人机集群的作战效能进行分析, López 等 [19] 学者也对无人作战飞机在格斗作战中的效用进行研究, 使用基于代表性制导律和博弈论算法的自主决策方法来评估无人作战飞机在测向作战中的有效性。但是这些研究并未对无人机集群作战全过程进行建模分析, 同时也未考虑在 Markov 模型求解过程中速率矩阵的稀疏性问题。

为解决矩阵的稀疏性问题, 国内外的研究大多采用压缩存储的方法。常用的压缩存储方法 [20 - 22] 主要有行压缩存储、列压缩存储和行飞快存储等, 但是这些方法并未能够针对 Markov 模型特点进行研究。Markov 模型的常用求解方法 [21, 23 - 24] 有很多, 如常微分方程法、多项式法、矩阵分解法、Krylov 子空间方法, 但是这些方法大都不适用于稀疏矩阵的求解。Reibman 等 [25] 在研究排队系统时通过实验验证 Runge-Kutta、Liou 方

法和随机化三种方法可以求解状态数大于 600 时的 Markov 模型。Rauzy [26] 指出取合适参数的前向 Euler 方法适用于 Markov 模型的求解。上述方法虽然可以有效求解 Markov 模型, 但是对于大型稀疏矩阵, 仍存在存储量和计算量巨大的问题, 即需要寻求一种可以提高计算效率的算法。

针对求解 Markov 模型中存储量大、计算速率低的问题, 本文提出一种基于行压缩存储的四阶 Runge-Kutta 算法。分阶段建立无人机集群作战过程的连续时间马尔可夫链 (continuous time Markov chain, CTMC) 模型, 运用四阶 Runge-Kutta 法对 Markov 模型求解, 对于求解过程中速率转移矩阵的稀疏特性运用基于行压缩存储的算法优化求解速率, 进一步压缩存储空间、提高计算效率。

### 1 无人机集群作战流程设计

目前, 国内外对于无人机集群的概念尚未形成统一描述, 本文从无人机集群目标特性及其作战特点出发, 在参考国内外大量文献的基础上将无人机集群的概念定义为: 具有互联互通功能的多架无人机为执行某一作战任务, 按照一定的指挥控制规则, 彼此间协同配合达到作战目的的集合体。

无人机集群主要由运载平台、无人机及其载荷、运载指控终端和数据链终端四个部分组成, 如图 1 所示。

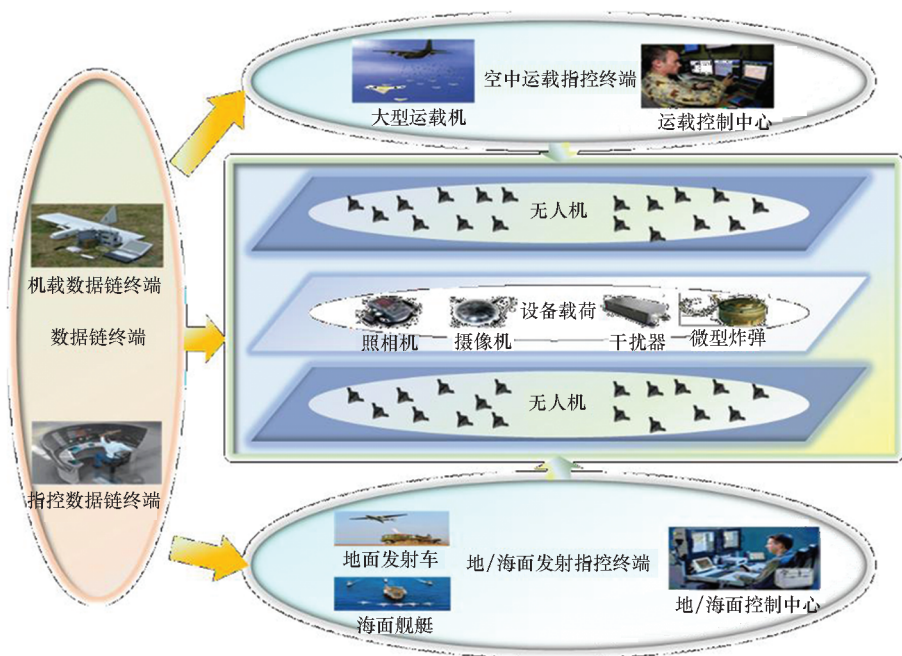


图 1 无人机集群组成

Fig. 1 Composition of UAV swarm

### 1.1 无人机集群作战样式

无人机集群作战是无人机集群概念在空天防御作战领域的具体表现形式,无人机集群作战的基础是“集”,关键是“群”,即通过网络聚能的方式发挥作战优势,进而提升战斗力。本文重点针对无人机集群空对地作战样式进行作战构想,在作战过程中主要执行以下几种任务:

1) 战场侦察。在复杂的战场环境中,以天基预警卫星、空基预警机和地基雷达获得的多维战场信息为基础,利用无人机集群自身的优势实现对敌方高价值目标的抵近式探测,实现对敌方目标位置的准确定位与跟踪,为后续的作战行动提供有力的数据支撑。

2) 通信干扰。无人机集群在执行作战任务过程中会携带电子干扰设备,通过发射不同频段的电磁波干扰地面雷达系统、通信系统等,破坏其通信链路造成敌方武器系统瘫痪,为我方作战力量提供有力保障。

3) 火力攻击。在充分掌握敌方武器部署及敌方目标的位置信息后,无人机集群目标将配合其他作战打击力量对敌方重要军事设施及目标进行火力打击。火力打击方式主要有自杀式攻击和无人载荷攻击两种。

图2给出了无人机集群作战样式。

### 1.2 无人机集群空对地作战流程

按照无人机集群的概念以及无人机集群空对地作战样式分析,本文将无人机集群空对地作战流程分为挂载飞行阶段、编队飞行阶段和分群攻击三个阶段。

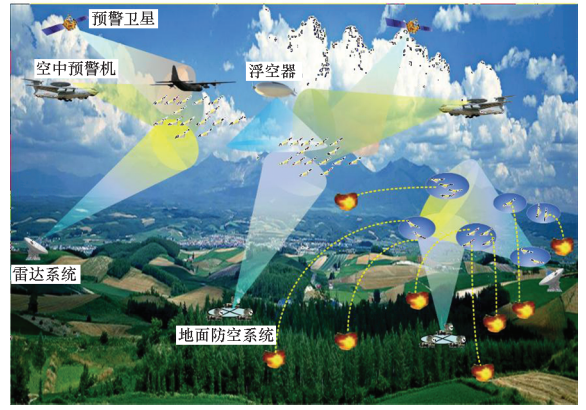


图2 无人机集群作战样式

Fig. 2 UAV swarm operation style

1) 挂载飞行阶段。挂载飞行阶段主要是指空中载机挂载无人机飞行的阶段。在这个阶段的主要任务是完成任务层面的工作。

2) 编队飞行阶段。编队飞行阶段主要是指空中载机到达指定位置释放无人机后,无人机集群按照一定的编队规则沿着起始规划的航路进行编队飞行的过程。在这个过程中要完成战场侦察任务和通信干扰任务。

3) 分群攻击阶段。分群攻击阶段主要是指无人机集群完成战场侦察和通信干扰任务后,我方指控中心对敌方武器配置即目标位置信息进行融合处理确认后,首先确认打击目标的区域,进行作战前的准备,主要对航路和任务参数进行调整,再次确认作战方式后执行分群攻击任务,完成对敌方目标的压制性和毁灭性打击。

不同阶段的作战流程如图3所示。

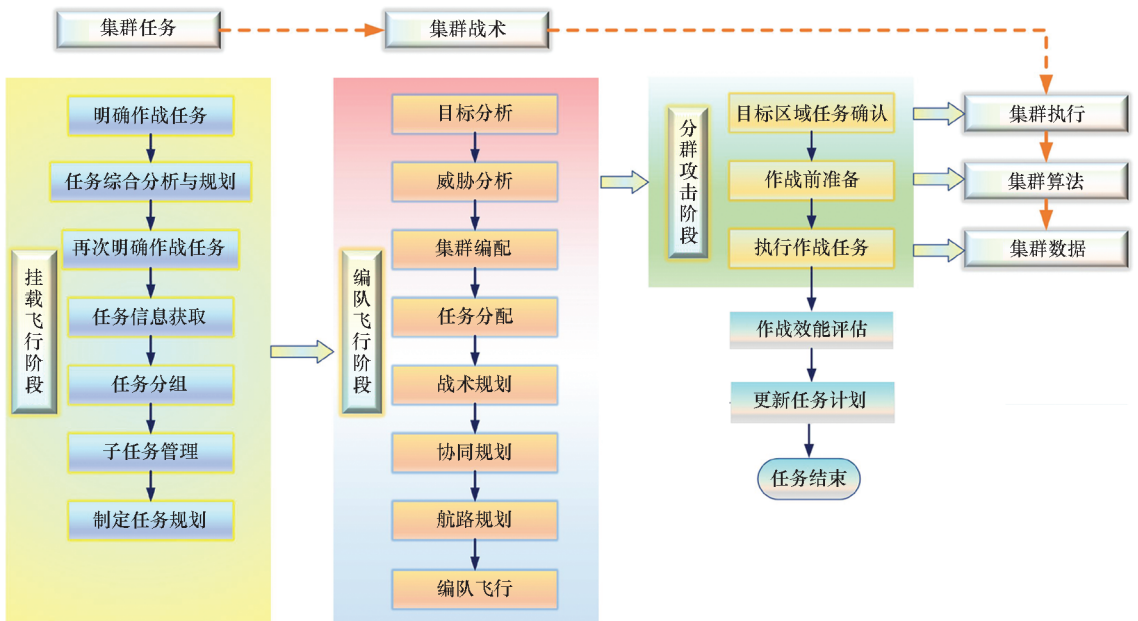


图3 无人机集群作战流程

Fig. 3 UAV swarm operation process

## 2 无人机集群作战过程建模

### 2.1 无人机集群空对地作战流程连续时间 Markov 链模型 (CTMC 模型)

本文研究无人机集群目标飞行作战过程模型时应做如下假设:

1) 假设每个飞行阶段之间相互独立。

2) 在挂载起飞阶段,主要任务是完成任务层面的工作;编队飞行阶段主要执行战场侦察任务和通信干扰任务;侦察和攻击模式主要集中在分群攻击阶段,即针对攻击目标有无价值采取攻击或侦察模式,且假设攻击时间和搜索时间服从指数分布。

3) 建模过程中不考虑作战环境的影响。

4) 建模过程中不考虑阶段转化的时间,即假设模型转换时间是瞬时的。

将无人集群目标飞行作战过程看作一个时齐的连续时间 Markov 链。

设在挂载飞行阶段  $k$ , 载机平台释放  $n$  架无人机,每架无人机有侦察或攻击两种状态,其状态向量为  $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_n]$ ,  $S_i = 1, 0$  分别表示第  $i$  架无人机处于攻击或不处于攻击状态,则系统共有  $|\mathbf{S}| = 2^n$  个状态。

假设离散状态空间为  $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  或  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\{X(t), t \in [0, +\infty)\}$  是离散状态空间  $E$  上的一个随机过程,若对任意自然数,任意  $n$  个时刻  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n (0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n)$  都有:

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) = i_n | X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}, \\ i_1, i_2, \dots, i_n \in E \end{aligned} \quad (1)$$

则称  $\{X(t), t \in [0, +\infty)\}$  为离散状态空间  $E$  上的连续时间 Markov 过程。当  $t, \Delta t \geq 0$  时,  $P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = P_{ij}(\Delta t)$ , 称其为时齐的连续时间 Markov 过程。 $P_{ij}(t)$  为在  $t$  时刻经  $\Delta t$  时间的概率转移函数,表示已知  $t$  时刻处于状态  $i$ ,  $t$  经时间  $\Delta t$  后变成状态  $j$  的概率。时齐的连续时间 Markov 过程中的转移概率函数仅和转移出发的状态  $i$ 、转移所经时间  $\Delta t$ 、转移达到的状态  $j$  有关,而与转移开始的时刻  $t$  无关。

由转移概率全体组成的矩阵成为转移矩阵,记为:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

根据条件概率的性质,可以得到转移概率函数如下性质:

$$1) 0 \leq P_{ij}(t) \leq 1, i, j = 1, 2, \dots$$

$$2) \sum_j P_{ij}(t) = 1, i, j = 1, 2, \dots$$

$$3) P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

4) Chapman-Kolmogorov 方程:

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_r P_{ir}(t) P_{rj}(\Delta t), i, j = 1, 2, \dots$$

Chapman-Kolmogorov 方程的含义为:若经过  $t + \Delta t$  时间状态由  $i$  到达状态  $j$ ,则必须先经  $t$  时间状态由  $i$  到达状态  $r$ ,再经过  $\Delta t$  时间由状态  $r$  到达状态  $j$ 。

对于连续时间 Markov 过程,由于其时间是连续的,所以情况变化之间的时间周期遵循指数分布。同时情况完全可以由它所处的状态来描述,每个状态都可以转换到另一个可行状态。下一个状态的选择是“指数竞赛”的结果,也就是说下一个状态是由最先发生的事件决定的,而下一个事件发生的时间遵循指数分布。

定义  $q_{ij}$  为 Markov 过程的速率函数,表达式如下:

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} \quad (2)$$

Markov 过程的速率矩阵为矩阵  $\mathbf{Q}$ ,记为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

设随机连续状态有限 Markov 过程的转移概率函数为  $P_{ij}(t)$ ,速率函数为  $q_{ij}$ ,则

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{r=0}^n P_{ir}(t) q_{rj}, i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

记矩阵  $\mathbf{P} = \{P_{ij}(t)\}$ ,则 Kolmogorov 方程可记为:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{Q}_{2^n \times 2^n} \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Kolmogorov 是关于  $\mathbf{P}(t)$  的线性微分方程组,即 CTMC 模型的求解为常微分方程组初值问题的求解。

设飞行初始时间为 0,则 CTMC 模型的解为:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \exp(\mathbf{Q}_{2^n \times 2^n} t) \quad (5)$$

### 2.2 基于 CTMC 模型的无人机集群作战过程建模

基于 CTMC 模型的无人机集群作战过程建模的主要思路是在无人机集群飞行作战过程的每一

个任务阶段分别建立各自的 Markov 模型,然后从初始阶段开始,逐阶段求出该 Markov 模型的解。建模过程如下:

1) 将多阶段系统分解为若干独立的单阶段系统。将无人机集群执行作战任务的时间段记为  $[T_0, T_n]$ , 将该时间段划分为三个时间段, 在每个时间段内,  $t_{nstart}, t_{nend}$  分别表示阶段  $n$  的开始时间和结束时间, 由假设条件可知, 不考虑转移时间, 则  $t_{1end} = t_{2start}, t_{2end} = t_{3start}$ , 从任务初始时刻  $T_0$  开始, 逐个阶段求解 Markov 模型中的状态概率向量  $P(t)$ , 将前一个状态的终止状态作为下一个状态的起始状态, 即有:

$$P(t_{1end}) = P(t_{2start}) \quad (6)$$

$$P(t_{2end}) = P(t_{3start}) \quad (7)$$

2) 建立各个单阶段系统的 Markov 模型。

飞行阶段 I:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1(t) = P_1(t)Q_{1,2^n \times 2^n} \\ P_1(0) = P_0 \end{cases} \quad (8)$$

飞行阶段 II:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_2(t) = P_2(t)Q_{2,2^n \times 2^n} \\ P_2(0) = P_1 \end{cases} \quad (9)$$

飞行阶段 III:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_3(t) = P_3(t)Q_{3,2^n \times 2^n} \\ P_3(0) = P_2 \end{cases} \quad (10)$$

3) 将上一阶段的最终状态转移率作为下一阶段的最初状态转移率处理阶段间的依赖性, 从而使各个单阶段的运行时间扩展至整个运行时间, 计算作战任务完成的可靠度。

对于每个阶段的 Markov 模型, 状态空间  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  被分为不攻击状态集  $\Omega_{na}$  和攻击状态集  $\Omega_a$ , 定义如下变量:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \in \Omega_a \\ 0, & X(t) \in \Omega_{na} \end{cases} \quad (11)$$

则在每个阶段结束作战任务完成的可靠性为:

$$P_{\text{success}}(t) = \Pr\{I(u) = 1, \forall u \in [0, t]\} \quad (12)$$

无人机集群作战建模过程如图 4 所示。

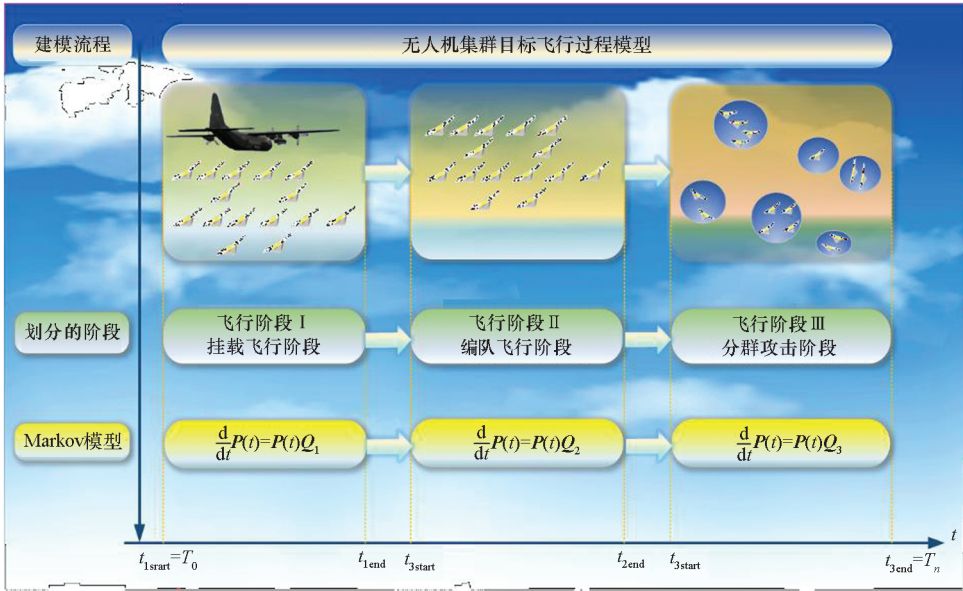


图 4 无人机集群作战过程模型

Fig. 4 UAV swarm operation process model

### 3 模型求解

由理论分析可知, 连续时间 Markov 链模型的数值求解过程中目前常用的解析求解方法存在求解效率低的情况, 本文拟考虑采用四阶 Runge-Kutta 数值方法求解模型。

经典四阶 Runge-Kutta 法计算公式如下:

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \\ K_1 = F(t_n, Y_n) \\ K_2 = F(t_n + h/2, Y_n + hK_1/2) \\ K_3 = F(t_n + h/2, Y_n + hK_2/2) \\ K_4 = F(t_n + h, Y_n + hK_3) \end{cases} \quad (13)$$

针对连续时间 Markov 模型, 将函数的绝对值换成函数向量范数, 四阶 Runge-Kutta 法计算公式

如下:

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + h \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \\ K_1 = h \cdot P_n Q \\ K_2 = h \cdot (P_n + K_1/2) Q \\ K_3 = h \cdot (P_n + K_2/2) Q \\ K_4 = h \cdot (P_n + K_3) Q \end{cases} \quad (14)$$

式中,矩阵  $Q_{2^n \times 2^n}$  为 Markov 过程的速率矩阵,  $P_n$  为状态概率向量,  $h$  为步长,  $K_1, K_2, K_3, K_4$  为行向量。四阶截断误差为  $O(h^5)$ 。四阶 Runge-Kutta 法在求解连续时间 Markov 模型的解的过程中将解析方法求解中矩阵的幂运算转化为矩阵与向量乘积的运算,具有高精度、良好的收敛速度、稳定性和计算步骤的可变性。

四阶 Runge-Kutta 法算法伪代码如算法 1 所示。

**算法 1 四阶 Runge-Kutta 法算法伪代码**

Alg. 1 Fourth order Runge-Kutta algorithm pseudo code

```

Select  $P_0$ 
 $P \leftarrow P_0$ 
 $t \leftarrow 0$ 
While  $t < T$ 
Select  $dt$ 
 $K_1 \leftarrow dt \cdot Q \cdot P$ 
 $K_2 \leftarrow dt \cdot Q \cdot (P + K_1/2)$ 
 $K_3 \leftarrow dt \cdot Q \cdot (P + K_2/2)$ 
 $K_4 \leftarrow dt \cdot Q \cdot (P + K_3)$ 
 $P \leftarrow P + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ 
 $t \leftarrow t + dt$ 

```

从算法 1 伪代码中可以看出,Runge-Kutta 法计算过程中需要存储四个长度为  $N$  的一维数组,且该算法计算过程总耗时为  $O(N^2qt)$ 。Runge-Kutta 算法是对微分方程的数值解法,该方法的思想是在积分区间内进行插值,优化总的斜率得到更新结果。因此,其精度应高于直接积分。Runge-Kutta 算法的阶数越高,即插入点数越多,计算结果越精确,相应的算法复杂度也越高。四阶 Runge-Kutta 算法的精度已经能满足大多数精度要求,并且计算复杂度也适宜多数处理器的性能。在利用四阶 Runge-Kutta 法求模型数值解的过程中,核心问题是对算法中的向量乘法矩阵  $P_n Q_{2^n \times 2^n}$  进行处理,而速率矩阵  $Q_{2^n \times 2^n}$  中大部分元素为零,非零元素所占比例非常小的大型稀疏矩阵,对这种矩阵的求解需要占据大量的内存空间和计算时间。

由于速率矩阵的稀疏特性,同时在矩阵中非零元素较为分散,为获得较好的压缩效果和求解质量,本文采用基于行压缩存储(compressed row

storage, CRS) 的四阶 Runge-Kutta 法在求解得到的预处理结果的基础上继续优化求解效率得到模型的数值解。

行压缩存储策略主要是使用 Value、Colind 和 Rowptr 三个数组对稀疏矩阵进存储。

1) Value 数组:用于逐行存储矩阵的非零元素的值。

2) Colind 数组:用于存储矩阵的非零元素列的索引值。

3) Rowptr 数组:用于存储 Value 数组中每一行第一个非零元素列的索引值。

CRS 中 Value 数组中的元素数据类型为 double,由于在该数组中存储非零元素,故其数组长度为  $nnz$ ,存储空间大小为  $8nnz$ ;同理分析可知 Colind 数组长度为  $nnz$ ,由于数组中数据类型为 integer,其存储空间大小为  $4nnz$ ;Rowptr 数组长度为  $m + 1$ ,存储空间为  $4(m + 1)$ ,由以上分析可以得到 CRS 策略的存储空间为  $8nnz + 4(nnz + m + 1)$ 。

本文定义压缩率  $CR$  来更好地分析不同存储方案的压缩效果,计算公式如下:

$$CR = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \times 100\% \quad (15)$$

其中,  $Q_1$  为稀疏矩阵中的元素个数,  $Q_2$  为稀疏矩阵中存储的元素个数。

基于 CRS 的四阶 Runge-Kutta 算法的求解过程如图 5 所示。

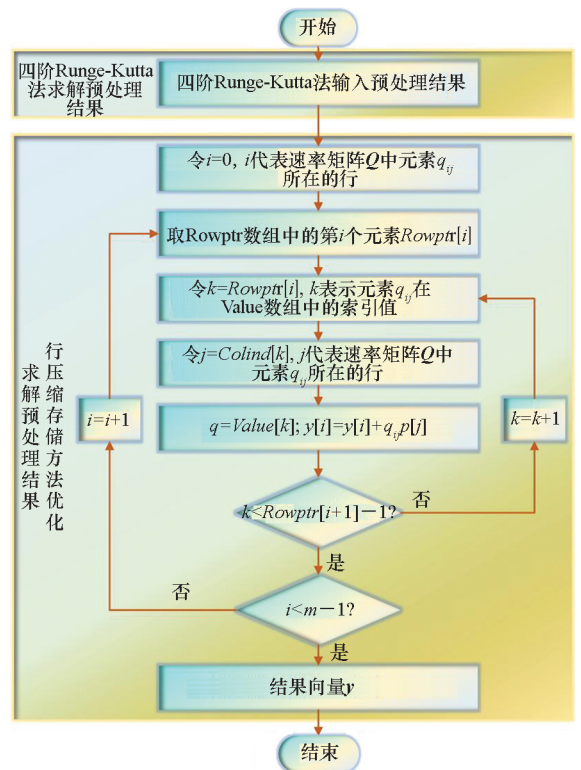


图 5 算法流程

Fig. 5 Flow chart of the algorithm

## 4 仿真验证

本文假定载机平台中的空中运载机一次性释放 15 架无人机遂行后续无人机集群作战任务,同时无人机集群作战各个阶段时间分别为  $t_1 = 10 \text{ min}$ ,  $t_2 = 20 \text{ min}$ ,  $t_3 = 30 \text{ min}$ 。

### 4.1 不同模型对无人机集群完成作战任务可靠性的影响

为验证本文所提模型的有效性,采取本文算法与参考文献[13,15,17]所采用模型进行对比,仿真结果如图6所示。

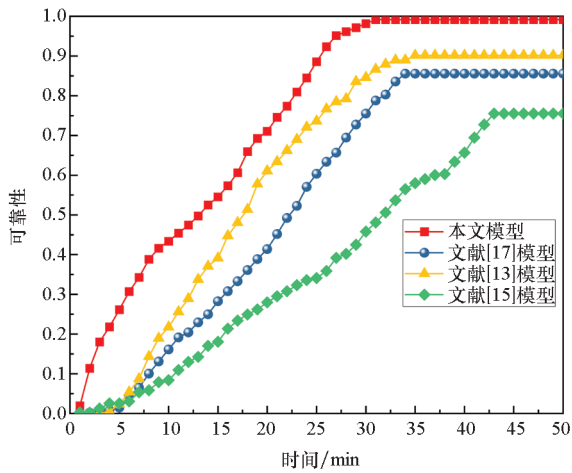


图6 不同模型下的无人机集群完成作战任务可靠性

Fig.6 Reliability of UAV swarm completing combat mission under different models

从图6中可以看出,采用本文模型得到的无

人机集群完成任务的可靠性为 0.991 518 574 339 88 7,采用文献[13,15,17]模型得到的无人机集群完成任务的可靠性分别为 0.901 826 413 752 31、0.755 231 275 664 302 和 0.855 567 893 297 587。从结果中可以看出,采用本文模型无人机集群完成任务的可靠性更高,同时也可以看出,本文模型下的曲线收敛速度和完成任务的时间均优于其他模型。

### 4.2 无人机集群完成作战任务可靠性求解

本文使用基于 CRS 的四阶 Runge-Kutta 算法对各阶段的 Markov 模型逐一求解,求解到最后一个阶段的可靠性即无人机集群完成作战任务可靠性。

#### 4.2.1 本文算法求解完成作战任务可靠性

取步长为 0.1、0.01、0.001、0.000 1 时采用本文算法得到的无人机集群完成作战任务可靠性分别为 0.999 985 963 215 25、0.999 985 975 256 13、0.999 985 975 256 32、0.999 985 975 256 78。可以看出,4 个步长均能完成作战任务,可靠性均收敛到小数点后十二位,即完成作战任务的可靠性为 0.999 985 975 256。

#### 4.2.2 不同数值算法对求解结果的影响

为验证不同数值求解方法对无人机集群完成作战任务可靠性的解的特点,表1给出了不同步长下采用本文四阶 Runge-Kutta 算法与 Euler 法<sup>[27]</sup>、三阶 Runge-Kutta 法<sup>[28-29]</sup>和多步法<sup>[30]</sup>进行对比实验。

表1 不同数值算法对求解结果的影响

Tab.1 Influence of different numerical algorithms on solution results

算法	步长 0.1		步长 0.01		步长 0.001		步长 0.000 1	
	可靠性	运行时间/s	可靠性	运行时间/s	可靠性	运行时间/s	可靠性	运行时间/s
Euler 法	0.999 985 963 215 25	5 248.631	0.999 985 975 256 13	7 523.102	0.999 985 975 256 32	59 991.639	0.999 985 975 256 78	66 981.720
三阶 Runge-Kutta 法	0.999 985 963 215 25	4 589.654	0.999 985 975 256 13	7 021.001	0.999 985 975 256 32	56 214.010	0.999 985 975 256 78	62 148.026
多步法	0.999 985 963 215 25	4 256.178	0.999 985 975 256 13	6 851.025	0.999 985 975 256 32	54 258.121	0.999 985 975 256 78	58 996.021
本文算法	0.999 985 963 215 25	3 058.214	0.999 985 975 256 13	5 654.257	0.999 985 975 256 32	49 853.148	0.999 985 975 256 78	51 174.526

从表1中可以看出,采用数值方法求解模型时不影响四阶 Runge-Kutta 预处理的结果精度,但是针对预处理结果是否通过存储空间压缩,会影响后续行压缩存储算法的运行速率,进而影响算法运行时间。同时从表1中也可以看出,针对不同数值求解算法求解预处理结果的运行时间来看,四阶 Runge-Kutta 算法运行时间最短,其次是多步法、三阶算法和 Euler 法。

### 4.3 不同压缩策略的压缩效果分析

图7给出了采用行分块压缩<sup>[21]</sup>、列压缩策略<sup>[21]</sup>和本文基于行压缩存储策略的存储空间对比图。

从图7中可以看出,采用行压缩策略的存储空间为 5 021,行分块压缩存储空间为 5 876,采用列压缩存储空间最大,同时也可以得到采用行压缩策略的压缩率,即空间占有率低、储存效率高,

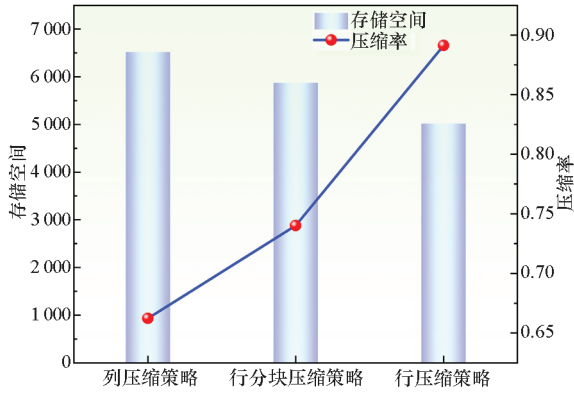


图 7 不同存储策略下的存储空间与压缩率对比图

Fig. 7 Comparison of storage space and compressed rate under different storage strategies

相比可以得到采用列压缩空间效率最低、压缩率较低。采用行压缩策略空间效率高的原因是由速率矩阵  $Q$  决定的,速率矩阵  $Q$  中的非零元素并不连续成块,而且非零元素块的长度也不一致,采用其他压缩策略需要更多的辅助数组,导致储存量大、压缩率低、矩阵运算复杂。

#### 4.4 不同压缩策略对算法时间的影响

表 2 给出了未压缩和本文基于行压缩存储的四阶 Runge-Kutta 算法在步长为 0.1, 0.01, 0.001 和 0.0001 时的算法运行时间对比。

表 2 不同压缩算法对算法时间的影响

Tab. 2 Influence of different storage space compression on algorithm time

步长	算法运行时间/s			
	未压缩 存储	列压缩 存储	行分块 压缩存储	行压缩 存储
0.1	3 058.214	8.226 0	5.281 1	3.525 8
0.01	5 654.257	11.125 1	8.996 2	5.962 4
0.001	49 853.148	113.258 0	83.215 4	51.185 2
0.0001	51 174.526	100.124 0	801.787 0	502.692 0

由表 2 结果可知,在采用四阶 Runge-Kutta 算法求解出模型的预处理结果后,不采用储存空间压缩算法运行的时间在相同步长的情况下约为采用行压缩存储算法运行时间的 1 000 倍,主要原因为速率矩阵  $Q_{215 \times 215}$  为大型稀疏矩阵,其中的零元素占据大部分空间导致算法运行效率低。采用行压缩策略算法的运行时间短于采用其他压缩策略算法的运行时间。

## 5 结论

本文针对无人机集群作战的连续时间 Markov

链模型求解问题,主要工作及创新点如下:

1)在设计作战背景和作战流程的基础上将无人机集群作战过程划分为三个阶段,并分阶段对无人机集群作战的状态转移过程建立 CTMC 模型,并通过对比实验验证本文模型的有效性和可行性。

2)提出基于行压缩存储四阶 Runge-Kutta 算法求解 Markov 模型,将解析方法求解中的矩阵的幂运算转化为矩阵与向量乘积的运算,得到预处理,并针对预处理得到矩阵的稀疏特性,采取行压缩存储的方法,提高算法求解效率。

3)为验证不同数值求解方法对无人机集群完成作战任务可靠性的解的特点,将本文算法与 Euler 法、三阶 Runge-Kutta 法和多步法进行对比实验。仿真实验表明,无人机集群完成作战任务的可靠性选定步长之后不随求解方法变化而变化。

4)为验证不同压缩测率的压缩效果以及对算法时间的影响,将不同储存压缩策略和本文算法在不同步长情况下算法运行时间进行对比实验。仿真实验表明,不采用储存空间压缩算法运行的时间在相同步长的情况下约为采用行压缩存储算法运行时间的 1 000 倍。同时采用行压缩策略的压缩率,即空间占有率低,储存效率高。

综上所述,基于行压缩存储四阶 Runge-Kutta 算法能够较好地解决无人机集群目标作战解析建模时在状态转移过程中存在计算速率低的问题。

## 参考文献 (References)

- [1] GILES K. A framework for integrating the development of swarm unmanned aerial system doctrine and design [R]. Monterey: Naval Postgraduate School, 2017.
- [2] CHANDLER P R, SWAROOP D, HOWLETT J K, et al. Complexity in UAV cooperative control [R]. Ohio: Wright-Patterson Air Force Base, 2004.
- [3] 廖承城, 陶伟, 刘韬. 基于改进合同网的异构无人机协同对地任务分配[J]. 现代计算机, 2021(15): 100-107. LIAO C C, TAO W, LIU T. Collaborative task assignment of heterogeneous UAV based on improved contract network[J]. Modern Computer, 2021(15): 100-107. (in Chinese)
- [4] 张瑞鹏, 冯彦翔, 杨宜康. 多无人机协同任务分配混合粒子群算法[J/OL]. 航空学报. [2021-10-26]. <http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/10.7527/S1000-6893>. ZHANG R P, FENG Y X, YANG Y K. Hybrid particle swarm algorithm for multi-UAV cooperative task allocation[J/OL]. Acta Aeronautica Astronautica Sinica. [2021-10-26]. <http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/10.7527/S1000-6893>. (in Chinese)
- [5] 谷旭平, 唐大全. 基于细菌觅食算法的多异构无人机任务规划[J]. 系统工程与电子技术, 2021, 43(11): 3312-3320. GU X P, TANG D Q. Multi-heterogeneous UAV task planning based on bacterial foraging algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2021, 43(11): 3312-3320. (in Chinese)



- [6] 赵畅, 刘允刚, 陈琳, 等. 面向元启发式算法的多无人机路径规划现状与展望[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1102 - 1115.  
ZHAO C, LIU Y G, CHEN L, et al. Research and development trend of multi-UAV path planning based on metaheuristic algorithm[J]. Control and Decision, 2022, 37(5): 1102 - 1115. (in Chinese)
- [7] 张富震, 朱耀琴. 复杂环境中多无人机协同侦察的任务分配方法[J/OL]. 系统仿真学报. [2021 - 10 - 26]. <https://doi.org/10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0552>.  
ZHANG F Z, ZHU Y Q. Task allocation method for multi-UAV cooperative reconnaissance in complex environment[J/OL]. Journal of System Simulation. [2021 - 10 - 26]. <https://doi.org/10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0552>. (in Chinese)
- [8] 邹立岩, 张明智, 柏俊汝, 等. 无人机集群作战建模与仿真研究综述[J]. 战术导弹技术, 2021(3): 98 - 108.  
ZOU L Y, ZHANG M Z, BAI J R, et al. A survey of modeling and simulation of UAS swarm operation[J]. Tactical Missile Technology, 2021(3): 98 - 108. (in Chinese)
- [9] JIN Y D, FENG J B, ZHANG W J. UAV task allocation for hierarchical multiobjective optimization in complex conditions using modified NSGA-III with segmented encoding [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2021, 26(4): 431 - 445.
- [10] 王泊涵, 吴婷钰, 李文浩, 等. 基于多智能体强化学习的大规模无人机集群对抗[J]. 系统仿真学报, 2021, 33(8): 1739 - 1753.  
WANG B H, WU T Y, LI W H, et al. Large-scale UAVs confrontation based on multi-agent reinforcement learning[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(8): 1739 - 1753. (in Chinese)
- [11] FU X W, WANG H, LI B, et al. An efficient sampling-based algorithms using active learning and manifold learning for multiple unmanned aerial vehicle task allocation under uncertainty [J]. Sensors (Basel, Switzerland), 2018, 18: 2645.
- [12] LUO H, LIANG Z Z, ZHU M N, et al. Integrated optimization of unmanned aerial vehicle task allocation and path planning under steady wind [J]. PLoS One, 2018, 13(3): e0194690.
- [13] ZHONG Y, YAO P Y, ZHANG J Y, et al. Formation and adjustment of manned/unmanned combat aerial vehicle cooperative engagement system [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2018, 29(4): 756 - 767.
- [14] JIAO Z Q, YAO P Y, ZHANG J Y, et al. MAV/UAV task coalition phased-formation method [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2019, 30(2): 402 - 414.
- [15] ZHONG Y, YAO P Y, WAN L J, et al. Intervention decision-making in MAV/UAV cooperative engagement based on human factors engineering [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2018, 29(3): 530 - 538.
- [16] KRESS M, BAGGESEN A, GOFER E. Probability modeling of autonomous unmanned combat aerial vehicles (UCAVs)[J]. Military Operations Research, 2006, 11(4): 5 - 24.
- [17] PAPAPOPOULOS T. Probability modeling of multi-type autonomous unmanned combat aerial vehicles engaging non-homogeneous targets under imperfect information [D]. Monterey: Naval Postgraduate School, 2007.
- [18] GAERTNER U. UAV swarm tactics: an agent-based simulation and Markov process analysis[D]. Monterey: Naval Postgraduate School, 2013.
- [19] LÓPEZ R N, ZBIKOWSKI R. Effectiveness of autonomous decision making for unmanned combat aerial vehicles in dogfight engagements[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(4): 1021 - 1024.
- [20] 纪国良, 丁勇, 周曼, 等. 工程计算中大型稀疏矩阵存储方法研究[J]. 数值计算与计算机应用, 2018, 39(3): 217 - 230.  
JI G L, DING Y, ZHOU M, et al. Research on the storage method of large-scale sparse matrix in engineering calculation[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2018, 39(3): 217 - 230. (in Chinese)
- [21] 闫华, 高黎, 王魁, 等. 大规模多阶段任务系统马尔可夫可靠性模型的存储和计算[J]. 兵工学报, 2016, 37(9): 1715 - 1720.  
YAN H, GAO L, WANG K, et al. Storage and computation of Markov reliability model for large-scale phased-mission system [J]. Acta Armamentarii, 2016, 37(9): 1715 - 1720. (in Chinese)
- [22] 许彬彬, 戴清平, 朱敏, 等. 基于哈夫曼编码的稀疏矩阵的存储与计算[J]. 计算机工程与科学, 2013, 35(11): 134 - 138.  
XU B B, DAI Q P, ZHU M, et al. Storage and computation of sparse matrix based on Huffman coding [J]. Computer Engineering & Science, 2013, 35(11): 134 - 138. (in Chinese)
- [23] 张文丽, 贾对红. 一类二阶变系数常微分方程两点边值问题的格林函数的构造[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2021, 30(2): 19 - 22, 82.  
ZHANG W L, JIA D H. Construction of Green's function for boundary value problems of second order variable coefficient ordinary differential equations [J]. Journal of Minzu University of China (Natural Sciences Edition), 2021, 30(2): 19 - 22, 82. (in Chinese)
- [24] KAI Y, CHEN S Q, ZHENG B L, et al. Qualitative and quantitative analysis of nonlinear dynamics by the complete discrimination system for polynomial method [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 141: 110314.
- [25] REIBMAN A, TRIVEDI K. Numerical transient analysis of Markov models [J]. Computers & Operations Research, 1988, 15(1): 19 - 36.
- [26] RAUZY A. An experimental study on iterative methods to compute transient solutions of large Markov models [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 86(1): 105 - 115.
- [27] WORKIE A H. Small modification on modified Euler method for solving initial value problems[J]. Abstract and Applied Analysis, 2021, 2021: 9951815.
- [28] MATSUDA T, MIYATAKE Y. Generalization of partitioned Runge-Kutta methods for adjoint systems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 388: 113308.
- [29] NARANJO-NODA F S, JIMENEZ J C. Locally linearized Runge-Kutta method of dormand and prince for large systems of initial value problems [J]. Journal of Computational Physics, 2021, 426: 109946.
- [30] DOMINIC R, YUSUF S, LYDIA A. Four-step one hybrid block methods for solution of fourth derivative ordinary differential equations[J]. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 2021, 36(3): 1 - 10.