

两层及三层流体间内波理论研究进展*

赵彬彬¹, 张天钰¹, 杜辉², 段文洋¹, 王战^{1,3}

(1. 哈尔滨工程大学船舶工程学院, 黑龙江哈尔滨 150001; 2. 国防科技大学气象海洋学院, 湖南长沙 410005;

3. 哈尔滨工程大学青岛哈尔滨工程大学创新发展中心, 山东青岛 266000)

摘要:内波作为一种发生在层化海洋内部的波动,在世界海洋范围内普遍存在。深入研究内波生成、演化等特性,对我国的海洋开发有着重要意义。针对两层及三层流体间内波理论,选取目前国内外广泛应用的 KdV (Korteweg-de Vries) 内波理论、MCC (Miyata-Choi-Camassa) 内波理论、层析内波理论以及 DJL (Dubreil-Jacotin-Long) 内波理论综述其研究进展。从数学模型、理论研究以及数值模拟等方面,讨论了不同内波理论的优势以及局限性。从数学推导的角度,证明了 MCC 内波理论与第一级别层析内波理论是一致的。

关键词:内波; KdV 内波理论; MCC 内波理论; 层析内波理论; DJL 内波理论; 两层流体; 三层流体

中图分类号: O352 文献标志码: A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1001-2486(2023)04-124-12



听语音
与作者互动
聊科研

Progress in internal wave theory for two-layer and three-layer fluid systems

ZHAO Binbin¹, ZHANG Tianyu¹, DU Hui², DUAN Wenyang¹, WANG Zhan^{1,3}

(1. College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

2. College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Changsha 410005, China;

3. Qingdao Innovation and Development Center of Harbin Engineering University, Harbin Engineering University, Qingdao 266000, China)

Abstract: Internal waves, occurring in stratified ocean, are ubiquitous in the world oceans. It is of great significance for our country's marine development to study the generation and evolution of internal waves. Based on the internal wave theory of two-layer and three-layer fluid systems, the KdV (Korteweg-de Vries) internal wave theory, MCC (Miyata-Choi-Camassa) internal wave theory, HLGN (high-level Green-Naghdi) internal wave theory and Dubreil-Jacotin-Long internal wave theory, which were widely used at home and abroad, were selected to review their research progress. The advantages and limitations of different internal wave theories were discussed from mathematical models, theoretical research and numerical simulations. In the view of mathematical derivation, it is proved that MCC internal wave theory is equivalent to the first-level HLGN internal wave theory.

Keywords: internal wave; KdV internal wave theory; MCC internal wave theory; HLGN internal wave theory; DJL internal wave theory; two-layer fluid system; three-layer fluid system

在海洋中,盐度和温度的垂向差异,导致海水密度垂向分布不均匀,最终出现密度层化现象,并存在密度跃层。内波则是在这种密度稳定层化海洋中产生的,最大振幅出现在海洋内部的波动。对内波最早的观测来自 1893 年发生在北极的“死水现象”^[1],随着温探仪的发明以及卫星遥感技术的发展,内波的观测工作也相继发展了起来。内波被发现广泛存在于世界海洋范围内^[2],尤其

集中分布在大陆架以及边缘海^[3]。

由于实际海洋密度变化较小,约化重力比重力小得多,较小的扰动就会引发大幅内波^[4]。相对于表面波而言,内波的波幅往往更大,携带的能量也更大,其在传播过程中会导致海水强烈辐聚和突发性强流;此外,由于难以观测和防范,内波给石油钻井平台、海底管道和潜艇等海洋结构物带来巨大的威胁。典型的内波事件如:美国“大

* 收稿日期:2023-03-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12202114,52261135547);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(3072022FSC0101)

作者简介:赵彬彬(1984—),男,河南舞钢人,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhaobinbin@hrbeu.edu.cn;

段文洋(通信作者),男,河北衡水人,教授,博士,博士生导师,E-mail:duanwenyang@hrbeu.edu.cn

“鲨鱼”号核潜艇于1963年因遭遇大幅内波而失事,129人无一生还;我国南海的石油钻井机在内孤立波经过时锚定的油罐箱在不到5 min内摇摆了 110° ^[5];我国南海舰队372号潜艇于2014年因遭遇海洋内波而意外下沉,最终依靠全艇人员的共同努力化险为夷,这也是目前仅有的一次潜艇遭遇内波后自救成功的案例;印尼“南伽拉”号潜艇于2021年在军演中失事,其原因很大可能也是遭遇大幅内波^[6]。

内波作为一种海洋中常见的自然现象,在全球的各大海域内频繁出现^[7]。据Jackson^[2]统计,在2002年8月至2004年5月期间,在全球15个主要海域观测到内波多达3 581次。我国南海更是内波最为活跃、生成和演变机制最为复杂的海域^[8-10]。在“亚洲海国际声学试验”项目上,南海北部的内波研究取得了一系列突破性成果^[11],因此,南海也成为内波研究的热点海区。Huang等^[12]在吕宋海峡西口观测到内孤立波的波幅高达240 m,为世界之最。因此,深入研究海洋内波,尤其是大幅内孤立波特性,探明内波的生成、发展、演化及传播机制,对海洋结构物的环境载荷评估以及海洋资源开发都具有重要意义^[13]。

在内波的理论研究中,根据实际海洋的密度层结,一般用两层或三层流体系统进行近似。因此,本文针对两层及三层流体间内波理论进行介绍,选取了国内外广泛使用的内波理论,包括KdV(Korteweg-de Vries)内波理论、MCC(Miyata-choi-Camassa)内波理论、层析内波理论以及DJL(Dubreil-Jacotin-Long)内波理论,并分析了不同理论的各自优势及局限性,为读者未来开展内波研究提供理论基础。

1 多层流体间内波基本方程

为了便于理解两层及三层流体间内波问题,首先对多层常密度流体间内波的控制方程及边界条件进行介绍。考虑二维情况下,假定各层流体均无黏性、不可压缩且忽略表面张力,不同密度、不互溶流体组成的多层流体系统,如图1所示。建立直角坐标系 oxz ,其中, ox 轴与自由面重合,向右为正, oz 轴垂直向上为正。 h_i ($i=1,2,\dots,M$)为流体未受扰动时的每层流体厚度。 ρ_i 为每层流体的密度, $\eta_i(x,t)$ 代表每层流体的厚度, $\zeta_i(x,t)$ 代表各内界面上的位移, ζ_0 为自由面位移。

流体流动需要满足质量守恒方程以及动量守恒方程。

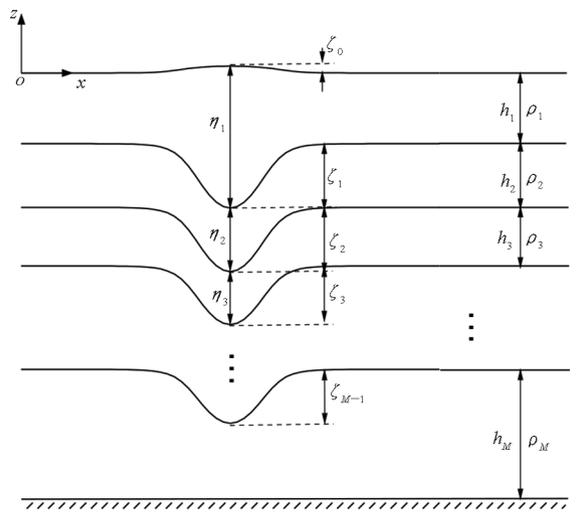


图1 多层流体系统示意图

Fig. 1 Sketch of a multi-layer fluid system

$$u_{i,x} + w_{i,z} = 0 \tag{1}$$

$$u_{i,t} + u_i u_{i,x} + w_i w_{i,z} = -p_{i,x} / \rho_i \tag{2}$$

$$w_{i,t} + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z} = -p_{i,z} / \rho_i - g \tag{3}$$

其中: $i=1,2,\dots,M$;下标 x 和 z 代表对空间求一阶导数,下标 t 代表对时间求一阶导数, u_i 及 w_i 分别代表水平方向和垂直方向上的速度分量, p_i 为压力, ρ_i 为密度, g 为重力加速度。

对于第 i 层流体,需要满足上、下界面的运动学边界条件为:

$$\begin{cases} w_i = \zeta_{i-1,t} + u_i \zeta_{i-1,x} & \text{在 } z = \zeta_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j \text{ 处} \\ w_i = \zeta_{i,t} + u_i \zeta_{i,x} & \text{在 } z = \zeta_i - \sum_{j=1}^i h_j \text{ 处} \end{cases} \tag{4}$$

同时,在内界面上需要满足压力连续条件

$$\bar{p}_{i-1} = \hat{p}_i \quad \text{在 } z = \zeta_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j \text{ 处} \tag{5}$$

即第 $i-1$ 层流体下表面压力 \bar{p}_{i-1} 等于第 i 层流体上表面压力 \hat{p}_i 。

以上构成了描述多层流体间内波的基本控制方程和边界条件。当 $M=2$ 时代表两层流体系统, $M=3$ 时代表三层流体系统。

2 两层流体间内波理论

在内波问题的研究中,通常忽略密度跃层厚度的影响,将实际海洋简化为两层流体系统。在两层流体间内波理论中,国内外广泛应用的主要为KdV内波理论、MCC内波理论以及层析内波理论。本节介绍了这三种内波理论的理论方程,综述其研究进展,并归纳各自的优势及局限性,为两层流体间内波问题的研究提供理论基础。

由于实际海洋中表面波波幅相比于内波波幅要小很多,在实际研究中为了进一步简化问题,通常忽略自由面影响,引入刚盖(rigid lid, RL)近似,如图 2(a)所示。然而在针对内波的表面波特性研究时,就需要考虑自由面(free surface, FS)影响,如图 2(b)所示。本节中,针对三种内波理论分别给出了刚盖近似下以及保留自由面的理论方程。

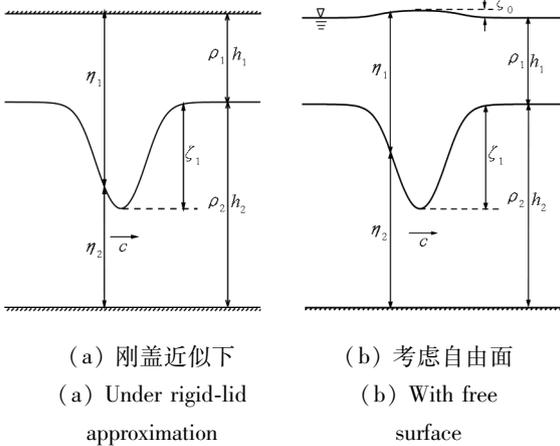


图 2 两层流体系统示意图

Fig. 2 Sketch of a two-layer fluid system

2.1 KdV 内波理论

对于密度分层海洋中内波的传播演化特性,主要用两个参数衡量,即代表非线性的参数 ϵ 和代表色散性的参数 μ 。对于两层有限深度流体系统,定义 $\epsilon = a/h_1$ (a 为波幅), $\mu = (h_1 + h_2)/\lambda$ (λ 为特征波长)。当 $\epsilon = O(\mu^2) \ll 1$ (即弱非线性和弱色散性且二者平衡假定) 时,根据两层流体间内波控制方程可以推导出经典的 KdV 方程^[14]:

$$\zeta_{1,t} + c_0 \zeta_{1,x} + c_1 \zeta_1 \zeta_{1,x} + c_2 \zeta_{1,xxx} = 0 \quad (6)$$

其中, ζ_1 为两层流体间内界面位移,对于刚盖近似下的两层流体系统,如图 2(a) 所示, c_0 、 c_1 和 c_2 为:

$$\begin{cases} c_0 = \sqrt{\frac{gh_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}} \\ c_1 = \frac{-3c_0 (\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1^2)}{2h_1 h_2 (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \\ c_2 = \frac{c_0 h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{6(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \end{cases} \quad (7)$$

对于保留自由面的两层流体系统,如图 2(b) 所示, c_1 和 c_2 存在差异^[15],具体表示为:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3c_0}{2h_2} \frac{1 + \bar{\rho} h_1 h_2^2 / s^3}{1 + \bar{\rho} h_1 h_2 / s^2} \\ c_2 = \frac{c_0 h_2^2}{6} \frac{1 + \bar{\rho} h (3 + 3h_1 / s + h_1^2 / s^2)}{1 + \bar{\rho} h_1 h_2 / s^2} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $s = c_0^2/g - h_1$, $\bar{\rho} = \rho_1/\rho_2$, $\bar{h} = h_1/h_2$ 。

在内波特性的研究上,KdV 内波理论显示了

较好的适用性^[16]。Grue 等^[17]发现 KdV 内波理论可以准确描述波幅 $\epsilon < 0.4$ 范围内的内孤立波波特性,然而对于大幅强非线性内孤立波,KdV 内波理论难以给出让人满意的结果。黄文昊等^[18]和邹雨等^[19]在内波理论适用范围的研究中也得到了类似的结论。这是由于传统的 KdV 内波理论仅保留了平方非线性项,伴随着内孤立波的波幅增大,其非线性在增强,高阶非线性项的贡献愈发显著,同时,内孤立波的非线性 and 色散性也可能不再平衡,最终导致了传统的 KdV 理论不再适用。

为了进一步改善传统 KdV 内波理论的性能,通过引入三阶非线性项,可以得到 eKdV (extended KdV) 内波理论^[20]。研究表明,eKdV 内波理论在波幅上的适用范围更广,能准确描述稍大波幅的内孤立波波特性,但对于超出了其极限波幅的内孤立波,eKdV 内波理论则无法适用。

需要注意的是,当上、下层流体的厚度比 h_1/h_2 达到临界值 $\sqrt{\rho_1/\rho_2}$ 时,式(7)中 c_1 的值为 0,这就导致了 KdV 及 eKdV 内波理论不再适用。为了弥补这一缺陷, Machallet 和 Bathelemy^[21]通过对 KdV 内波理论进行修正,得到了 mKdV (modified KdV) 内波理论。

KdV 内波理论及其扩展理论,被广泛应用于内波的生成、传播以及演化等问题上。Melville 等^[22]建立了两层流体间 fKdV (forced KdV) 内波理论,用于模拟局部地形上的正压潮流生成内波。该理论可以用来研究流速以及海底地形特征对生成内波特性的影响^[23]。针对内波的传播与演化问题,KdV 内波理论被应用于分析内孤立波在陆坡陆架地形上的传播演化特性,包括极性转变、变形和分裂等^[24-25]。Cai 等^[26]利用改进 eKdV 方程,建立内孤立波规范化长波传播方程,用于模拟南海陆坡处的内孤立波,发现内波在传播过程中受到耗散作用和海底地形的影响。

在工程问题上,KdV 内波理论也有着广泛的应用。尤云祥等^[27-28]将 Morison 公式与 mKdV 内波理论结合,研究了内孤立波作用下半潜和张力腿平台的动力响应问题。黄苗苗等^[29]将 KdV 内波理论与雷诺平均纳维-斯托克斯 (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS) 方程方法相结合,研究了内波对水下航行体的水动力性能影响。Xuan 等^[30]基于 eKdV 理论和 Morison 公式,建立了内孤立波对水下细长体作用力的理论模型,给出了振幅和潜深要素对作用力的影响。Wang

等^[31]进一步基于实验结果,给出了 eKdV 内波理论下 Morison 公式中拖曳力系数和惯性力取值与雷诺数之间的对应关系。

KdV 内波理论由于其形式简单且适用范围广,在对内波现象的解释以及相关机理研究中有本质性的作用,同时在实际工程应用中是处理内波问题时使用最为广泛的内波理论。然而,由于其推导过程中引入的弱非线性假设,导致其难以描述大幅内波的强非线性特征。正如 Helfrich 等^[32]指出,尽管 KdV 理论在超出其适用范围外也能体现出较好的适用性,为了精确地描述大幅内波的特性,仍然需要有强非线性的内波理论。

2.2 MCC 内波理论

为了描述大幅内波的强非线性, Miyata^[33-34]、Choi 等^[35]基于浅水长波假设 ($h_1/\lambda \ll 1, h_2/\lambda \ll 1$), 引入刚盖近似, 如图 2(a) 所示, 得到了层平均方程^[36], 进一步推导出了 MCC-RL 内波理论为:

$$\eta_{i,t} + (\eta_i \bar{u}_i)_{,x} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_i \bar{u}_{i,x} + g \zeta_{i,x} = -\frac{P_{,x}}{\rho_i} + \frac{1}{3\eta_i} (\eta_i^3 G_i)_{,x} \quad (10)$$

其中: $i=1, 2$; \bar{u}_1 和 \bar{u}_2 是上、下层流体的层平均速度; G_1 和 G_2 是自定义函数。

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{\eta_1} \int_{\xi_1}^{h_1} u_1(x, z, t) dz \quad (11)$$

$$G_1 = \bar{u}_{1,xt} + \bar{u}_1 \bar{u}_{1,xx} - (\bar{u}_{1,x})^2 \quad (12)$$

\bar{u}_2 和 G_2 的表示与式(11)和式(12)类似。

当考虑内波的自由面效应时, 如图 2(b) 所示, Choi 等^[37]和 Barros 等^[38]推导出了 MCC-FS 内波理论。

$$\eta_{i,t} + (\eta_i \bar{u}_i)_{,x} = 0 \quad i=1, 2 \quad (13)$$

$$\bar{u}_{1,t} + \bar{u}_1 \bar{u}_{1,x} + g \zeta_{0,x} = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{3} \eta_1^3 G_1 \right)_{,x} - \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{2} \eta_1^2 D_1^2 \zeta_1 \right)_{,x} + \left(\frac{1}{2} \eta_1 G_1 - D_1^2 \zeta_1 \right) \zeta_{1,x} \quad (14)$$

$$\bar{u}_{2,t} + \bar{u}_2 \bar{u}_{2,x} + g \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \eta_1 + \zeta_1 \right)_{,x} = \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{1}{3} \eta_2^3 G_2 \right)_{,x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{1}{2} \eta_2^2 G_1 - \eta_1 D_1^2 \zeta_1 \right)_{,x} \quad (15)$$

其中, $D_i \equiv \partial_i + \bar{u}_i \partial_x$ 。需要指出的是, 在弱非线性条件下, 对于单向波, MCC 内波理论可以转化为 KdV 内波理论, 具体的推导过程可以参考 Choi 等^[35]。

在 MCC 内波理论中, 由于引入了层平均速度这一概念, 难以准确刻画内波的速度场, 为了解决

这一问题, Camassa 等^[39]基于 MCC-RL 内波理论得到的内波波面, 给出了上、下层流体质点的水平速度沿垂向分布的计算方法。赵彬彬等^[40]将其应用于 MCC-FS 内波理论的速度场研究上, 得到的速度场结果与邹丽等^[41]开展的物理实验结果吻合得很好。

在描述浅水模式 ($h_1/\lambda \ll 1, h_2/\lambda \ll 1$) 下两层流体间大幅内波稳态特性上, MCC 内波理论的准确性已经得到了相当多物理实验的验证^[15, 41-43]。正因如此, MCC 内波理论被应用到内波的传播演化等问题的研究中。针对内波在地形上的传播问题, Jo 等^[44]采用 MCC-RL 内波理论详细描述了内波的变形过程, 并指出对于大幅内孤立波的动力学特性, 弱非线性模型是不适用的。针对内波相互作用问题, Jo 等^[45]对两个等幅内孤立波的迎面碰撞问题进行了研究, Choi 等^[46]模拟了内孤立波追赶碰撞的过程。La Forgia 等^[47-48]研究了背景流对内孤立波波面形状和波速等特性的影响。Zhao 等^[49-50]分别将 MCC-RL 内波理论和 MCC-FS 内波理论应用到海底运动物体兴波问题的研究上。

在两层流体间内波的时域模拟上, 不同于表面波, 由于界面上速度的不连续性, 无黏模型会受到 KH (Kelvin-Helmholtz) 不稳定性的影响, 导致难以模拟波幅足够大的内孤立波演化过程。Jo 等^[44]对 MCC-RL 内波理论下的内孤立波进行了局部稳定性分析, 并研究了 KH 不稳定性机制。为了消除 KH 不稳定性带来的高频短波的影响, Jo 等^[45]将傅里叶滤波器应用到数值模拟中, 结果表明大振幅内孤立波可以稳定传播且不改变形式, 并且质量和能量守恒性良好。另外, 通过将 MCC 内波理论进行正则化, 同样可以消除不稳定性影响^[51-52]。

MCC 内波理论同样可以应用于实际工程问题中, 高原雪等^[53]基于 MCC 内波理论, 将上、下层平均水平速度为入口条件, 建立了两层流体中内孤立波生成与传播的 CFD 数值水槽方法。Xie 等^[54]将 MCC 内波理论与 Morison 公式相结合, 研究了内孤立波作用在小尺度杆件的载荷特性问题, 并指出如果采用 KdV 内波理论, 内波力将被低估。马孟达等^[55]将 MCC 内波理论应用到张力腿平台在海洋内孤立波中的动态载荷、运动响应以及张力腿张力变化特性等问题的研究上。

MCC 内波理论是当前国际流行的强非线性内波理论, 在描述大幅内波的强非线性特性以及研究大幅内波传播演化机理时, 其作用是不可忽略的。然而, 受限于其推导过程中的浅水长波假

设, MCC 内波理论仅适用于浅水模式内波问题。尽管 Choi^[56-57] 将 MCC 内波理论扩展到二阶, 使其在对深水模式 ($h_1/\lambda \ll 1, h_2/\lambda = O(1)$) 内波的描述上有所改善, 但是仍旧难以准确描述深水模式下的内波特性^[58]。

2.3 层析内波理论

对于深水模式下的内波问题, MCC 内波理论显然已经不再适用。然而, 在某些海域, 上下层厚度相差较大, 其密度剖面呈现“7”字型, 上下层厚度比 h_1/h_2 甚至可以达到 $1/50$ ^[59]。

为了研究深水模式下的内波, Zhao 等^[60] 基于 Webster 等^[61] 推导出的层析水波理论, 将其拓展到两层流体内波问题上, 建立了引入刚盖近似假定的层析内波理论。通过对其线性色散关系的研究, 表明层析内波理论对浅水模式和深水模式下的内波均能准确描述^[62]。

层析内波理论的基础是层析水波理论, 其概念源于连续介质力学中的 Cosserat 理论, 最先由 Green 等^[63] 应用到水波问题的研究上, 其特点是在推导过程中没有引入任何小参数, 只是引入了流体层速度假设, 因此, 层析水波理论是一个强非线性、强色散性波浪模型。

作为层析水波理论在两层系统中的扩展, 层析内波理论同样兼备强非线性、强色散性。在层析内波理论中, 假定上、下层流体质点的水平及垂向速度沿垂向均以多项式形式变化, 即

$$\begin{cases} u_i(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K_i-1} u_{n,i}(x, t)z^n \\ w_i(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K_i} w_{n,i}(x, t)z^n \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

其中: K_i 是正整数, 代表上、下层流体所选用的层析理论的级别; $u_{n,i}$ 和 $w_{n,i}$ 分别为待求的水平及垂向速度系数。这个速度假设是层析内波理论的核心, 给出了水深方向的速度变化。通过构造合适的多项式, 层析内波理论可以准确描述各种环境下的流场特性。

Zhao 等^[60] 将该速度假设代入两层流体间内波控制方程中, 推导得到了刚盖近似下的层析内波理论。

$$\zeta_{1,t} = \sum_{n=0}^{K_1} (w_{n,1} - u_{n,1}\zeta_{1,x})\zeta_1^n \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M_{1,2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\zeta_1 + h_2)(G_{0,1} + gS1_{0,1})_{,x} - \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\zeta_1 + h_2}{h_1 - \zeta_1} M_{1,1} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{M_{n,1}}{h_1^n - \zeta_1^n} - \frac{M_{n-1,1}}{h_1^{n-1} - \zeta_1^{n-1}} = 0 \quad n = 2, 3, \dots, K_1 \quad (19)$$

$$\frac{M_{n,2}}{\zeta_1^n + h_2^n} - \frac{M_{n-1,2}}{\zeta_1^{n-1} + h_2^{n-1}} = 0 \quad n = 2, 3, \dots, K_2 \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} M_{n,i} = (G_{n,i} + gS1_{n,i})_{,x} + nE_{n-1,i} - \\ \zeta_1^n (G_{0,i} + gS1_{0,i})_{,x} \quad n = 1, 2, \dots, K_i; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (21)$$

关于 $G_{n,i}, S1_{n,i}, E_{n,i}$ 和 $w_{n,i}$ 的定义可以参考层析内波理论书籍^[64], 这里由于篇幅原因不再赘述。式(17) ~ (20) 中共包含 $K_1 + K_2 + 1$ 个方程, 未知数包括 $\zeta_1, u_{n,1} (n = 0, \dots, K_1 - 1)$ 和 $u_{n,2} (n = 0, \dots, K_2 - 1)$, 同样也是 $K_1 + K_2 + 1$ 个, 方程个数和未知数个数相同, 方程组封闭可解。

当考虑自由面影响时, Zhao 等^[65] 给出了保留自由面的层析内波理论。

$$\zeta_{0,t} = \sum_{n=0}^{K_1} (w_{n,1} - u_{n,1}\zeta_{0,x})\zeta_0^n \quad (22)$$

$$\zeta_{1,t} = \sum_{n=0}^{K_2} (w_{n,2} - u_{n,2}\zeta_{1,x})\zeta_1^n \quad (23)$$

$$M_{n,1} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, K_1 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} M_{n,2} + [\zeta_1^n - (-h_2^n)] \frac{\rho_1}{\rho_2} (G_{0,1} + gS1_{0,1}) = 0 \\ n = 1, 2, \dots, K_2 \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $M_{n,1}$ 和 $M_{n,2}$ 中的 $G_{n,i}$ 等系数的定义与刚盖近似下略有不同, 具体可以参考层析内波理论书籍^[66]。式(22) ~ (25) 中方程个数为 $K_1 + K_2 + 2$ 个, 未知数为 $\zeta_0, \zeta_1, u_{n,1} (n = 0, \dots, K_1 - 1)$ 和 $u_{n,2} (n = 0, \dots, K_2 - 1)$, 同样也是 $K_1 + K_2 + 2$ 个, 方程组封闭可解。

需要注意的是, 在 MCC 内波理论中引入了层平均速度, 得到的上、下层水平速度沿垂向是相同的。在第一级别的层析内波理论中, 即 $K_1 = K_2 = 1$, 同样假定上、下层流体的水平速度沿水深方向均为常数, 两者本质上相同。并且, MCC 内波理论得到的线性色散关系结果与第一级别层析内波理论的线性色散关系结果也是一致的^[66]。因此, MCC 内波理论可视为第一级别的层析内波理论。

为了证明两者的一致性, 从层析内波理论的速度假设出发, 给出了一种第一级别层析内波理论的推导方式。以保留自由面的第一级别层析内波理论方程为例, 此时坐标轴放在内界面上, 在式(16)中, 当 $K_i = 1$ 时, 即为第一级别层析内波理

论速度假设。将其代入质量守恒方程(1),可以得到垂向速度系数与横向速度系数的关系:

$$w_{1,i} = -u_{0,i,x} \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

将第一级别层析内波理论速度假设和式(26)代入两层流体间内波问题的边界条件(4),可得到:

$$\zeta_{0,t} + (u_{0,1}\zeta_0)_{,x} = w_{0,1} \quad z = h_1 + \zeta_0(x, t) \quad (27)$$

$$\zeta_{1,t} + (u_{0,1}\zeta_1)_{,x} = w_{0,1} \quad z = \zeta_1(x, t) \quad (28)$$

$$\zeta_{1,t} + (u_{0,2}\zeta_1)_{,x} = w_{0,2} \quad z = \zeta_1(x, t) \quad (29)$$

$$-u_{0,2,x}h_2 = w_{0,2} \quad z = -h_2 \quad (30)$$

联立式(27)和式(28)可以消掉 $w_{0,1}$, 联立式(29)和式(30)可以消掉 $w_{0,2}$, 整理可以得到:

$$\eta_{i,t} + (\eta_i u_{0,i})_{,x} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

将速度假设代入水平动量守恒方程(2),并沿垂向积分可以得到:

$$\begin{cases} (u_{0,1,t} + u_{0,1}u_{0,1,x})\rho_1\eta_1 = - \left(\int_{\zeta_1}^{h_1+\zeta_0} p_1 dz \right)_{,x} - \zeta_{1,x}\bar{p}_1 \\ (u_{0,2,t} + u_{0,2}u_{0,2,x})\rho_2\eta_2 = - \left(\int_{-h_2}^{\zeta_1} p_2 dz \right)_{,x} + \zeta_{1,x}\hat{p}_2 \end{cases} \quad (32)$$

可以看出,在式(32)中,压力项阻止了方程的闭合。接下来需要通过垂向动量守恒方程来消掉压力项。

类似于 MCC 内波理论中 D_i 的定义,这里定义 $B_i \equiv \partial_t + u_{0,i}\partial_x$, 代入式(28)和式(30)有:

$$\begin{cases} w_{0,1} = B_1\zeta_1 + u_{0,1,x}\zeta_1 \\ w_{0,2} = -u_{0,2,x}h_2 \end{cases} \quad (33)$$

将速度假设及式(33)代入垂向动量守恒方程(3),可以得到:

$$\begin{cases} B_1^2\zeta_1 + J_1\zeta_1 - J_1z = -\frac{1}{\rho_1}p_{1,z} - g \\ J_2 \cdot (-h_2) - J_2z = -\frac{1}{\rho_2}p_{2,z} - g \end{cases} \quad (34)$$

类似于 G_1 和 G_2, J_1 和 J_2 的定义为:

$$J_i = u_{0,i,xt} + u_{0,i}u_{0,i,xx} - (u_{0,i,x})^2 \quad i = 1, 2 \quad (35)$$

对式(34),沿垂向进行积分,整理可以得到 \bar{p}_1 和 \hat{p}_2 的表达式。

$$\begin{cases} \bar{p}_1 = \rho_1 \left(\eta_1 B_1^2\zeta_1 - \frac{1}{2}\eta_1^2 J_1 + g\eta_1 \right) \\ \hat{p}_2 = \rho_2 \left(-\frac{1}{2}\eta_2^2 J_2 + g\eta_2 \right) + \hat{p}_2 \end{cases} \quad (36)$$

对式(34),左右同时乘以 z 后,再沿垂向进行积分,并代入 \bar{p}_1 和 \hat{p}_2 的表达式,可以得到:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_1} \int_{\zeta_1}^{h_1+\zeta_0} p_1 dz = \frac{1}{2}\eta_1^2 B_1^2\zeta_1 - \frac{1}{3}J_1\eta_1^3 + \frac{1}{2}g\eta_1^2 \\ \frac{1}{\rho_2} \int_{-h_2}^{\zeta_1} p_2 dz = -\frac{1}{3}J_2\eta_2^3 + \frac{1}{2}g\eta_2^2 + \frac{1}{\rho_2}\hat{p}_2\eta_2 \end{cases} \quad (37)$$

将式(36)、式(37)代入积分后的水平动量守恒方程式(32),并根据内界面压力连续条件(5),可以消掉压力相关项,得到:

$$u_{0,1,t} + u_{0,1}u_{0,1,x} + g\zeta_{0,x} = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{3}\eta_1^3 J_1 \right)_{,x} - \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{2}\eta_1^2 B_1^2\zeta_1 \right)_{,x} + \left(\frac{1}{2}\eta_1 J_1 - B_1^2\zeta_1 \right) \zeta_{1,x} \quad (38)$$

$$u_{0,2,t} + u_{0,2}u_{0,2,x} + g\zeta_{1,x} = \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{1}{3}\eta_2^3 J_2 \right)_{,x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{1}{2}\eta_1^2 J_1 - \eta_1 B_1^2\zeta_1 - g\eta_1 \right)_{,x} \quad (39)$$

式(31)、式(38)及式(39)构成了保留自由面的第一级别层析内波理论方程。由于 $u_{0,1}, u_{0,2}$ 与 \bar{u}_1, \bar{u}_2 本质上是相同, J_1, J_2, B_1, B_2 也与 MCC 内波理论中的 G_1, G_2, D_1, D_2 相同,由此第一级别层析内波理论方程与 MCC-FS 内波理论方程是完全相同的。然而,两者的推导方式是完全不同的,因此,本文从数学推导的角度证明了 MCC 内波理论即为第一级别的层析内波理论。

通过层析内波理论结果与大幅内孤立波物理实验测量值的对比,层析内波理论可以对浅水模式和深水模式下的大幅内孤立波均进行准确的描述^[65],其收敛结果与欧拉解基本一致^[60]。在对实际海洋内波的描述上,赵彬彬等^[66]将层析内波理论应用到了南海实际内波波形和流场上,给出的结果与实测值有很好的的一致性。在对复杂环境中内波问题的研究上,层析内波理论展现了良好的性能。王战^[67]基于层析内波理论开展了两层流体间内孤立波在线性和非线性形式的背景剪切流中的波形、速度场和波速等特性进行研究,探究背景剪切流对孤立波特性的影响。Zhang 等^[68]对两层流体间内波与表面波迎面碰撞问题开展了数值研究,并给出了演化过程。杨金鑫等^[69]对上凸内孤立波迎面碰撞开展数值模拟,分析了波幅与碰撞过程界面最大起伏之间的关系。

由于层析内波理论的公式及其数值求解较为复杂,这就导致层析内波理论尚未广泛应用到工程问题上。并且相对于 MCC 内波理论,在数值模拟尤其是时域模拟上,高级别层析内波理论的计算耗时相对较长。因此,在处理浅水模式内波问题时, MCC 内波理论就可以满足精度要求。为了解决层析内波理论计算耗时较长这一问题,张天钰等^[70]提出了一种伴随内波平移的移动计算域方法,与传统的全域模拟相比,显著缩短了计算时间,提高了计算效率。

目前,相比于 KdV 内波理论与 MCC 内波理

论,层析内波理论的数值研究及工程实际问题应用相对较少。然而,作为一种强非线性且同时适用于浅水模式以及深水模式的内波理论,其在处理复杂环境场中内波问题上有着极大优势。随着内波问题的复杂化,层析内波理论必将展示出其良好的性能。

为了更直观地对比这三种内波理论,在表 1 中给出了三种内波理论的适用性。

表 1 两层流体间内波理论适用性

Tab. 1 Applicability of two-layer internal wave theory

模式	KdV 内波理论	MCC 内波理论	层析 内波理论
非线性	弱	强	强
水深模式	浅水	深水	浅水/深水

3 三层流体间内波理论

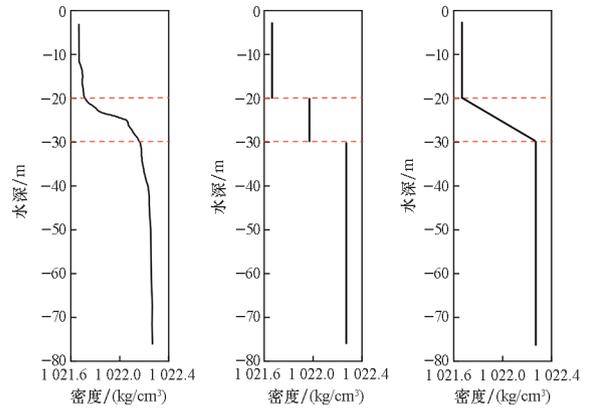
在忽略密度跃层的情况下,两层流体间内波理论可以对内波的生成演化特性及其强非线性特征等进行相当准确的描述。然而,对于密度跃层较厚导致难以忽略的情况,如我国南海曾监测到厚度达 459 m 的密度跃层^[71],或者高模态内波(振幅垂向结构拥有多个极值点)特性等问题^[72-75],两层流体间内波理论已经不再适用。因此,就需要开展三层甚至多层流体间内波的理论数值研究。

在三层流体间内波理论中,根据实际海域(我国台湾北部海域)海水密度沿水深方向的变化(如图 3(a)^[76]所示),可以采取不同的分层形式,如三层常密度分层(如图 3(b)所示)以及三层连续密度分层(如图 3(c)所示)。针对这两种分层形式下的内波理论,分析了其各自的优势及局限性,为三层流体间内波问题的研究提供理论基础。

3.1 三层常密度分层

由于实际海洋中的密度层结大致是一个三层结构,因此,近年来在内波问题的研究中开始逐渐由两层流体间内波理论转向三层流体间内波理论。对于三层常密度分层(如图 3(b)所示)下的内波理论,可以将其视为两层流体间内波理论的扩展,其推导过程以及控制方程在形式上与两层流体间内波理论类似,这里不再赘述。

关于三层流体间 KdV 内波理论,朱勇^[77]在考虑自由面的三层流体系统中,采用约化摄动方法,推导得到了各界面所遵循的 KdV 方程,并讨论了流体厚度对内孤立波的影响。Barros 等^[78]



(a) 实际密度沿水深变化^[76] (b) 三层常密度分层 (c) 三层连续密度分层
 (a) Practical density change along the water depth^[76] (b) Three layer constant density stratification (c) Three layer continuous density stratification

图 3 我国台湾北部海域的密度沿水深分布及两种密度近似方法

Fig. 3 Density distribution along the water depth of the northern sea area of Chinese Taiwan and the two density-approximation methods

则是推导了刚盖近似下的三层流体间 KdV 内波理论。

关于三层 MCC 内波理论,最早由 Choi^[79]基于浅水长波假设,推导了考虑自由面的多层流体间的 MCC 内波理论。Jo 等则是^[80]基于三层 MCC 内波理论,研究了中间层的厚度对波形和波速的影响。Barros 等^[78]将三层 MCC 内波理论应用到第二模态内波特性的数值研究上,讨论了弱非线性模型无法捕捉到的强非线性特征,并指出了在弱非线性假设下,三层 MCC 内波理论同样可以退化为三层 KdV 内波理论。Doak 等^[81]则进一步研究了不同参数对生成的大幅第二模态内孤立波特性的影响。

关于三层层析内波理论,Zhang 等^[82]将三层层析内波理论扩展到三层,并对三层流体间第一模态内波以及第二模态内波开展了数值模拟与物理实验。通过对比发现,三层层析内波理论可以准确模拟三层流体间内波特性的。王战^[67]将三层层析内波理论应用于内孤立波在线性背景剪切流和非线性背景剪切流中的特性研究中。

在三层常密度分层内波理论中,通过将密度跃层近似为一层常密度流体,解决了两层流体间内波理论无法研究高模态内波的困难。并且,这种密度间断,对于研究不相溶流体系统中的界面波提供了很好的近似。然而,由于在内界面存在密度跳跃,存在 KH 不稳定性。

3.2 连续密度分层

由于实际海洋中密度是连续变化的,采用连续密度分层(如图 3(c)所示)下的内波理论更符合实际物理海洋特性,同时也可以消除常密度分层带来的不良影响。

在密度连续变化的内波理论中,DJL 内波理论^[83]作为一种完全非线性内波理论,可以用于研究连续分层流体中的大幅强非线性内孤立波。当 $\zeta(x,t)$ 表示等密度位移时,在 Boussinesq 近似下,DJL 内波理论可以表示为:

$$\nabla^2 \zeta + \frac{N^2(z-\zeta)}{c^2} \eta = 0 \quad (40)$$

其中, N 为浮频率, c 为内波的波速。对于 DJL 内波理论的求解,可以参考 Dunphy 等^[84]给出的利用谱方法求解策略及开源代码。

DJL 内波理论适用于描述定常问题,且具备较高的计算精度,被广泛应用于稳态情况下的大幅内波的研究,比如不同背景剪切流场中的内波特性^[85-87]。Stastna 等^[88]研究了旋转对于大幅内波的影响,发现能量从主波向非线性内波能量尾部的转移是一个普遍特征。Preusse 等^[89]对不同密度层结下的内孤立波的极限波幅和破坏机制进行了研究,与实海观测结果对比,发现模拟的极限波幅可以很好地预测出破碎的临界波高。Xu 等^[90]则是通过比较 DJL 内波理论与三层 MCC 内波理论,研究了密度间断对数值模拟精度带来的影响。

需要指出的是,尽管 DJL 内波理论在求解密度连续分层中的大幅内波上等价于欧拉解,但是 DJL 内波理论仅适用于定常问题,无法用于研究内波的生成、传播与演化特性等。

为了直观地比较本节中介绍的四种三层流体间内波理论,表 2 中给出了不同内波理论各自的适用性。

表 2 三层流体间内波理论适用性

Tab.2 Applicability of three-layer internal wave theory

模式	三层 KdV 内波理论	三层 MCC 内波理论	三层层析内波理论	DJL 内波理论
分层形式	间断	间断	间断	连续
非线性	弱	强	强	强
水深模式	浅水	深水	浅水/深水	浅水/深水
定常/非定常	定常/非定常	定常/非定常	定常/非定常	定常

4 总结与展望

针对两层及三层流体间内波理论,本文选取了应用广泛的内波理论,包括 KdV 内波理论、MCC 内波理论、层析内波理论以及 DJL 内波理论,较为全面地评述其研究进展,介绍其模型方程、适用性以及局限性,以供研究者选择。其中,KdV 内波理论相当于 MCC 内波理论在弱非线性条件下的退化,MCC 内波理论相当于第一级别的层析内波理论。同时,本文以数学推导的角度,从层析内波理论的速度假设出发,给出了第一级别层析内波理论的一种推导方式,最终得到了和 MCC 内波理论相同的方程。

需要指出的是,目前对于两层流体间内波问题的研究工作已经相当丰富。对于三层流体间内波问题的研究相对不足,随着研究的深入,内波问题更为复杂,对于研究工作的要求更高,挑战更大。针对两层及三层流体间内波问题,以下两个研究方向值得关注。

1) 三维内波问题。三维内波问题相比于二维内波问题更为复杂,同时其研究较少。目前,关于三维内波的研究存在一些局限性,如 KP (Kadomtsev-Petviashvili) 方程是各向异性且单向传播的模型^[91-92],BL (Benney-Luke) 方程是一个弱非线性的模型^[93],这就导致在三维内波问题的研究上存在不足。因此,发展适用性强的三维内波理论用于模拟三维海底地形对内波特性的影响以及三维海底滑坡生成内波机制等三维问题是目前亟须解决的。

2) 内波在复杂海洋环境中的传播、演化问题。实际海洋环境更为复杂,内波在传播过程中会受到海底地形、近海岸区的沿岸流和潮流以及风浪等环境影响,这些复杂的海洋环境会对内波特性产生影响,如内波的极性转化等问题。尽管目前已经开展了单一因素对内波特性的影响研究,如地形的影响^[44]以及背景剪切流的影响^[67]等,但是复杂海洋环境带来的耦合作用尚需进一步研究,内波在复杂海洋环境中的传播、演化问题也需要进一步探明。

参考文献 (References)

[1] MERCIER M J, VASSEUR R, DAUXOIS T. Resurrecting dead-water phenomenon [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2011, 18(2): 193-208.

[2] JACKSON C. Internal wave detection using the moderate resolution imaging spectroradiometer (MODIS) [J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2007, 112 (C11):

- C11012.
- [3] ZHENG Q A, XIE L L, XIONG X J, et al. Progress in research of submesoscale processes in the South China Sea[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2020, 39(1): 1–13.
- [4] 方欣华, 杜涛. 海洋内波基础和中国海内波[M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2005.
FANG X H, DU T. Fundamentals of oceanic internal waves and internal waves in the China seas[M]. Qingdao: China Ocean University Press, 2005. (in Chinese)
- [5] 李家春. 水面下的波浪——海洋内波[J]. *力学与实践*, 2005, 27(2): 1–6.
LI J C. Billow under the sea surface-internal waves in the ocean[J]. *Mechanics in Engineering*, 2005, 27(2): 1–6. (in Chinese)
- [6] GONG Y K, XIE J S, XU J X, et al. Oceanic internal solitary waves at the Indonesian submarine wreckage site[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2022, 41(3): 109–113.
- [7] ALFORD M H, PEACOCK T, MACKINNON J A, et al. The formation and fate of internal waves in the South China Sea[J]. *Nature*, 2015, 521(7550): 65–69.
- [8] 高静. 热带西太平洋近惯性内波的生成及其垂向传递机制[D]. 青岛: 中国科学院海洋研究所, 2021.
GAO J. Generation mechanisms and vertical propagation of near-inertial waves in the western tropical Pacific Ocean[D]. Qingdao: Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, 2021. (in Chinese)
- [9] 蔡树群, 何建玲, 谢皆烁. 近 10 年来南海孤立内波的研究进展[J]. *地球科学进展*, 2011, 26(7): 703–710.
CAI S Q, HE J L, XIE J S. Recent decadal progress of the study on internal solitons in the South China Sea [J]. *Advances in Earth Science*, 2011, 26(7): 703–710. (in Chinese)
- [10] 谢波涛, 黄必桂, 杨威, 等. 南海北部东沙岛以西陆坡区 2021 年秋季内波特征统计与分析[J]. *热带海洋学报*, 2023: 1–14.
XIE B T, HUANG B G, YANG W, et al. Characteristic statistics and analysis of internal waves in the continental slope area west of Dongsha Plateau on the northern South China Sea in the autumn of 2021[J]. *Journal of Tropical Oceanography*, 2023: 1–14. (in Chinese)
- [11] RAMP S R, TANG T Y, DUDA T F, et al. Internal solitons in the northeastern South China Sea. Part I: sources and deep water propagation[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2004, 29(4): 1157–1181.
- [12] HUANG X D, CHEN Z H, ZHAO W, et al. An extreme internal solitary wave event observed in the northern South China Sea[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 30041.
- [13] 王展, 朱玉可. 非线性海洋内波的理论、模型与计算[J]. *力学学报*, 2019, 51(6): 1589–1604.
WANG Z, ZHU Y K. Theory, modelling and computation of nonlinear ocean internal waves [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(6): 1589–1604. (in Chinese)
- [14] BENJAMIN T B. Internal waves of finite amplitude and permanent form [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1966, 25(2): 241–270.
- [15] KODAIRA T, WASEDA T, MIYATA M, et al. Internal solitary waves in a two-fluid system with a free surface[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, 804: 201–223.
- [16] KOOP C G, BUTLER G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, 112: 225–251.
- [17] GRUE J, JENSEN A, RUSÁS P O, et al. Properties of large-amplitude internal waves [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 380: 257–278.
- [18] 黄文昊, 尤云祥, 王旭, 等. 有限深两层流体中内孤立波造波实验及其理论模型 [J]. *物理学报*, 2013, 62(8): 084705.
HUANG W H, YOU Y X, WANG X, et al. Wave-making experiments and theoretical models for internal solitary waves in a two-layer fluid of finite depth [J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(8): 084705. (in Chinese)
- [19] 邹丽, 杜兵毅, 马鑫宇, 等. 内孤立波理论模型适用性研究 [C]//中国力学大会论文集, 2019: 2799–2811.
ZOU L, DU B Y, MA X Y, et al. Study on the applicability of the theory of internal solitary waves in strongly stratified fluid [C]//Proceedings of Symposium on the China Mechanics Congress, 2019: 2799–2811. (in Chinese)
- [20] LEE C Y, BEARDSLEY R C. The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1974, 79(3): 453–462.
- [21] MICHALLET H, BARTHÉLEMY E. Experimental study of interfacial solitary waves [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, 366: 159–177.
- [22] MELVILLE W K, HELFRICH K R. Transcritical two-layer flow over topography [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, 178: 31–52.
- [23] GRIMSHAW R, HELFRICH K R. Internal solitary wave generation by tidal flow over topography [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 839: 387–407.
- [24] DUDA T F, LYNCH J F, IRISH J D, et al. Internal tide and nonlinear internal wave behavior at the continental slope in the northern South China Sea [J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2004, 29(4): 1105–1130.
- [25] ZHAO Z X, ALFORD M H. Source and propagation of internal solitary waves in the northeastern South China Sea [J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2006, 111(C11): C11012.
- [26] CAI S Q, LONG X M, GAN Z J. A numerical study of the generation and propagation of internal solitary waves in the Luzon Strait [J]. *Oceanologica Acta*, 2002, 25(2): 51–60.
- [27] 尤云祥, 李巍, 时忠民, 等. 海洋内孤立波中张力腿平台的水动力特性 [J]. *上海交通大学学报*, 2010, 44(1): 56–61.
YOU Y X, LI W, SHI Z M, et al. Hydrodynamic characteristics of tension leg platforms in ocean internal solitary waves [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2010, 44(1): 56–61. (in Chinese)
- [28] 尤云祥, 李巍, 胡天群, 等. 内孤立波中半潜平台动力响

- 应特性[J]. 海洋工程, 2012, 30(2): 1-7, 19.
- YOU Y X, LI W, HU T Q, et al. Dynamic responses of a semi-submersible platform in internal solitary waves[J]. The Ocean Engineering, 2012, 30(2): 1-7, 19. (in Chinese)
- [29] 黄苗苗, 张楠, 朱爱军. 内波作用下水下航行体水动力载荷及运动特性研究[J]. 船舶力学, 2019, 23(5): 531-540.
- HUANG M M, ZHANG N, ZHU A J. Hydrodynamic loads and motion features of a submarine with interaction of internal solitary waves [J]. Journal of Ship Mechanics, 2019, 23(5): 531-540. (in Chinese)
- [30] XUAN P, DU H, WANG S D, et al. Experimental and theoretical study of internal solitary wave loads on a submerged slender body[J]. Ocean Engineering, 2023, 272: 113936.
- [31] WANG S D, DU H, WEI G, et al. Experimental modification of the internal solitary wave force exerted on a horizontal transverse cylinder due to wave-flow and vortex shedding[J]. Ocean Engineering, 2023, 269: 113513.
- [32] HELFRICH K R, MELVILLE W K. Long nonlinear internal waves [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2006, 38: 395-425.
- [33] MIYATA M. An internal solitary wave of large amplitude[J]. La Mer, 1985, 23(2): 43-48.
- [34] MIYATA M. Long internal waves of large amplitude [C]//Proceedings of Symposium on International Union of Theoretical and Applied Mechanics, 1988: 399-406.
- [35] CHOI W, CAMASSA R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 396: 1-36.
- [36] WU T Y. Long waves in ocean and coastal waters[J]. Journal of Engineering Mechanics-ASCE, 1981, 107(3): 501-522.
- [37] CHOI W, CAMASSA R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 313: 83-103.
- [38] BARROS R, GAVRILYUK S L, TESHUKOV V M. Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. I. Model derivation and general properties [J]. Studies in Applied Mathematics, 2007, 119(3): 191-211.
- [39] CAMASSA R, CHOI W, MICHALLET H, et al. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 549: 1-23.
- [40] 赵彬彬, 张天钰, 王战, 等. MCC-FS 内孤立波模型算法及速度场研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2021, 42(8): 1089-1095.
- ZHAO B B, ZHANG T Y, WANG Z, et al. Algorithm of the MCC-FS internal solitary wave model and velocity field[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2021, 42(8): 1089-1095. (in Chinese)
- [41] 邹丽, 马鑫宇, 李振浩, 等. 分层流体孤子模型的实验重现及流场分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2020, 41(2): 263-270.
- ZOU L, MA X Y, LI Z H, et al. Experimental reconstruction and flow-field analysis of stratified fluid soliton model [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2020, 41(2): 263-270. (in Chinese)
- [42] DU H, WEI G, WANG S D, et al. Experimental study of elevation-and depression-type internal solitary waves generated by gravity collapse [J]. Physics of Fluids, 2019, 31(10): 102104.
- [43] LA FORGIA G, SCIORTINO G. The role of the free surface on interfacial solitary waves [J]. Physics of Fluids, 2019, 31(10): 106601.
- [44] JO T C, CHOI W. Dynamics of strongly nonlinear internal solitary waves in shallow water [J]. Studies in Applied Mathematics, 2002, 109(3): 205-227.
- [45] JO T C, CHOI W. On stabilizing the strongly nonlinear internal wave model [J]. Studies in Applied Mathematics, 2008, 120(1): 65-85.
- [46] CHOI W, ZHI C H, BARROS R. High-order unidirectional model with adjusted coefficients for large-amplitude long internal waves [J]. Ocean Modelling, 2020, 151: 101643.
- [47] LA FORGIA G, SCIORTINO G. Interfacial solitons propagating through a background shear current [J]. Physics of Fluids, 2020, 32(10): 106603.
- [48] LA FORGIA G, SCIORTINO G. Free-surface effects induced by internal solitons forced by shearing currents [J]. Physics of Fluids, 2021, 33(7): 072102.
- [49] ZHAO B B, ZHANG T Y, LI L J, et al. Extension of MCC-FS model to bottom time-varying problems [C]//Proceedings of the 37th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2022.
- [50] ZHAO B B, ZHANG T Y, DUAN W Y, et al. Internal solitary waves generated by a moving bottom disturbance [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2023, 963: A32.
- [51] CHOI W, BARROS R, JO T C. A regularized model for strongly nonlinear internal solitary waves [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 629: 73-85.
- [52] BOONKASAME A, MILEWSKI P A. A model for strongly nonlinear long interfacial waves with background shear [J]. Studies in Applied Mathematics, 2014, 133(2): 182-213.
- [53] 高原雪, 尤云祥, 王旭, 等. 基于 MCC 理论的内孤立波数值模拟 [J]. 海洋工程, 2012, 30(4): 29-36.
- GAO Y X, YOU Y X, WANG X, et al. Numerical simulation for the internal solitary wave based on MCC theory [J]. The Ocean Engineering, 2012, 30(4): 29-36. (in Chinese)
- [54] XIE J S, JIAN Y J, YANG L G. Strongly nonlinear internal soliton load on a small vertical circular cylinder in two-layer fluids [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(8): 2089-2101.
- [55] 马孟达, 尤云祥, 张新曙. 海洋内孤立波作用下张力腿平台动力响应特性 [J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2016, 31(2): 135-144.
- MA M D, YOU Y X, ZHANG X S. Dynamic response characteristics of a tension leg platform under internal solitary waves [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2016, 31(2): 135-144. (in Chinese)
- [56] CHOI W. High-order strongly nonlinear long wave approximation and solitary wave solution [J]. Journal of Fluid

- Mechanics, 2022, 945: A15.
- [57] CHOI W. High-order strongly nonlinear long wave approximation and solitary wave solution. Part 2. Internal waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2022, 952: A41.
- [58] 张天钰, 赵彬彬, 王泽航. MCC 内波模型的色散关系研究[C]//第三十一届全国水动力学研讨会论文集(上册), 2020: 313-318.
- ZHANG T Y, ZHAO B B, WANG Z H. Study on dispersion relation of MCC internal wave model [C]//Proceedings of Symposium on the 31st National Hydrodynamics (Volume I), 2020: 313-318. (in Chinese)
- [59] 檀大林, 周济福, 王旭. 海洋密度剖面模型及其适用性研究[J]. 海洋科学进展, 2021, 39(1): 30-36.
- TAN D L, ZHOU J F, WANG X. A modified density profile model of sea water[J]. Advances in Marine Science, 2021, 39(1): 30-36. (in Chinese)
- [60] ZHAO B B, ERTEKIN R C, DUAN W Y, et al. New internal-wave model in a two-layer fluid [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 2016, 142(3): 04015022.
- [61] WEBSTER W C, DUAN W Y, ZHAO B B. Green-Naghdi theory, part A: Green-Naghdi (GN) equations for shallow water waves[J]. Journal of Marine Science and Application, 2011, 10(3): 253-258.
- [62] 王战, 赵彬彬, 段文洋. 层析内波理论色散关系研究[C]//第三十一届全国水动力学研讨会论文集(上册), 2020: 347-352.
- WANG Z, ZHAO B B, DUAN W Y. Study on dispersion relation of the Green-Naghdi internal wave model [C]//Proceedings of Symposium on the 31st National Hydrodynamics (Volume I), 2020: 347-352. (in Chinese)
- [63] GREEN A E, NAGHDI P M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1976, 78(2): 237-246.
- [64] 赵彬彬, 段文洋. 层析水波理论: GN 波浪模型[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- ZHAO B B, DUAN W Y. Green-Naghdi wave theory: GN wave model[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014. (in Chinese)
- [65] ZHAO B B, WANG Z, DUAN W Y, et al. Experimental and numerical studies on internal solitary waves with a free surface[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2020, 899: A17.
- [66] 赵彬彬, 段文洋, 王战. 非线性内波层析理论与源码[M]. 北京: 清华大学出版社, 2020.
- ZHAO B B, DUAN W Y, WANG Z. Nonlinear internal wave Green-Naghdi theory and source code[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2020. (in Chinese)
- [67] 王战. 无流和有流情况下的海洋孤立波特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2021.
- WANG Z. On the properties of ocean solitary waves with and without currents [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2021. (in Chinese)
- [68] ZHANG T Y, WANG Z H, WANG Z, et al. On head-on collision of the depression internal solitary wave and the elevation internal solitary wave [C]//Proceedings of the 36th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2021: 25-28.
- [69] 杨金鑫, 赵彬彬, 王战, 等. 基于层析内波理论的上凸型内孤立波碰撞数值模拟研究[J]. 中国造船, 2022, 63(2): 78-83.
- YANG J X, ZHAO B B, WANG Z, et al. Numerical simulation of collision of internal solitary waves with convex shape based on high-level Green-Naghdi internal-wave theory[J]. Shipbuilding of China, 2022, 63(2): 78-83. (in Chinese)
- [70] 张天钰, 刘娟, 赵彬彬, 等. 基于层析内波理论的大幅内孤立波快速时域模拟研究[J]. 中国造船, 2020, 61(增刊 2): 1-9.
- ZHANG T Y, LIU J, ZHAO B B, et al. Fast simulation of large amplitude internal solitary waves in time domain based on high-level Green-Naghdi theory of internal waves [J]. Shipbuilding of China, 2020, 61 (Suppl 2): 1-9. (in Chinese)
- [71] VIEIRA G S, ALLSHOUSE M R. Internal wave boluses as coherent structures in a continuously stratified fluid [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2020, 885: A35.
- [72] 崔海吉, 李志鑫, 张猛, 等. 南海东沙岛北部第二模态内孤立波特性研究[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2021, 51(11): 16-21.
- CUI H J, LI Z X, ZHANG M, et al. Study on the characteristics of the second mode internal solitary wave in the north of Dongsha Island of the South China Sea [J]. Periodical of Ocean University of China, 2021, 51 (11): 16-21. (in Chinese)
- [73] 范文豪, 宋海斌, 龚屹, 等. 中美洲海域第二模态内孤立波的地震海洋学研究[J]. 地球物理学报, 2021, 64(1): 195-208.
- FAN W H, SONG H B, GONG Y, et al. Seismic oceanography study of mode-2 internal solitary waves offshore Central America[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2021, 64(1): 195-208. (in Chinese)
- [74] 许培鹏, 熊学军, 陈亮, 等. 南海北部陆坡海域第二模态内孤立波统计特征[J]. 海洋科学进展, 2022, 40(2): 187-196.
- XU P P, XIONG X J, CHEN L, et al. Statistical analysis of the second-mode internal solitary wave in the continental slope area of the northern South China Sea[J]. Advances in Marine Science, 2022, 40(2): 187-196. (in Chinese)
- [75] CARR M, DAVIES P A, HOEBERS R P. Experiments on the structure and stability of mode-2 internal solitary-like waves propagating on an offset pycnocline [J]. Physics of Fluids, 2015, 27(4): 046602.
- [76] LIU A K, CHANG Y S, HSU M K, et al. Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas[J]. Journal of Geophysical Research: Oceans, 1998, 103(C4): 7995-8008.
- [77] 朱勇. 三层流体系统中孤立波的产生[J]. 中国科学, 1995(6): 626-632.
- ZHU Y. Generation of solitary waves in a three-layer fluid

- system[J]. *Scientia Sinica*, 1995 (6): 626 – 632. (in Chinese)
- [78] BARROS R, CHOI W, MILEWSKI P A. Strongly nonlinear effects on internal solitary waves in three-layer flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 883: A16.
- [79] CHOI W. Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves [C]//Proceedings of 4th International Conference on Hydrodynamics, 2000: 453 – 458.
- [80] JO T C, CHOI Y K. Dynamics of strongly nonlinear internal long waves in a three-layer fluid system[J]. *Ocean Science Journal*, 2014, 49(4): 357 – 366.
- [81] DOAK A, BARROS R, MILEWSKI P A. Large mode-2 internal solitary waves in three-layer flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 953: A42.
- [82] ZHANG T Y, WANG Z, WANG Z H, et al. On mode 1 and mode 2 internal solitary waves in a three layer fluid system[C]//Proceedings of the 35th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2020.
- [83] LONG R R. Some aspects of the flow of stratified fluids: I. A theoretical investigation [J]. *Tellus*, 1953, 5 (1): 42 – 58.
- [84] DUNPHY M, SUBICH C, STASTNA M. Spectral methods for internal waves: indistinguishable density profiles and double-humped solitary waves [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2011, 18(3): 351 – 358.
- [85] STASTNA M, LAMB K G. Large fully nonlinear internal solitary waves: the effect of background current[J]. *Physics of Fluids*, 2002, 14: 2987 – 2999.
- [86] XU C Z, STASTNA M. Internal waves in a shear background current; transition from solitary-wave regime to dispersive-wave regime [J]. *Physical Review Fluids*, 2019, 4(9): 094801.
- [87] STASTNA M, COUTINO A, WALTER R K. The effect of strong shear on internal solitary-like waves [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2021, 28(4): 585 – 598.
- [88] STASTNA M, POULIN F J, ROWE K L, et al. On fully nonlinear, vertically trapped wave packets in a stratified fluid on the f-plane [J]. *Physics of Fluids*, 2009, 21(10): 106604.
- [89] PREUSSE M, STASTNA M, FREISTÜHLER H, et al. Intrinsic breaking of internal solitary waves in a deep lake[J]. *PLoS One*, 2012, 7(7): e41674.
- [90] XU C G, WANG Z, MASOUD H. Error calculation of large-amplitude internal solitary waves within the pycnocline introduced by the strong stratification approximation [J]. *Journal of Marine Science and Application*, 2023, 22(1): 146 – 152.
- [91] YUAN C, GRIMSHAW R, JOHNSON E, et al. Topographic effect on oblique internal wave-wave interactions[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 856: 36 – 60.
- [92] YUAN C X, GRIMSHAW R, JOHNSON E, et al. The propagation of internal solitary waves over variable topography in a horizontally two-dimensional framework [J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2018, 48(2): 283 – 300.
- [93] YUAN C, WANG Z, CHEN X. The derivation of an isotropic model for internal waves and its application to wave generation[J]. *Ocean Modelling*, 2020, 153: 101663.