

# 非对称 Colonel Blotto 博弈模型下的多信道功率分配抗干扰\*

魏鹏<sup>1,2</sup>, 王世练<sup>2</sup>, 陆锐敏<sup>1</sup>, 骆俊杉<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学第六十三研究所, 江苏南京 210007; 2. 国防科技大学电子科学学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:**针对智能干扰条件下传输速率固定的通信系统多信道功率分配问题,建立了非对称 Colonel Blotto 博弈模型。在完全信息条件下,推导出了各种功率预算约束下通信方和干扰方的等效单信道最优功率分配策略,进而证明了通信方和干扰方存在唯一混合纳什均衡策略,并求得了纳什均衡收益。基于等效单信道最优功率分布,提出了一种多重扫描直接列元素交换算法,可以快速构建多信道混合功率分配矩阵,且相比于线性规划方法,可适应更多的信道数和更广的功率分布范围。通过数值仿真,验证了所提多信道混合功率分配矩阵构造算法的有效性 & 多信道功率分配策略的最优性。

**关键词:**非对称 Colonel Blotto 博弈; 抗干扰; 多信道功率分配; 混合策略; 纳什均衡

中图分类号: TN95 文献标志码: A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1001-2486(2023)01-035-14



听语音  
与作者  
互动  
聊科研

## Multi-channel power distribution for anti-jamming based on asymmetric Colonel Blotto game

WEI Peng<sup>1,2</sup>, WANG Shilian<sup>2</sup>, LU Ruimin<sup>1</sup>, LUO Junshan<sup>2</sup>

(1. The Sixty-third Research Institute, National University of Defense Technology, Nanjing 210007, China;

2. College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Aiming at the multi-channel power allocation problem of the communication system with a fix transmitting rate, which is undergoing intelligent jamming attack, an asymmetric Colonel Blotto game model was proposed. Under the condition of complete information, the equivalent optimal power allocation strategies at a single channel were deduced for the communication system and the jammer. Moreover, the only mixed Nash equilibrium strategy of them was proved, and the Nash equilibrium benefit was acquired. Based on the equivalent optimal power allocation strategies at a single channel, a direct column element exchange algorithm by multiple scanning was proposed to construct the multi-channel mixed power distribution matrix, which could adapt to more channels and wider power distribution range than the linear programming method. Through numerical simulation, the effectiveness of the multi-channel mixed power allocation matrix construction algorithm and the optimality of the proposed power allocation strategies were verified.

**Keywords:** asymmetric Colonel Blotto game; anti-jamming; multi-channel power distribution; mixed strategy; Nash equilibrium

随着人工智能的飞速发展和软件无线电能力的不断提升,无线通信面临的智能化干扰威胁越来越严重。传统以宽带高速跳频和非协调跳频等扩频技术为主的抗干扰通信技术,每次只使用一个信道,频谱利用率低<sup>[1]</sup>,且难以有效应对跟踪干扰和超出扩频增益的宽带干扰。如何在干扰条件下通过功率控制提升通信系统效能,一直是通信领域关注的重要方面,特别是在通信对抗双方日益智能化的条件下,通过博弈论来解决双方的最优功率分配问题得到越来越多的研究。根据通信对抗双方可用信道数,基于功率分配的对抗博

弈可分为单信道模型和多信道模型。对通信方而言,可用信道数定义为一次通信过程中用户不受其他用户干扰而独占的频分信道数,可以由连续或不连续的多个频段组成;对干扰方而言,可用信道数定义为一次干扰过程中可不受限制自由干扰的信道数,通常与通信方可用信道一致。

单信道模型的功率分配通常为对抗双方引入功率开销代价,以最大化、最小化通信容量或信噪比为目标,将对抗双方建模为非合作博弈<sup>[2-5]</sup>、二人零和博弈<sup>[6]</sup>、Stackelberg 博弈<sup>[7-8]</sup>等,然后求解博弈的纳什均衡<sup>[2-5,9]</sup>或 Stackelberg 均衡<sup>[8]</sup>。在

\* 收稿日期:2021-02-07

基金项目:国家自然科学基金面上资助项目(62171445)

作者简介:魏鹏(1983—),男,山西长治人,博士研究生,E-mail:weipengss@163.com;

王世练(通信作者),男,江苏徐州人,教授,博士,博士生导师,E-mail:wangsl@nudt.edu.cn

存在用户间互干扰的情况下,也可能进一步追求帕累托最优<sup>[10]</sup>。对模型中存在的某些未知参数,通常使用  $Q$ -Learning<sup>[6]</sup> 等强化学习算法获取。其中,文献[2]将无线网络中的功率控制问题建模为一个广义非合作博弈,联合优化无线网络中的能效和延时,分别提出了分布式和集中式功率控制算法,并采用最大块改进方法解决了非凸集中功率控制问题,保证了功率控制算法收敛到较好的候选解,且复杂度适中。文献[3]将分布式无线传感器网络中的传感器功率分配建模为非合作博弈,提出了一种非协作功率控制算法,使节点能够快速收敛到使网络性能稳定的纳什均衡点。文献[4]将认知无线电中的功率控制问题建模为非合作功率控制博弈,提出了一种自适应非合作功率控制算法,证明了该算法存在唯一纳什均衡,并且能够降低功耗,克服远近距离效应。文献[5]考虑干扰温度,将认知传感器网络中的节能功率分配问题描述为非合作耦合约束博弈,设计了基于效率的集中式和分布式功率分配算法并得到纳什均衡,具有良好的能量效率、收敛速度和公平性。文献[6]将认知无线电与干扰机之间的功率分配交互建模为二人零和博弈,提出了一种基于  $Q$ -Learning 的多通道功率分配算法,该算法在固定干扰策略下,学习解与平坦衰落信道下常见的显式注水解相等,选择性信道下略有不同;在智能干扰策略下,学习到的策略几乎等于完全信息博弈的均衡策略。文献[7]将 DoS 攻击下无线通信网络的最优功率调度问题建模为不完全信息 Stackelberg 博弈,将自适应惩罚函数方法和微分进化算法相结合,处理相应的非线性和非凸优化问题。文献[8]将智能干扰机存在下的单通道功率控制抗干扰建模为 Stackelberg 博弈,给出了 Stackelberg 均衡策略的闭式表达式,证明了 Stackelberg 均衡的存在性和唯一性。文献[9]分别采用非合作纯策略博弈和混合策略博弈对蜂窝网络中设备间功率控制问题进行了研究和探讨,针对每一种博弈,导出了功率受限的纳什均衡封闭表达式,并研究了纳什均衡的存在性和唯一性。文献[10]研究了多用户中继网络单流传输 (single-stream transmission) 中的功率分配问题,采用可行点跟踪逐次凸逼近和多目标分析方法来计算一组近似帕累托最优的信噪比,仿真结果证明提出的算法优于比较方案。

多信道模型的功率分配根据优化目标不同,求解方法差异很大。当优化目标为通信容量时,文献[8]引入了功率开销代价,证明了 Stackelberg

均衡的存在性,设计了计算干扰机的最佳响应策略和用户近似最优策略的算法。文献[11]证明了在白噪声信道下,通信对抗双方的纳什均衡策略是双方均在所有可用信道上平均分配功率,而在频率选择性衰落信道下,通信对抗双方的纳什均衡策略可用迭代注水算法求解。文献[12]以信干噪比 (signal to interference plus noise ratio, SINR) 作为优化目标,将中继网络多个合法中继节点与智能干扰器之间的功率对抗过程建模为一个两层 Stackelberg 博弈,分别研究干扰者与合法节点之间的敌对关系及合法节点之间的协作关系,并求得了 Stackelberg 均衡。这种以通信容量或 SINR 为优化目标的多信道功率分配方法虽然有完备的理论支撑,但在实际通信系统中并不适用。因为实际通信系统均以特定的速率传输信息,当接收信号不低于解调门限时,一包数据接收成功;反之,该包数据接收失败。而当 SINR 达到解调门限后,更大的通信功率并不能进一步提高通信容量。因此,通信对抗双方最大化或最小化的目标应为传输成功的信道数。这种以特定通信速率下传输成功的信道数为优化目标的多信道功率分配方法通常建模为 Colonel Blotto 博弈<sup>[13-15]</sup>。其中,文献[13]研究了认知无线网络中的次级用户与攻击者之间的博弈,在次级用户与攻击者均可以访问多个信道场景下,将次级用户与攻击者之间的功率分配问题建模为 Colonel Blotto 博弈,通过构造一种匹配期望边际分布且满足总功率约束的联合分布,最终获得了纳什均衡策略,以最小化通信方最坏情况下的损失,但如何找到由联合概率分布确定的纳什均衡策略仍然是一个难题。文献[14]提出了一种基于 Blotto 博弈的多维拍卖子载波分配方案,主要用以解决兼顾效率和公平的多载波分配问题,其效用函数是加权的香农容量公式。文献[15]将认知无线电中二级用户与干扰者之间的多信道功率分配问题建模为双人 Blotto 博弈,并采用迭代纳什议价解对模型求解,其效用函数是信干噪比的偏置加权,等效于以通信容量为优化目标。

综上所述,单信道功率博弈问题和以通信容量为优化目标的多信道功率博弈问题已经得到了很好的解决,而以特定速率下传输成功的信道数为优化目标的多信道功率分配博弈仍有待深入研究。此外,随着通信对抗双方信号处理能力的提升,同时处理多个信道将变得越来越容易。通信方通过在多个信道上以某种优化策略分配通信功

率,可作为一种智能抗干扰手段,在智能干扰条件下最大化通信方收益。

本文以文献[13]的多信道功率分配模型为基础,结合实际系统中数字化功率控制特点,针对非对称 Colonel Blotto 博弈模型以及该模型下的多信道功率分配抗干扰问题,首先建立了一种非对称 Colonel Blotto 博弈模型,将 Colonel Blotto 博弈应用范围推广至战场对博弈双方不公平的场景;然后基于所提模型,针对通信对抗双方数字化功率控制场景,提出了通信对抗双方不同功率约束下的最优混合策略及纳什均衡相关定理,并通过求解等效单信道最优功率分配策略进行了证明;最后基于等效单信道最优功率分布,设计了一种线性规划方法求解多信道混合功率分配矩阵,并针对该方法难以适应较多信道数和较广功率分布范围的不足,提出了一种多重扫描直接列元素交换算法,可快速构建多信道混合功率分配矩阵,并且具有更广的适用范围。

## 1 Colonel Blotto 博弈及多信道功率分配

### 1.1 Colonel Blotto 博弈

Colonel Blotto 博弈是一种二人零和博弈,又称 Divide Dollar 博弈,博弈双方分别记为 B (Blotto) 和 E (Enemy)。博弈的规则为 B 和 E 在  $K$  个独立的战场上同时分配各自有限的兵力,但均不知道对手某一次的具体分配策略。若一方在某战场上分配了比对方更多的兵力,则在该战场上获胜,收益记为 1。博弈的收益为赢得战场的总数,赢得大部分战场的一方最终获胜<sup>[16]</sup>。

若博弈双方的总兵力分别为  $X_B$  和  $X_E$ ,  $\mathbf{B}$  的

$$\text{兵力分配矩阵记为 } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,M} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{K,1} & x_{K,2} & \cdots & x_{K,M} \end{bmatrix},$$

则行向量  $\mathbf{x}_i (i \in \{1, 2, \dots, M\})$  表示 B 可选用的  $M$  种纯策略,任一  $\mathbf{x}_i$  满足总功率约束  $\sum_{k=1}^K x_{i,k} = X_B$ 。

列向量  $\mathbf{x}_k (k \in \{1, 2, \dots, K\})$  表示 B 在第  $k$  个战场上的兵力分布。类似地, E 的兵力分配矩阵  $\mathbf{Y}$  的行向量  $\mathbf{y}_j$  满足  $\sum_{k=1}^K y_{j,k} = X_E (j \in \{1, 2, \dots, N\})$ , 表示

E 可选用的  $N$  种兵力分配纯策略,列向量  $\mathbf{y}_k$  表示 E 在第  $k$  个战场上的兵力分布。若博弈双方随机使用每一种纯策略  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{y}_j$ , 则该博弈的混合策略期望收益为<sup>[17]</sup>:

$$R_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{K^2 MN} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \text{sign}(x_{i,k} - y_{j,k}) \quad (1)$$

$\text{sign}(z)$  表示取  $z$  的符号,即

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases} \quad (2)$$

对该博弈问题的大量深入研究<sup>[16-20]</sup>表明,该博弈不存在纯策略纳什均衡,因此重点研究在各种约束下的混合策略纳什均衡。其中,与本文研究最相关的是文献[17]所做的工作。该文献首先将 Colonel Blotto 博弈等价于 General Lotto 博弈,即在单个战场上满足平均兵力约束的博弈,然后将其结果推广至  $K$  个战场完成 Colonel Blotto 博弈。遗憾的是,虽然 General Lotto 博弈得到完美的解决,但将其结果推广至  $K$  个战场时,并不总是存在可行解,因此并没有完全解决 Colonel Blotto 博弈问题。

受该文献思路的启发,本文提出了一种非对称 Colonel Blotto 博弈,用于解决数字化功率控制条件下通信对抗双方的多信道功率分配问题。不同于传统 Colonel Blotto 博弈中每个战场对博弈双方公平的假设,多信道功率分配博弈中,干扰方在每个信道上都有噪声进一步加强其干扰效果,这可等效为 Colonel Blotto 博弈中每个战场对博弈对抗双方不公平,也即一方占有主场优势,能够以相同或更少的兵力获胜。

### 1.2 多信道功率分配及非对称 Colonel Blotto 博弈模型

如图 1 所示,将通信方总功率记为  $S$ , 干扰方总功率记为  $J$ , 双方可用信道数均为  $K$ , 所有  $K$  个信道均为均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的无差别高斯白噪声信道,接收方解调门限信干噪比记为  $SINR_{th} = \tau$ 。则对于第  $k$  个信道上分配的信号功率  $s_k$  和干扰功率  $j_k$ , 若满足  $\frac{s_k}{j_k + \sigma^2} \geq \tau$ , 则该信道通信成功,

通信方收益为 1, 干扰方收益为 -1; 反之该信道通信失败, 通信方收益为 -1, 干扰方收益为 1。假定干扰方能够以最小步进  $d$  控制各信道上分配的功率, 且  $J$  能够被  $d$  整除, 记干扰方功率分配

$$\text{矩阵为 } \mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,N} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdots & Y_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{K,1} & Y_{K,2} & \cdots & Y_{K,N} \end{bmatrix}, \text{ 则行向量}$$

$\mathbf{Y}_j (j \in \{1, 2, \dots, N\})$  为干扰方的第  $j$  种功率分配

纯策略, 满足总功率约束  $\sum_{k=1}^K Y_{j,k} = J$ , 且  $Y_{j,k} \in \{0, d, 2d, \dots, J\}$ 。列向量  $\mathbf{Y}_k (k \in \{1, 2, \dots, K\})$  表示干扰方在第  $k$  个信道上的功率分布。类似地, 假定通信方可获取到干扰方功率控制精度, 能够以  $\tau d$  为步进控制功率分配, 且  $S$  能够被  $\tau d$  整除, 记其功率分配矩阵为  $\mathbf{X}_S$ , 则行向量  $\mathbf{X}_i (i \in \{1, 2, \dots, M\})$  为通信方的第  $i$  种功率分布纯策略, 满足总功率约束  $\sum_{k=1}^K X_{i,k} = S$ , 且  $X_{i,k} \in \{0, \tau d, 2\tau d, \dots, S\}$ 。列向量  $\mathbf{X}_k$  为通信方在第  $k$  个信道上的功率分布。此时, 第  $k$  个信道上传输成功的条件可转换为  $X_{i,k} - \tau Y_{j,k} \geq \tau \delta^2$ 。

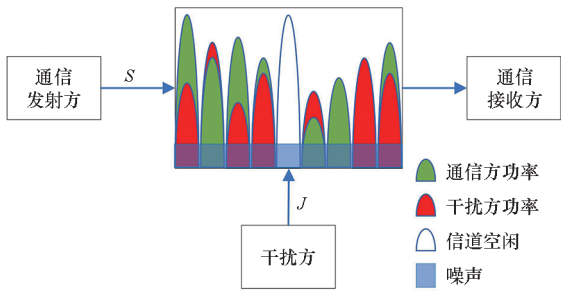


图 1 多信道功率分配示意图

Fig. 1 Diagram of multi-channel power allocation

需要说明的是, 即使通信方具有更小的功率分配粒度, 也不能进一步增加其收益。因为当 SINR 等于门限  $\tau$  时, 通信成功, 高于门限的功率不能带来额外的收益; 同理, 当  $S$  不能够被  $\tau d$  整除时, 剩余不足  $\tau d$  的功率增加到任一信道上均不能改变对应信道上的收益。因而假定通信方总功率控制精度为  $\tau d$ , 且总功率  $S$  能够被  $\tau d$  整除对通信方来说是最优的。此外, 若干扰方能够进一步细化功率分配粒度  $d$ , 使得通信方功率分配粒度达不到  $\tau d$ , 则在某些干扰功率下, 通信方无法使 SINR 等于门限  $\tau$ , 因此, 通信方为正确接收数据, 需付出比达到解调门限所需功率更大的功率代价, 也即提升了干扰方收益。本文暂不考虑这种情况, 均假定通信方具有较强的功率控制能力, 使功率分配粒度达到  $\tau d$ 。

为后续分析计算方便, 将通信方和干扰方总功率及功率分配矩阵分别用  $\tau d$  和  $d$  进行归一化可得:  $A = \frac{S}{\tau d}$ ,  $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}_S}{\tau d}$ ,  $B = \frac{J}{d}$ ,  $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Y}_J}{d}$ , 则第  $k$  个信道上的归一化信号功率和归一化干扰功率分布可分别表示为  $\mathbf{x}_k = \frac{\mathbf{X}_k}{\tau d}$ ,  $\mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{Y}_k}{d}$ , 归一化白噪声功率为  $n_0 = \frac{\sigma^2}{d}$ 。通信方第  $i$  种纯策略可表示为  $\mathbf{x}_i =$

$\frac{\mathbf{X}_i}{\tau d} (i \in \{1, 2, \dots, M\})$ , 满足  $\sum_{k=1}^K x_{i,k} = A$ , 且  $x_{i,k} \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ ; 干扰方的第  $j$  种纯策略可表示为  $\mathbf{y}_j = \frac{\mathbf{Y}_j}{d} (j \in \{1, 2, \dots, N\})$ , 满足  $\sum_{k=1}^K y_{j,k} = B$ , 且  $y_{j,k} \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , 则通信方收益可表示为:

$$R_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{K^2 MN} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \text{gte}(x_{i,k} - y_{j,k} - n_0) \quad (3)$$

其中,  $\text{gte}(z)$  表示判断  $z$  是否大于等于 0, 即

$$\text{gte}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (4)$$

将式(1)~(4)给出的 Colonel Blotto 博弈模型进行对比, 可见, 因受白噪声影响, 信道对通信对抗双方不再公平, 即非对称。相比于 Colonel Blotto 博弈模型战场对博弈双方公平的假设, 本文所提非对称 Colonel Blotto 博弈模型具有更广的适用范围, 不仅适用于多信道功率分配, 同样也可应用于非对称战场兵力分配。例如, 当作战双方 B 和 E 中的某一方通过修筑防御工事或可更充分利用地形而占据主场优势时, 战场对双方不再对称, 占据主场优势的一方能以相同或更少的兵力获胜。

## 2 非对称 Colonel Blotto 博弈模型下的多信道功率分配策略

### 2.1 相关定义及定理

通信方和干扰方在  $K$  个信道上的归一化平均功率分别记为  $m$  和  $n$ , 即  $m = \frac{A}{K}$ ,  $n = \frac{B}{K}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  表示某一无差别信道。本文仅考虑  $m$  和  $n$  为整数的情况, 且后文中的功率分配均针对归一化后的功率进行, 因而不再特别指出“归一化”。为方便表述, 首先进行如下定义。

**定义 1** 通信方全信道功率均匀分布。若通信方同时有  $K$  个信道可用, 第  $k$  信道上的功率分配服从  $u$  至  $2m - u$  之间的均匀分布, 且任一纯策略  $i$  在  $K$  个信道上分配的功率满足总功率约束, 即

$$\mathbf{x}_k \sim U(u, 2m - u), k \in \{1, 2, \dots, K\}$$

$$\text{s. t. } \sum_{k=1}^K x_{i,k} = A$$

则称之为通信方全信道功率均匀分布策略。其中,  $u = \lceil n_0 \rceil$  为受功率分配粒度  $\tau d$  约束的大于等于归一化白噪声  $n_0$  的最小整数,  $\lceil \cdot \rceil$  表示上取整。

**定义 2** 通信方以  $\Gamma_S (\Gamma_S > 2m - u)$  为上限

的部分信道功率均匀分布。若通信方同时有  $K$  个信道可用,在第  $k$  个信道上以  $1 - \frac{2m}{\Gamma_s + m}$  的概率分配功率 0,以  $\frac{2m}{\Gamma_s + m}$  的概率服从  $u$  至  $\Gamma_s$  之间的均匀功率分布,且任一纯策略  $i$  在  $K$  个信道上分配的功率满足总功率约束,即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\sim \left(1 - \frac{2m}{\Gamma_s + m}\right)O + \frac{2m}{\Gamma_s + m}U(u, 2\Gamma_s - u), \\ k &\in \{1, 2, \dots, K\} \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^K x_{i,k} &= A \end{aligned}$$

则称之为通信方以  $\Gamma_s$  ( $\Gamma_s > 2m - u$ ) 为上限的部分信道功率均匀分布策略。其中,  $O$  表示功率为 0 的集合。

**定义 3** 干扰方全信道功率均匀分布。若干扰方可同时干扰  $K$  个信道,在第  $k$  个信道上分配的功率服从 0 至  $2n$  之间的均匀分布,且任一纯策略  $j$  在  $K$  个信道功率之和满足总功率约束,即

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &\sim U(0, 2n), k \in \{1, 2, \dots, K\} \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^K y_{j,k} &= B \end{aligned}$$

则称之为干扰方全信道功率均匀分布策略。

**定义 4** 干扰方以  $\Phi_j$  ( $\Phi_j > 2n$ ) 为上限的部分信道功率均匀分布。若干扰方可同时干扰  $K$  个信道,  $1 - \frac{2n}{\Phi_j}$  的概率分配功率为 0,  $\frac{2n}{\Phi_j}$  的概率服从 0 至  $\Phi_j$  之间的均匀功率分布,且任一纯策略  $j$  在  $K$  个信道功率之和满足总功率约束,即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\sim \left(1 - \frac{2n}{\Phi_j}\right)O + \frac{2n}{\Phi_j}U(0, \Phi_j), k \in \{1, 2, \dots, K\} \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^K y_{j,k} &= B \end{aligned}$$

则称之为干扰方以  $\Phi_j$  ( $\Phi_j > 2n$ ) 为上限的部分信道功率均匀分布。

假定通信对抗双方均能根据对方的混合策略分布,选择己方的最优功率分布策略,则根据上述定义,提出如下通信对抗双方多信道最优功率分配策略相关定理。

**定理 1** 当  $m \geq \frac{n + 2u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1}{2}$

时(此时一定有  $m \geq n + u$ ),通信方全信道功率分配策略,记为  $\mathbf{x}_k^*$ ,是通信方最优功率分配策略;干扰方以  $\Phi_j = 2m - 2u$  或  $\Phi_j = 2m - 2u + 1$  为上限的部分信道功率分配策略,记为  $\mathbf{y}_k^*$ ,为干扰方最优干扰策略。 $\mathbf{x}_k^*$  和  $\mathbf{y}_k^*$  为通信方和干扰方的唯一纳什均衡策略,对应通信方纳什均衡收益为

$$R(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) = 1 - \frac{2n}{2m - 2u + 1}.$$

**定理 2** 当  $m < \frac{n + 2u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1}{2}$

时,通信方最优功率分配策略,记为  $\mathbf{x}_k^\diamond$ ,是以  $\Gamma_s$  为上限的部分信道功率均匀分配策略,其中  $\Gamma_s$  为  $\Lambda_s = \{\lfloor n + u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1 \rfloor, \lceil n + u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1 \rceil\}$  中使得通信方收益较大的取值,即  $\Gamma_s = \arg \max_{\Gamma \in \Lambda_s} \left[ \frac{4m}{\Gamma + u} \left( 1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1} \right) - 1 \right]$ ;

干扰方的最优功率分配策略,记为  $\mathbf{y}_k^\diamond$ ,是以  $\Phi_j = \Gamma_s - u$  或  $\Phi_j = \Gamma_s - u + 1$  为上限的部分信道功率分配策略,且  $\mathbf{x}_k^\diamond$  和  $\mathbf{y}_k^\diamond$  为通信方和干扰方的唯一纳什均衡策略,对应通信方纳什均衡收益为  $R(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) = \frac{4m}{\Gamma_s + u} \left[ 1 - \frac{n}{\Gamma_s - u + 1} \right] - 1$ 。

**推论 1** 干扰方的最优功率分配策略一定是以  $\Phi$  ( $\Phi > 2n$ ) 为上限的部分信道功率分配策略。

对上述定理的证明利用了文献[17]的结论,即 Colonel Blotto 博弈具有与 General Lotto 博弈相同的值(value),然后取消  $K$  个战场的限制将其等效为单个战场的 General Lotto 博弈。结合本文多信道功率分配模型,可等效为通信方和干扰方在单个信道上满足平均功率约束的功率分配博弈,即任意第  $k$  信道服从的最优功率分布一致,期望收益均等于  $K$  信道 Colonel Blotto 博弈的期望收益。对该等效的合理性可直观理解为:既然在每个无差别信道上的功率分配都是最优的,则在所有信道上必然也是最优的。于是,从通信方角度出发,通信方收益可表示为:

$$\begin{aligned} R_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \\ &= P(\mathbf{x}_k \geq \mathbf{y}_k + u) - P(\mathbf{x}_k < \mathbf{y}_k + u) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\mathbf{y}_k > x_{k,i} - u) - \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\mathbf{y}_k > x_{k,i} - u) \\ &= 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\mathbf{y}_k > x_{k,i} - u) \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $x_{k,i}$  表示通信方某一纯策略在第  $k$  个信道上的功率值,其概率为  $p_i$ ,满足  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_{k,i} = m$  的平均功率约束。同理,从干扰方角度出发,通信方收益可表示为:

$$R_J(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = R_J(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} p_j(\mathbf{x}_k \geq y_{k,j} + u) - 1 \quad (6)$$

式中,  $y_{k,j}$  表示干扰方某一纯策略在第  $k$  个信道上的功率值,其概率  $p_j$  满足  $\sum_{j=1}^{\infty} p_j y_{k,j} = n$ 。

## 2.2 通信方最优策略证明

设通信方在第  $k$  个信道上分配的最大功率值为  $\Gamma$ 。当  $\Gamma \leq 2m - u$  时, 满足平均功率约束的通信方全信道功率均匀分配策略为  $\mathbf{x}_k = [2m - \Gamma, 2m - \Gamma + 1, \dots, \Gamma]$ 。根据式(5), 最坏情况下(因为干扰方可根据通信方混合策略分布选择使通信方收益最小的功率分配策略), 通信方在第  $k$  个信道上的收益为:

$$\begin{aligned} R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &= 1 - \frac{2}{2\Gamma - 2m + 1} \sum_{i=2m-\Gamma}^{\Gamma} P(\mathbf{y}_k \geq i - u) \\ &= 1 - \frac{2}{2\Gamma - 2m + 1} \left[ \sum_{i=1}^{\Gamma-u+1} P(\mathbf{y}_k \geq i) - \sum_{i=1}^{2m-\Gamma-u} P(\mathbf{y}_k \geq i) \right] \\ &\geq \begin{cases} 1 - \frac{2 \times (2\Gamma - 2m + 1)}{2\Gamma - 2m + 1}, & \Gamma - u + 1 < n \\ 1 - \frac{2n}{2\Gamma - 2m + 1} \left( 1 - \frac{2m - \Gamma - u}{\Gamma - u + 1} \right), & \Gamma - u + 1 \geq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1, & \Gamma - u + 1 < n \\ 1 - \frac{2n}{\Gamma - u + 1}, & \Gamma - u + 1 \geq n \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, 当  $\Gamma - u + 1 < n$  时, 干扰方可通过平均分配功率, 在所有信道上阻塞通信, 使得  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = -1$ ; 当  $\Gamma - u + 1 \geq n$  时, 干扰方不可能在所有信道上阻塞通信, 因为  $\sum_{i=1}^{\Gamma-u+1} P(\mathbf{y}_k \geq i) \leq n$ , 所以最小化  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  的干扰策略是在满足  $\sum_{i=1}^{\Gamma-u+1} P(\mathbf{y}_k \geq i) = n$  的条件下最小化  $\sum_{i=1}^{2m-\Gamma-u} P(\mathbf{y}_k \geq i)$ 。显然  $\mathbf{y}_k \sim \left(1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1}\right)O + \frac{n}{\Gamma - u + 1}U(\Gamma - u + 1, \Gamma - u + 1)$  满足这一条件, 使式(7)中  $\Gamma - u + 1 \geq n$  时等号成立。

当  $\Gamma \geq 2m - u$  时, 通信方部分信道功率均匀分配策略为  $\mathbf{x}_k \sim \left(1 - \frac{2m}{\Gamma + u}\right)O + \frac{2m}{\Gamma + u}U(u, \Gamma)$ , 则最坏情况下, 通信方在第  $k$  个信道上的收益为:

$$\begin{aligned} R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &= \varphi \sum_{i=u}^{\Gamma} p_i [1 - 2P(\mathbf{y}_k > x_{k,i} - u)] - (1 - \varphi) \\ &= \varphi \left[ 1 - \frac{2}{\Gamma - u + 1} \sum_{i=u}^{\Gamma} P(\mathbf{y}_k > i - u) \right] - 1 + \varphi \\ &\geq \frac{4m}{\Gamma + u} \left[ 1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1} \right] - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $\varphi = \frac{2m}{\Gamma + u}$  表示通信方功率分布中  $\{u, u + 1, \dots, \Gamma\}$  所占的比例。当干扰功率分配策略是均值为  $n$ , 最大功率值不超过  $\Gamma - u + 1$  时, 式(8)可取到等号, 使得通信方收益最小。此时, 通信方收益由通信方功率分配的最大值  $\Gamma$  决定。

综合式(7)和式(8)可得通信方收益随  $\Gamma$  变化的函数为:

$$R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \geq \begin{cases} -1, & \Gamma < n + u - 1 \\ 1 - \frac{2n}{\Gamma - u + 1}, & n + u - 1 \leq \Gamma \leq 2m - u \\ \frac{4m}{\Gamma + u} \left[ 1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1} \right] - 1, & \Gamma > 2m - u \end{cases} \quad (9)$$

式中, 当  $\Gamma \leq 2m - u$  时, 通信方收益  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  随  $\Gamma$  增加而单调递增, 因此通信方应使  $\Gamma = 2m - u$ , 即通信方全信道功率分配策略是通信方最优功率分配策略; 当  $\Gamma > 2m - u$  时,  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  对  $\Gamma$  求导可得:

$$\frac{\partial R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \Gamma} = -\frac{4m[\Gamma^2 + 2(n + u - 1)\Gamma + (u - 1)^2 - n]}{(\Gamma + u)^2(\Gamma - u + 1)^2} \quad (10)$$

式(10)的两个根为  $\Gamma_{1,2} = n + u \pm \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1$ , 舍弃取“-”的根  $\Gamma_2$ , 因为  $\Gamma_2 = n + u - \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1 \leq u - 1$ , 最大功率值低于噪声, 显然不合理。所以, 使通信方收益最大的  $\Gamma$  值, 即  $\Gamma_{\text{opt}} = n + u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1$ 。因为通信方在每个信道上分配的功率值均为整数, 因此应对  $\Gamma_{\text{opt}}$  上取整或下取整得到  $\Gamma_s$ , 使得通信方收益  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  最大化。即  $m \geq \frac{n + 2u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1}{2}$  时,  $\Gamma_s$  作为式(9)的极大值点存在, 所以通信方的最优功率分配策略为以  $\Gamma_s$  为上限的部分信道功率均匀分配策略; 反之, 当  $\Gamma_{\text{opt}} \leq 2m - u$ , 即  $m < \frac{n + 2u + \sqrt{n(n + 2u - 1)} - 1}{2}$  时,  $\frac{4m}{\Gamma + u} \left[ 1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1} \right] - 1$  在  $\Gamma > 2m - u$  区间随  $\Gamma$  增加单调递减, 且  $\frac{4m}{\Gamma + u} \cdot \left[ 1 - \frac{n}{\Gamma - u + 1} \right] - 1 < 1 - \frac{n}{2m - 2u + 1}$ , 所以通信方功率分布上限应为  $\Gamma_s = 2m - u$ , 即通信最优功率分配策略为全信道功率均匀分布。

此结果证明了定理 1 和定理 2 中通信方的最优功率分配策略。

## 2.3 干扰方最优策略证明

从干扰方角度出发, 假定干扰方功率分布上限为  $\Phi$ , 当  $\Phi \leq 2n$  时, 干扰方功率可在  $2n - \Phi \sim \Phi$  之间均匀分布, 即  $p_j = \frac{1}{2\Phi - 2n + 1}$ , 通信方可根据干扰方策略调整自身功率分配策略, 最大化通信方收益。则根据式(6), 通信方在第  $k$  个信道

上的收益为:

$$\begin{aligned}
 R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &= 2p_j \sum_{j=2n-\Phi}^{\Phi} P(\mathbf{x}_k \geq j+u) - 1 \\
 &= 2p_j \left[ \sum_{j=1}^{\Phi+u} P(\mathbf{x}_k \geq j) - \sum_{j=1}^{2n-\Phi+u-1} P(\mathbf{x}_k \geq j) \right] - 1 \\
 &\leq \begin{cases} 2p_j \left[ \frac{2m(2\Phi-2n+1)}{\Gamma_s+u} \right] - 1, \Gamma_s > 2\Phi+u \\ 2p_j \left[ m - \frac{2m(2n-\Phi+u-1)}{\Gamma_s+u} \right], \Gamma_s \leq 2\Phi+u \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{4m}{\Gamma_s+u} - 1, \Gamma_s > 2\Phi+u \\ \frac{2m(\Gamma_s-4n+2\Phi-u+2)}{(2\Phi-2n+1)(\Gamma_s+u)} - 1, \Gamma_s \leq 2\Phi+u \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

式中,当  $\Gamma_s > 2\Phi+u$ ,通信方能将  $\frac{2m}{\Gamma_s+u}\{u, u+1, \dots, \Gamma_s\}$  中的功率平均分布,即在第  $k$  个信道上

$$\begin{aligned}
 R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &= (1-\lambda) \left[ 2 \sum_{j=0}^{\Phi} P(\mathbf{x}_k \geq j+u) - 1 \right] + \lambda \left[ \frac{2}{\Phi+1} \sum_{j=0}^{\Phi} P(\mathbf{x}_k \geq j+u) - 1 \right] \\
 &= 2 \times \left( 1 - \frac{2n}{\Phi} \right) P(\mathbf{x}_k \geq u) + \frac{4n}{\Phi(\Phi+1)} \left[ \sum_{j=1}^{\Phi+u} P(\mathbf{x}_k \geq j) - \sum_{j=1}^{u-1} P(\mathbf{x}_k \geq j) \right] - 1 \\
 &\leq 2 \times \left( 1 - \frac{2n}{\Phi} \right) \varphi + \frac{4n(m-\varphi u+\varphi)}{\Phi(\Phi+1)} - 1 \\
 &= 2 \times \left( 1 - \frac{2n}{\Phi} \right) \frac{2m}{\Gamma_s+u} + \frac{4mn(\Gamma_s-u+2)}{\Phi(\Phi+1)(\Gamma_s+u)} - 1 \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中,通信方可通过调整自身功率分配使  $\Gamma_s \leq \Phi+u$ ,使得等号成立。

综合式(11)、式(12)可得

$$\begin{aligned}
 R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &\leq \begin{cases} \frac{4m}{\Gamma_s+u} - 1, \Phi < \frac{\Gamma_s-u}{2} \\ \frac{2m(\Phi-n+1)}{(2\Phi-2n+1)(n+u)} - 1, \frac{\Gamma_s-u}{2} \leq \Phi \leq 2n \\ 2 \times \left( 1 - \frac{2n}{\Phi} \right) \frac{2m}{\Gamma_s+u} + \frac{4mn(\Gamma_s-u+2)}{\Phi(\Phi+1)(\Gamma_s+u)} - 1, \Phi > 2n \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

式中,当  $\frac{\Gamma_s-u}{2} \leq \Phi < 2n$  时,  $R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  对  $\Phi$  求导

可得  $\frac{\partial R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \Phi} = \frac{-2m}{(2\Gamma-2n+1)^2(n+u)} < 0$ 。所以通信方收益随  $\Phi$  增加单调递减(通信方可控制  $\Gamma_s$  随  $\Phi$  调整最大化自身收益),此时干扰方应取  $\Phi=2n$ 。

当  $\Phi > 2n$  时,  $R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  对  $\Phi$  求导可得:

$$\frac{\partial R_j(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \Phi} = \frac{4mn[2\Phi^2-2(u-T_s)\Phi-(T_s-u)]}{(T_s+u)\Phi^2(\Phi+1)^2} \quad (14)$$

式(14)中的两个根  $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$  为  $\frac{\Gamma_s-u \pm \sqrt{(\Gamma_s-u)(\Gamma_s-u+2)}}{2}$ ,舍弃取“-”的

以  $\frac{2m}{\Gamma_s+u}$  的概率取功率值  $\frac{\Gamma_s+u}{2}$ ,使得通信方分配的功率(0除外)全部大于  $\Phi+u$ ,从而使  $P(\mathbf{x}_k \geq j) = \frac{2m}{\Gamma_s+u}$ 。当  $\Gamma_s = 2m-u$  时,通信方能达到最大收益1。当  $\Gamma_s \leq 2\Phi+u$  时,通信方可将  $\frac{2m}{\Gamma_s+u}\{u, u+1, \dots, \Gamma_s\}$  的功率值分布调整为  $\left(1 - \frac{m}{\Phi+u}\right)0 + \frac{m}{\Phi+u}(\Phi+u)$  以最大化自身收益,也即使式(11)中  $\Gamma_s \leq 2\Phi+u$  时等号成立。

当  $\Phi > 2n$  时,干扰方为满足平均功率约束,需采用以  $\Phi(\Phi > 2n)$  为上限的部分信道功率均匀分布,记  $\lambda = \frac{2n}{\Phi}$ ,则根据式(6),通信方收益为:

根  $\Phi_2$ ,因为  $\Phi_2 < 0$ ,显然不合理。对  $\Phi_1$  取整后可得  $\Phi_j = \Gamma_s - u$  或  $\Phi_j = \Gamma_s - u + 1$ ,将  $\Phi_j$  两个取值分别代入式(12),均可得到与式(8)一致的结果。

根据之前结论,通信方最优功率分配策略中,功率分布的上限均大于  $2n+u$ 。具体来说,当  $m \geq \frac{n+2u + \sqrt{n(n+2u-1)} - 1}{2}$  时,通信方最优功率分配策略  $\mathbf{x}_k^*$  对应的全信道功率均匀分布策略上限为  $\Gamma_s = 2m - u > 2n + u$ ,此时干扰方最优功率分布策略  $\mathbf{y}_k^*$  应取以  $\Phi_j = \Gamma_s - u = 2m - 2u$  或  $2m - 2u + 1$  为上限的部分信道功率分配策略,此时有  $R_s(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) = R_j(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*)$ ; 当  $m < \frac{n+2u + \sqrt{n(n+2u-1)} - 1}{2}$  时,通信方最优功率

分布策略  $\mathbf{x}_k^\diamond$  是以  $\Gamma_s = \lfloor n+u + \sqrt{n(n+2u-1)} - 1 \rfloor$  或  $\Gamma_s = \lceil n+u + \sqrt{n(n+2u-1)} - 1 \rceil$  中使通信方收益较大的  $\Gamma_s$  为功率分布上限的部分信道功率分布策略,显然  $\Gamma_s > 2n+u$ ,  $\Phi_j = \Gamma_s - u > 2n$ ,此时干扰方最优功率分布策略  $\mathbf{y}_k^\diamond$  应为以  $\Gamma_s - u$  为上限的部分信道功率分布策略,此时有  $R_s(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) = R_j(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond)$ 。可见,针对通信方最优功率分配策略,干扰方的最优干扰功率分布策略一定是  $\Phi_j = \Gamma_s - u$  或  $\Phi_j = \Gamma_s - u + 1$  为上限

的部分信道功率分配策略,不存在以  $2n$  为上限的全信道功率均匀分布的情况。

上述结果证明了定理 1 和定理 2 中干扰方最优功率分配策略,以及推论 1。

## 2.4 纳什均衡策略证明

由式 (9) 及其结论可知,当  $m \geq \frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2}$  时,通信方针对干扰

方最优干扰策略的最优功率分配策略是全信道功率均匀分布,即  $\mathbf{x}_k^* = [u, u+1, \dots, 2m-u]$ ,使得  $R_S(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) > R_S(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*)$ ,其中  $\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_k^*$  表示通信方除最优策略  $\mathbf{x}_k^*$  之外的其他策略。由式 (13)

及其结论可知,  $\mathbf{y}_k^* \sim \left(1 - \frac{2n}{2m-2u}\right)O + \frac{2n}{2m-2u}U(0, 2m-2u)$  和  $\mathbf{y}_k^* \sim \left(1 - \frac{2n}{2m-2u+1}\right)O + \frac{2n}{2m-2u+1}$

$U(0, 2m-2u+1)$  为干扰方针对通信方最优功率分配策略  $\mathbf{x}_k^*$  的最优干扰功率分配策略,使得  $R_J(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) < R_J(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k/\mathbf{y}_k^*)$ ,其中  $\mathbf{y}_k/\mathbf{y}_k^*$  表示干扰方除最优功率分配策略  $\mathbf{y}_k^*$  之外的其他功率分配策略。由此可得  $R_S(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) < R_S(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) = R_J(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) < R_J(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k/\mathbf{y}_k^*)$ 。也即,  $\mathbf{x}_k^*$  和  $\mathbf{y}_k^*$  是  $m \geq \frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2}$  条件下通信对抗双

方的唯一纳什均衡策略,对应纳什均衡收益为  $R(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}_k^*) = 1 - \frac{2n}{2m-2u+1}$ 。

例如,当干扰方总功率  $J=6$  W,功率控制步进  $d=0.5$  W,通信方总功率  $S=24$  W,功率控制步进  $\tau d=1$  W,每个信道的白噪声功率  $\delta^2=0.8$  W,门限信噪比  $\tau=4$  倍(约 6 dB),可用信道数  $K=3$  时,通信方和干扰方功率归一化后可得  $B=12, A=24$ ,对应归一化平均功率为  $n=4, m=8$ ,而  $u = \lceil \frac{\delta^2}{d} \rceil = 2$ 。

此时,  $m > \frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2} = 6.1458$ 。

图 2 给出了分别与式 (9)、式 (13) 对应的通信对抗双方的收益变化曲线,两个横轴  $\Gamma$  和  $\Phi$  分别表示通信方、干扰方的最大功率分布值,对应式 (9)、式 (13) 中的自变量。纵轴对应式 (5) 和式 (6) 给出的从通信方角度和干扰方角度得到的通信方收益  $R_S(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  和  $R_J(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ 。可见通信方在  $\Gamma = \Gamma_S = 2m - u = 14$  处使收益取得了极大值 0.384 6,干扰方在  $\Phi = \Phi_J = 2m - 2u = 12$  和  $\Phi = \Phi_J = 2m - 2u + 1 = 13$  处使通信方收益取得极小值 0.384 6,也即通信方对抗双方达到了纳什均

衡,且纳什均衡收益为 0.384 6。

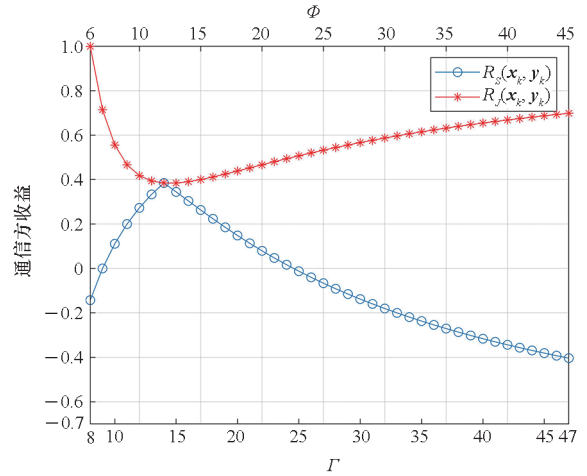


图 2 通信方收益随通信方、干扰方功率分布变化曲线 1

Fig. 2 Payoff curve 1 of the communication system with the power distribution

类似地,由式 (9) 及其结论可知,当  $m < \frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2}$  时,通信方针对干扰方最优干扰策略的最优功率分配策略是以  $\Gamma_S$  为上限的部分信道功率均匀分布,即  $\mathbf{x}_k^\diamond \sim \left(1 - \frac{2m}{\Gamma_S + m}\right)O + \frac{2m}{\Gamma_S + m}U(u, \Gamma_S)$ ,使得  $R_S(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) > R_S(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond)$ 。由式 (13) 及其结论可知,  $\mathbf{y}_k^\diamond \sim \left(1 - \frac{2n}{\Gamma_S - u}\right)O + \frac{2n}{\Gamma_S - u}U(0, \Gamma_S - u)$  和  $\mathbf{y}_k^\diamond \sim \left(1 - \frac{2n}{\Gamma_S - u + 1}\right)O + \frac{2n}{\Gamma_S - u + 1}U(0, \Gamma_S - u + 1)$  为干扰方针对通信方最优功率分配策略  $\mathbf{x}_k^\diamond$  的最优干扰功率分配策略,使得  $R_J(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) < R_J(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k/\mathbf{y}_k^\diamond)$ 。由此可得  $R_S(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) < R_S(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) = R_J(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) < R_J(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k/\mathbf{y}_k^\diamond)$ 。也即,  $\mathbf{x}_k^\diamond$  和  $\mathbf{y}_k^\diamond$  是  $m \geq \frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2}$  条件下通信对抗双方的唯一纳什均衡策略,对应的纳什均衡收益为  $R_S(\mathbf{x}_k^\diamond, \mathbf{y}_k^\diamond) = \frac{4m}{\Gamma_S + u} \left[1 - \frac{n}{\Gamma_S - u + 1}\right] - 1$ 。

例如,当干扰方总功率  $J=10$  W,功率控制步进  $d=0.5$  W,通信方总功率  $S=24$  W,功率控制步进  $\tau d=1$  W,每个信道的白噪声功率  $\delta^2=1.9$  W,门限信噪比  $\tau=2$  倍(约 3 dB),可用信道数  $K=4$  时,用  $d$  和  $\tau d$  分别对通信方和干扰方功率进行归一化后可得  $B=20, A=24$ ,对应其归一化平均功率为  $n=5, m=6$ ,而  $u=4$ 。此时,  $m <$



$$\frac{n+2u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1}{2}=9.837, \text{图3给出了}$$

分别与式(9)、式(13)对应的通信对抗双方的收益变化曲线,横纵坐标轴含义同图2。可见通信方在  $\Gamma = \Gamma_s = \lceil n+u+\sqrt{n(n+2u-1)}-1 \rceil = 16$  处收益取得了极大值  $-0.2615$ , 干扰方在  $\Phi = \Phi_j = \Gamma_s - u = 12$  和  $\Phi = \Phi_j = \Gamma_s - u + 1 = 13$  处使通信方收益取得了极小值  $-0.2615$ , 通信对抗双方达到了纳什均衡。

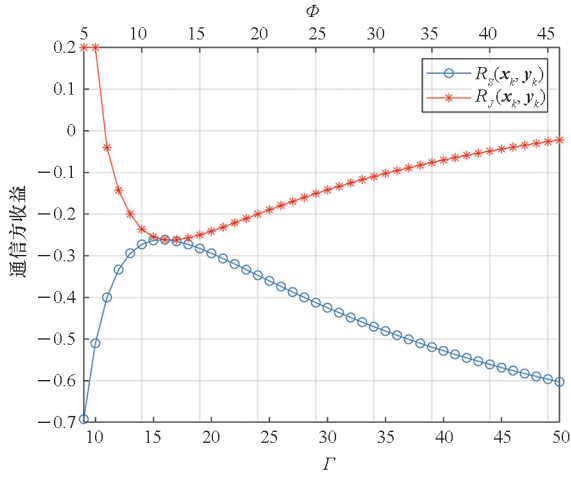


图3 通信方收益随通信方、干扰方功率分布变化曲线2

Fig. 3 Payoff curve 2 of the communication system with the power distribution

由图2、图3纳什均衡点对应的通信对抗双方的归一化功率分布,可方便地得到实际功率分布,而由纳什均衡收益和信道数  $K$  容易求出可成功通信的信道数  $K_{\text{suc}}$ ,如式(15)所示。

$$K_{\text{suc}} = \frac{K(R_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) + 1)}{2} \quad (15)$$

另外还有两点需要说明:首先,上述纳什均衡点及其收益都是在通信方与干扰方均匀分布其功率的条件下求得的。事实上,若某一方不服从均匀分布,而更加偏好某些策略,则其对手总可以找到针对性策略,使得通信收益高于或低于纳什均衡收益,后续的数值仿真结果也验证了这一点。其次,上述纳什均衡是基于完全信息条件推导的,即对抗双方均已知对方总功率、功率分配粒度、可用信道数及通信方正确接收一包数据所需的门限信噪比。实际应用过程中,干扰方可通过前期侦察获得所需的通信方参数,通信方也可通过干扰认知学习到所需的干扰方参数。

### 3 混合策略功率分配矩阵的构造

上述通信对抗双方最优功率分配策略及纳什均衡的求解是通过将  $K$  个信道上的功率分配

博弈等效到单个信道上满足平均功率约束的功率分布求得的,而将求得的单个信道上的功率分布推广到  $K$  个信道,构建满足总功率约束的  $K$  信道混合策略功率分配矩阵,仍然是一项困难的任务。本文首先提出一种线性规划求解方法,可以对信道数少、功率分布范围小的混合策略功率分配矩阵进行快速构建。但当信道数较多或功率分布范围较大时,则求解速度过慢,甚至得不到可行解。为此,提出了一种多重扫描直接列元素交换算法,可以快速构造功率分布范围较大的  $K$  信道混合策略功率分配矩阵。以通信方  $K$  信道混合策略功率分配矩阵的构建为例介绍两种方法。

#### 3.1 线性规划方法

已知单信道最优功率分布  $\mathbf{x}_k^*$  (或  $\mathbf{x}_k^\diamond$ ), 共  $L$  个元素,则将  $\mathbf{x}_k^*$  作为通信方  $K$  信道初始功率分配矩阵  $\mathbf{X}$  的  $K$  列元素,然后调整各列元素的次序,使得各行之和为通信方总功率,则调整好的矩阵  $\mathbf{X}^*$  可表示为式(16),且满足式(17)约束。

$$\mathbf{X}^* = [\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_k^*, \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_k^*, \dots, \mathbf{P}_k \mathbf{x}_k^*] \quad (16)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{k=1}^K \mathbf{P}_k \mathbf{x}_k^* = A \\ \sum_{i=1}^L p_k(i,j) = 1, k, j \in \{1, 2, \dots, K\} \\ \sum_{j=1}^K p_k(i,j) = 1, k \in \{1, 2, \dots, K\}, i \in \{1, 2, \dots, L\} \\ p_k(i,j) \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, \dots, L\}, k, j \in \{1, 2, \dots, K\} \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{P}_k$  为  $L \times L$  行置换矩阵,其元素为  $p_k(i, j)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $\mathbf{P}_k$  的每行每列只有一个元素为 1, 其余元素均为 0,  $A$  为通信方归一化总功率。则  $\mathbf{X}$  中各列元素的调整可通过求解  $K$  个列置换矩阵  $\mathbf{P}_k$  实现,而  $\mathbf{P}_k$  的求解可转化为标准的线性规划模型,具体步骤如下:

**步骤1:** 确定待求未知向量  $\mathbf{V}$ 。将  $K$  个待求的  $L \times L$  行置换矩阵  $\mathbf{P}_k$  转换为列向量并连接作为待求未知向量  $\mathbf{V}$ , 即  $\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_{K \times L \times L}] = \& \left[ \text{reshape}(\mathbf{P}_k, L \times L, 1) \right]$ 。其中,  $\text{reshape}(\mathbf{P}_k, L \times L, 1)$  表示将  $L$  行  $L$  列的  $\mathbf{P}_k$  矩阵转换为  $L \times L$  元素的列矩阵,  $\&[\cdot]$  表示  $K$  个向量连接。

**步骤2:** 确定约束矩阵方程  $\mathbf{CV} = \mathbf{b}$ 。约束矩阵方程由式(17)中的 3 个等式约束转换得到,  $\mathbf{C}$  矩阵共  $(2K+1)L$  行,  $KL^2$  列, 满足

$$c(i,j) = \begin{cases} x_k^*(j), i \in \{1,2,\dots,L\}, j = (k+i-1)L + \{1,2,\dots,L\}, k \in \{1,2,\dots,K\} \\ 1, i \in \{L+1,L+2,\dots,(K+1)L\}, \\ j = (i-L-1)L + \{1,2,\dots,L\} \\ 1, i \in \{(K+k)L + \{1,2,\dots,L\}, \\ j = i - (K+k-k')L, k, k' \in \{1,2,\dots,K\} \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $c(i,j)$  为  $C$  的第  $i$  行、第  $j$  列元素。向量  $\mathbf{b} = [K \times \text{mean}(\mathbf{x}_k^*) \times \mathbf{1}_L, \mathbf{1}_{2KL}]$ , 其中,  $\text{mean}(\mathbf{x}_k^*)$  表示  $\mathbf{x}_k^*$  的均值,  $\mathbf{1}_L$  和  $\mathbf{1}_{2KL}$  分别表示  $L$  个和  $2KL$  个元素全为 1 的列向量。

**步骤 3:** 确定优化目标  $f$ 。事实上, 仅需求解约束方程即可, 但为了利用线性规划工具, 定义优化

$$\text{目标 } f = \min \sum_{i=1}^{KL^2} v_i。$$

**步骤 4:** 求解整数线性规划。综合步骤 1 ~ 3, 该线性规划问题的标准表达式如下:

$$f = \min_v \sum_{i=1}^{KL^2} v_i$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{CV} = \mathbf{b} \\ 0 \leq c(i,j) \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

任意满足式 (19) 约束的整数解均能使优化目标  $f$  达到其极小值  $KL$ , 该解可通过 MATLAB、LINGO 等工具软件中的线性规划工具箱求得。

**步骤 5:** 构建  $K$  信道混合策略功率分配矩阵。求得未知向量  $\mathbf{V}$  后将其等分为  $K$  个列向量, 并分别转换回  $\mathbf{P}_k$ , 即

$$\mathbf{P}_k = \text{reshape}([v_{(k-1)KL+1}, v_{(k-1)KL+2}, \dots, v_{kKL}], K, L)$$

最后, 再利用式 (16) 求得  $\mathbf{X}^*$ 。

例如, 当  $K=2, \mathbf{x}_k^* = [1, 2, 3]^T$  时,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为 15 行 18 列等式约束矩阵。  $\mathbf{b} = [4, 4, 4, 1, 1, \dots, 1]^T$  包含 3 个 4, 12 个 1。求解该线性规划可得:  $\mathbf{V} = [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1,$

$$0]^T, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}。$$

使用该线性规划方法构造  $K$  信道混合策略功率分配矩阵所求解的未知数为  $KL^2$  个, 当  $KL^2$  较小时 ( $KL^2 < 1000$ ), 使用 MATLAB 可快速求解; 但当  $KL^2$  较大时, 求解该线性规划耗时急剧增加, 甚至难以找到可行解。

### 3.2 多重扫描直接列元素交换算法

针对线性规划方法的不足, 提出了多重扫描直接列元素交换算法来构造混合策略功率分配矩阵, 算法流程如图 4 所示。

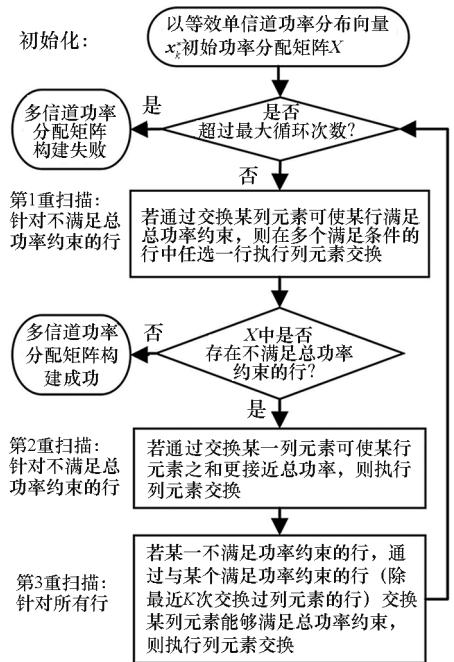


图 4 多重扫描直接列元素交换算法流程

Fig. 4 Flowchart of the Multi-scan direct column element exchange algorithm

图 4 中仍以  $\mathbf{x}_k^*$  作为通信方  $K$  信道初始功率分配矩阵  $\mathbf{X}$  的  $K$  列元素, 然后通过 3 重扫描  $\mathbf{X}$  中不满足总功率约束的行或所有行, 并通过交换列元素, 在不改变每列分布的条件下, 使每行满足总功率约束。具体实现见算法 1。

算法 1 中,  $\text{row}(\mathbf{F}_r)$  表示矩阵  $\mathbf{F}_r$  的行数,  $\text{length}(\mathbf{chx\_n})$  表示向量  $\mathbf{chx\_n}$  的元素个数,  $\text{find}(\mathbf{X}(\mathbf{F}_r, k) == \mathbf{X}(\mathbf{F}_r(i), k) - \text{sum}(\mathbf{X}(\mathbf{F}_r(i), :) - A))$  为在  $\mathbf{F}_r$  中所有不满足功率约束的行的第  $k$  列寻找能够使第  $i$  行之和为  $A$  的元素, 并记其集合为向量  $\mathbf{chx\_n}, \mathbf{chx\_n}(\text{randi}(\text{length}(\mathbf{chx\_n})))$

为在向量  $\mathbf{chx}_n$  中随机选择一个元素,  $\text{exchange}(X(i, k), X(j, k))$  表示将矩阵  $X$  中第  $i$  行  $k$  列的元素与第  $j$  行  $k$  列的元素互换位置,  $\text{rem}(i, \text{length}(F_r))$  表示  $i$  对向量  $F_r$  的长度求余。

### 算法1 多重扫描直接列元素交换算法

Alg.1 Multi-scan direct column element exchange algorithm

初始化:  $X = [x_k^*, x_k^*, \dots, x_k^*]$ , 共  $K$  列; 不满足功率约束的行号集合  $F_r = X$ , 经最近  $K$  次调整满足功率约束的行号集合  $S_r = \emptyset$ ; 设置最大扫描次数为  $\text{loop\_max}$

1. 多重扫描列元素交换:

While( $\text{loop} < \text{loop\_max}$ )

While( $i < \text{row}(F_r)$ )

不满足功率约束的行扫描并进行列元素交换

for  $k = 1, 2, \dots, K$  do

$$\mathbf{chx}_n = \text{find}(X(F_r, k) == X(F_r(i), k) - \text{sum}(X(F_r(i), :) - A));$$

if  $\mathbf{chx}_n \neq \emptyset$  then

$$\mathbf{chx} = \mathbf{chx}_n(\text{randi}(\text{length}(\mathbf{chx}_n)))$$

$$\text{exchange}(X(F_r(\mathbf{chx}), k), X(F_r(i), k))$$

$$S_r = [S_r(2:K-1), i], F_r = F_r / F_r(i)$$

if  $F_r == \emptyset$  then

jump to 3.

end if

end if

end for

$i = i + 1$

end while

对不满足功率约束的行, 通过交换列元素, 使行元素之和更加接近总功率约束

for  $i = 1 : \text{length}(F_r)$

for  $j = i + 1 : \text{length}(F_r)$

for  $k = 1, 2, \dots, K$

$$d = \text{sum}(F_r(i, :)) - \text{sum}(F_r(j, :))$$

if  $(0 < |X(F_r(i), k) - X(F_r(j), k)| < |d|)$  then

$$\text{exchange}(X(F_r(i), k), X(F_r(j), k))$$

end if

end for

end for

end for

对不满足功率约束的行, 在  $X$  除去  $S_r$  的所有行中搜索能够使其满足总功率约束的元素并交换

$$W_r = (1:L) / S_r$$

while ( $k \leq K$ )

$$\mathbf{chx}_n = \text{find}(X(W_r, k) == X(F_r(i), k) - \text{sum}(X(F_r(i), :) - A))$$

if  $\mathbf{chx}_n \neq \emptyset$  then

算法1(续)

$$\mathbf{chx} = \mathbf{chx}_n(\text{randi}(\text{length}(\mathbf{chx}_n)))$$

$$\text{exchange}(X(W_r(\mathbf{chx}), k), X(F_r(i), k))$$

$$S_r = [S_r(2:k-1), i], F_r = [F_r / F_r(i), \mathbf{chx}]$$

break

else

if  $k = K$  then

$$k = 1, i = \text{rem}(i, \text{length}(F_r)) + 1$$

else

$$k = k + 1$$

end if

end if

end while

$$\text{loop} = \text{loop} + 1$$

end while

2. 调整失败, 返回初始化再次重启算法

3. 调整成功, 输出  $X^*$

使用算法1, 可根据单信道功率分布快速构建通信对抗双方的功率分配矩阵, 对于本文用于数值试验的4信道、每信道78种分布的功率分布矩阵构造, 多数情况下在20次循环内可完成, 耗时仅需数秒。而用线性规划方法, 运行1h以上仍得不到可行解。

## 4 数值仿真验证

选择2组参数对所提定理进行仿真验证, 2组参数分别对应定理1和定理2所提的2种功率分布, 且与图2、图3所用参数保持一致。

### 4.1 第1组参数仿真验证结果

对于第1组参数, 根据定理1, 通信方的最佳功率分配策略  $\mathbf{x}_k^* = \{2, 3, \dots, 14\}$ , 干扰方最佳功率分配策略为  $\mathbf{y}_k^* \sim \frac{1}{3}O + \frac{2}{3}U(0, 12)$  ( $\mathbf{y}_k^* \sim \frac{5}{13}O + \frac{8}{13}U(0, 13)$  时不满足总功率约束)。根据  $\mathbf{x}_k^*$  和  $\mathbf{y}_k^*$ , 利用多重扫描直接列元素交换算法, 可快速构建出通信对抗双方的3信道混合策略最优功率分配矩阵, 分别如图5、图6所示。

图5所示为通信方最优功率分配矩阵  $X^*$ 。可见,  $X^*$  为服从  $\mathbf{x}_i^*$  分布且满足总功率约束的通信方全信道功率分配策略。类似地, 图6给出了干扰方满足  $\mathbf{y}_k^*$  分布和总功率约束的混合策略功率分配矩阵  $Y^*$ , 共39种纯策略, 为干扰方以  $\Phi_j = 13$  为上限的部分信道功率均匀分布策略。

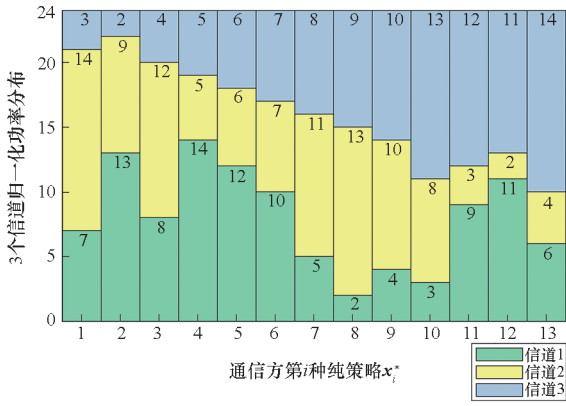


图5 第 1 组参数下通信方最优混合策略功率分配矩阵

Fig.5 Optimal mixed strategy power allocation matrix of the communication system under the first set of parameters

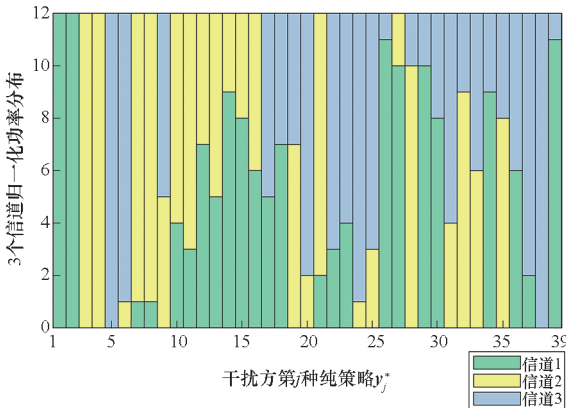


图6 第 2 组参数下干扰方最优混合策略功率分配矩阵

Fig.6 Optimal mixed strategy power allocation matrix of the jammer under the second set of parameters

通信方和干扰方分别在图 5 和图 6 给出的最优混合策略功率分配矩阵  $X^*$  和  $Y^*$  中随机选取各列元素  $x_i^*$  和  $y_j^*$ , 即为通信对抗双方多信道功率分配博弈的混合纳什均衡策略。

图 7 给出了在第 1 组仿真参数下通信对抗双方不同纯策略组合下的通信方收益, 其中,  $x_i^* \text{ vs } y_j^*$  表示最优混合策略矩阵  $X^*$  和  $Y^*$  中任意一对纯策略组合下的通信方收益,  $x_i^* \text{ vs } Y^*$  给出了通信方第  $i$  个最优纯策略对应干扰方最优混合策略  $Y^*$  的通信方收益,  $X^* \text{ vs } y_j^*$  为干扰方第  $j$  个最优纯策略对应通信方最优混合策略  $X^*$  时的通信方收益。此外, 为进一步验证所提策略的最优性, 仿真中还增加了通信方和干扰方的随机策略功率分配矩阵, 分别记为  $X^R$  和  $Y^R$ , 即通信方和干扰方均随机选择各信道归一化功率分配值, 但仍需满足总功率约束。  $x_i^R \text{ vs } Y^*$  表示通信方第  $i$  个随机纯策略对应干扰方最优混合策略  $Y^*$  的通信方收益,  $X^* \text{ vs } y_j^R$  表示干扰方第  $j$  个随机纯策略对应通信

方最优混合策略  $X^*$  时的通信方收益。

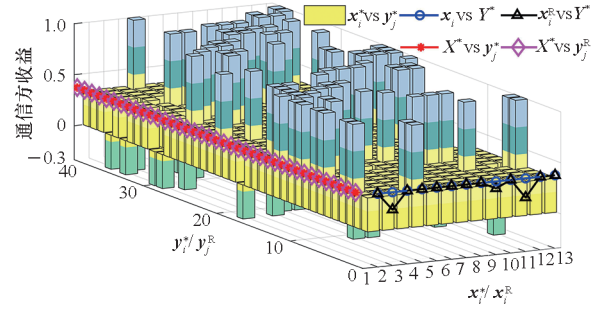


图7 第 1 组参数下各种策略组合的通信方收益

Fig.7 Payoff of the communication system with various strategies combinations under the first set of parameters

由  $x_i^* \text{ vs } y_j^*$  可见, 对于通信方或干扰方的任一纯策略, 对方都存在纯策略使通信方收益低于或高于纳什均衡收益, 由此说明该博弈不存在纯策略纳什均衡; 而  $x_i^* \text{ vs } Y^*$  和  $x_i^R \text{ vs } Y^*$  表明, 对于干扰方最优混合策略  $Y^*$ , 通信方的任一纯策略  $x_i^*$  或  $x_i^R$  均不能使通信方收益高于纳什均衡收益 0.384 6。其中, 由于  $x_i^R$  存在不符合通信方最优功率分布的情况, 使得对应纯策略的通信方收益低于纳什均衡收益, 如  $x_{i=3}^R = [0, 8, 16]$  不符合通信方全信道功率分布策略, 导致其收益低于纳什均衡收益; 类似地,  $X^* \text{ vs } y_i^*$  和  $X^* \text{ vs } y_j^R$  表明, 对于通信方最优混合策略  $X^*$ , 干扰方的任一纯策略  $y_j^*$  或  $y_j^R$  均不能使通信方收益低于纳什均衡收益 0.384 6。图 7 中曲线  $X^* \text{ vs } y_i^*$  和  $X^* \text{ vs } y_j^R$  完全重合, 也即干扰方以任意纯策略应对通信最优混合策略  $X^*$  时, 通信方收益完全一致, 这是因为干扰方的最优功率分配矩阵  $Y^*$  包括了所有可能的策略, 包括  $y_j^R$ 。

### 4.2 第 2 组参数仿真验证结果

对于第 2 组参数, 根据定理 2, 通信方的最优功率分配策略对应的通信方功率分布上限应取  $\Gamma_S = \lceil n + u + \sqrt{n(n+2u-1)} - 1 \rceil = 16$ , 所以  $x_k^\diamond \sim \frac{2}{5}O + \frac{3}{5}U(4, 16)$ ; 干扰方功率分布上限为  $\Phi_J = \Gamma_S - u = 12$  或  $\Phi_J = \Gamma_S - u + 1 = 13$ , 所以  $y_k^\diamond \sim \frac{1}{6}O + \frac{5}{6}U(0, 12)$  或  $y_k^\diamond \sim \frac{3}{13}O + \frac{10}{13}U(0, 13)$  均满足干扰总功率约束, 但显然前者包含的纯策略数(78 个)少于后者(91 个), 其混合策略矩阵更容易构建。根据  $x_k^\diamond$  和  $y_k^\diamond$ , 利用所提多重扫描直接列元素交换算法, 可快速构建  $X^\diamond$  和  $Y^\diamond$ , 分别如图 8、图 9 所示。

图 8 对应第 2 组参数下, 通信方满足  $x_i^\diamond$  分

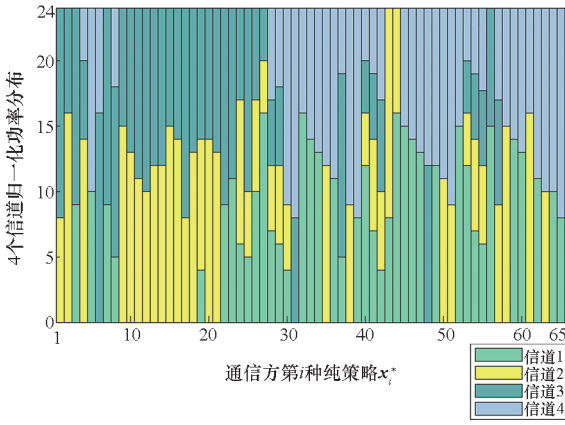


图8 第2组参数下通信方最优混合策略功率分配矩阵

Fig.8 Optimal mixed strategy power allocation matrix of the communication system under the second set of parameters

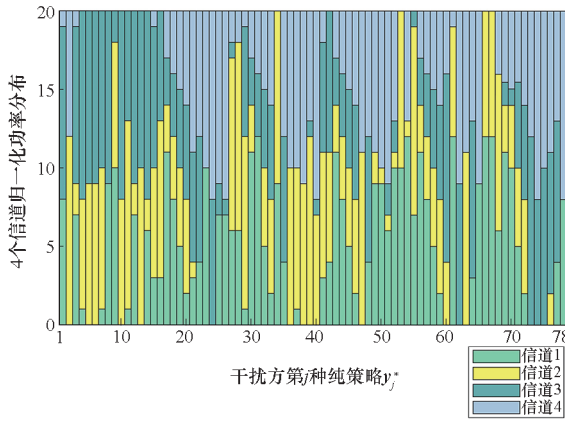


图9 第2组参数下干扰方最优混合策略功率分配矩阵

Fig.9 Optimal mixed strategy power allocation matrix of the jammer under the second set of parameters

布和总功率约束的最优混合策略功率分配矩阵  $X^\diamond$ ,共65种纯策略,为通信方以  $\Gamma_s = 16$  为上限的部分信道功率均匀分布;图9为第2组参数下干扰方满足  $y_j^\diamond$  分布和总功率约束的最优混合策略功率分配矩阵  $Y^\diamond$ ,共78种纯策略,为干扰方以  $\Phi_j = 12$  为上限的部分信道功率均匀分布。

通信方和干扰方分别在图8和图9给出的混合策略功率分配矩阵  $X^\diamond$  和  $Y^\diamond$  中随机选取各列元素  $x_i^\diamond$  和  $y_j^\diamond$ ,即通信对抗双方多信道功率分配博弈的混合纳什均衡策略。

图10给出了第2组仿真参数下通信对抗双方各种策略组合下的通信方收益,与图7类似,三维柱状图  $x_i^\diamond$  vs  $y_j^\diamond$  表明通信对抗双方不存在纯策略纳什均衡,对于通信方或干扰方的任一纯策略,对方都存在使通信方收益低于或高于纳什均衡收益的策略;对于通信方最优混合策略  $X^\diamond$ ,干扰方的任一纯策略  $y_j^\diamond$  或  $y_j^R$  均不能使通信方收

益低于纳什均衡收益  $-0.2615$ ,但当干扰方随机选择的策略不符合最优功率分布  $y_j^\diamond$  时,将使得通信方收益高于纳什均衡收益。对于干扰方最优混合策略  $Y^\diamond$ ,通信方最优混合策略矩阵中的任一纯策略  $x_i^\diamond$  所得通信方收益均分布于纳什均衡收益两侧,其均值为纳什均衡收益。在完全信息条件下,即干扰方能即时获得通信方混合功率分布策略时,通信方任何偏离最优混合策略的其他策略,如通信方以较大的概率使用收益高于纳什均衡收益的纯策略,都会导致干扰方针对性干扰策略,使得平均收益低于纳什均衡收益,因此通信方不会偏离其最优混合策略  $X^\diamond$ 。但在不完全信息条件下,即干扰方不能快速获取到通信方的混合功率分布策略时,通信方可以更大的概率使用收益高于纳什均衡收益的纯策略,提高通信方收益。此外,若通信方使用随机分配策略  $x_i^R$ ,则如曲线  $x_i^R$  vs  $Y^\diamond$  所示,通信方收益明显低于纳什均衡收益。

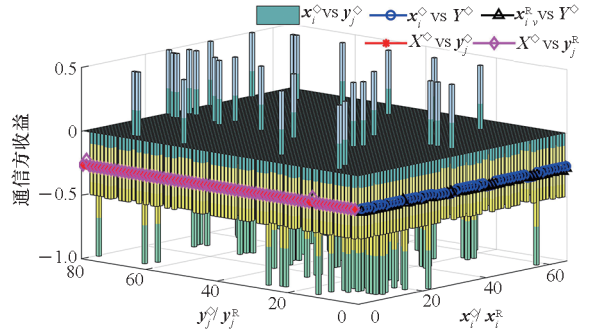


图10 第2组参数下各种策略组合的通信方收益

Fig.10 Payoff of the communication system with various strategies combinations under the second set of parameters

为显示更清晰,将图10中  $x_i^\diamond$  vs  $Y^\diamond$ 、 $x_i^R$  vs  $Y^\diamond$ 、 $X^\diamond$  vs  $y_j^\diamond$  和  $X^\diamond$  vs  $y_j^R$  4条曲线,也即通信方或干扰方某一纯策略与对方最优混合策略组合下的通信方收益,放大显示于图11的二维图中,其横轴为通信方或干扰方的某一纯策略,纵轴为通信方收益,可见,干扰方不存在使通信方收益低于其纳什均衡收益的策略,而通信方最优混合策略  $X^\diamond$  中所有纯策略的平均收益也等于其纳什均衡收益。

### 5 结论

本文提出一种非对称 Colonel Blotto 博弈并将其应用于通信对抗双方多信道功率分配博弈,推导出了不同功率约束下通信对抗双方的最优功率分配策略,并证明了混合策略均衡的存在性和唯一性。提出了基于多重扫描直接列元素交换算

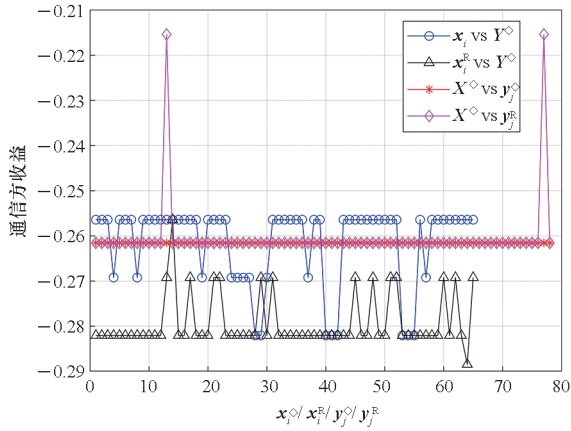


图 11 第 2 组参数下通信方或干扰方纯策略与对方最优混合策略组合下的通信方收益

Fig. 11 Payoff of the communication system with the combinations of a pure strategy and the optimal mixed strategy of the opponent under the second set of parameters

法,使得通信对抗双方可根据各自等效单信道最优功率分布构建多信道混合策略功率分配矩阵。最后仿真验证了所提理论的正确性及算法的有效性。不足之处在于,本文仅考虑了通信对抗双方总功率均能够被信道数整除的情况,且信道均为一致的白噪声信道。因此,进一步研究方向包括通信对抗双方总功率不能被信道数整除以及各信道状态不一致时的功率分配博弈。这些条件下,博弈模型的建立和求解将变得更加困难,因而拟采用对抗学习的方法来解决该问题。

## 参考文献 (References)

- [1] YAO F Q, JIA L L, SUN Y M, et al. A hierarchical learning approach to anti-jamming channel selection strategies [J]. *Wireless Networks*, 2019, 25(1): 201–213.
- [2] ZAPPONE A, SANGUINETTI L, DEBBAH M. Energy-delay efficient power control in wireless networks [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2018, 66(1): 418–431.
- [3] LUO J, PAN C, LI R F, et al. Power control in distributed wireless sensor networks based on noncooperative game theory[J]. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2012, 8(12): 398460.
- [4] YANG G L, LI B, TAN X Z, et al. Adaptive power control algorithm in cognitive radio based on game theory[J]. *IET Communications*, 2015, 9(15): 1807–1811.
- [5] CHAI B, DENG R L, SHI Z G, et al. Energy-efficient power allocation in cognitive sensor networks: a coupled constraint game approach [J]. *Wireless Networks*, 2015, 21(5): 1577–1589.
- [6] SLIMENI F, SCHEERS B, LE NIR V, et al. Learning multi-channel power allocation against smart jammer in cognitive radio networks [C]//*Proceedings of International Conference on Military Communications and Information Systems*, 2016: 1–7.
- [7] LIU H. SINR-based multi-channel power schedule under DoS attacks; a Stackelberg game approach with incomplete information [J]. *Automatica*, 2019, 100: 274–280.
- [8] YANG D J, XUE G L, ZHANG J, et al. Coping with a smart jammer in wireless networks: a stackelberg game approach [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2013, 12(8): 4038–4047.
- [9] NAJEH S, BOUALLEGUE A. Game theory for SINR-based power control in device-to-device communications [J]. *Physical Communication*, 2019, 34: 135–143.
- [10] HU R X, LOK T M. Pareto optimality for the single-stream transmission in multiuser relay networks [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(10): 6503–6513.
- [11] LI T T, SONG T L, LIANG Y. *Wireless communications under Hostile jamming: security and efficiency* [M]. Singapore: Springer Singapore, 2018.
- [12] WU N, ZHOU X, SUN M. Multi-channel jamming attacks against cooperative defense: a two-level Stackelberg game approach [C]//*Proceedings of 18th IEEE International Conference on Communications*, 2018.
- [13] WU Y L, WANG B B, LIU K J R, et al. Anti-jamming games in multi-channel cognitive radio networks [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2012, 30(1): 4–15.
- [14] TAN C K, SIM M L, CHUAH T C, et al. Blotto game-based low-complexity fair multiuser subcarrier allocation for uplink OFDMA networks [J]. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2011, 2011(1): 1–14.
- [15] KIM S. Cognitive radio anti-jamming scheme for security provisioning IoT communications [J]. *KSI Transactions on Internet and Information Systems*, 2015, 9(10): 4177–4190.
- [16] MAIOLI A C, PASSOS M H M, BALTHAZAR W F, et al. Quantization and experimental realization of the Colonel Blotto game [J]. *Quantum Information Processing*, 2018, 18(1): 1–20.
- [17] HART S. Discrete Colonel Blotto and General Lotto games [J]. *International Journal of Game Theory*, 2008, 36(3/4): 441–460.
- [18] BA A, BLE B, SJJ C. The multiplayer Colonel Blotto game [J]. *Games and Economic Behavior*, 2021, 129: 15–31.
- [19] RINOTT Y, SCARSINI M, YU Y M. A Colonel Blotto gladiator game [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2012, 37(4): 574–590.
- [20] ROBERSON B. The Colonel Blotto game [J]. *Economic Theory*, 2006, 29(1): 1–24.