

圆柱壳振动声辐射 Jacobi-Ritz 时域半解析法及特性分析*

庞福振, 郑嘉俊, 高 聪, 李海超, 张 明
(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:针对圆柱壳结构瞬态声振特性分析研究不足,结合 Newmark- β 积分法和 Kirchhoff 时域边界积分方程,提出一种圆柱壳受迫振动声辐射 Jacobi-Ritz 时域半解析法。基于一阶剪切变形理论和微元法思想,建立了圆柱壳振动声辐射分析模型,采取 Jacobi 多项式和 Fourier 级数表示轴向和周向位移容许函数,基于 Rayleigh-Ritz 法和 Newmark- β 积分法计算圆柱壳的受迫振动时域响应,在此基础上,基于 Kirchhoff 积分方程求解辐射噪声时域响应,分析圆柱壳受迫振动声辐射特性。与有限元方法/边界元方法数值结果对比表明,该方法具备收敛性好、精度高等优点,圆柱壳结构声振响应峰值随边界条件的刚度变弱存在左移现象,振动声辐射响应随厚度的增加呈现下降趋势;当随机载荷峰值频率与结构固有频率接近时,结构声振响应出现强特征线谱。

关键词:圆柱壳;振动声辐射;Jacobi 多项式;半解析法;时域边界元

中图分类号:O327;TB52 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2023)04-136-11



听语音
与作者互动
聊科研

Jacobi-Ritz time domain semi-analytic method and characteristic analysis of cylindrical shell vibro-acoustic radiation

PANG Fuzhen, ZHENG Jiajun, GAO Cong, LI Haichao, ZHANG Ming

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Considering the deficiency in the research on transient vibro-acoustic characteristics of cylindrical shell structures, a Jacobi-Ritz semi-analytic method for forced vibration sound radiation of cylindrical shells in time domain was proposed by combining Newmark- β integral method and Kirchhoff boundary element integral equation in time domain. Based on the theory of first-order shear deformation and the idea of element method, a calculation and analysis model of vibration acoustic radiation of cylindrical shell was established. Jacobi polynomial and Fourier series were used to represent the allowable functions of axial and circumferential displacement. The time domain response of forced vibration of cylindrical shell was calculated on the basis of the Rayleigh-Ritz method and Newmark- β integral method. Based on Kirchhoff integral equation, the time domain response of radiated noise was solved, and the acoustic radiation characteristics of forced vibration of cylindrical shell were analyzed. Compared with finite element method/boundary element method numerical results, the proposed method has the characteristics of good convergence and high precision. The peak value of acoustic response of cylindrical structures shifts to the left with the weakening of the boundary condition stiffness, and the vibration acoustic response decreases with the increase of the thickness. When the peak frequency of random load is close to the natural frequency of the structure, strong characteristic line spectrum appears in the acoustic response of the structure.

Keywords: cylindrical shell; vibration and sound radiation; Jacobi polynomials; semi-analytic method; time domain boundary element

圆柱壳结构作为一种基本结构类型,在现代国防科技领域有着较为广泛的设计应用,如导弹、水下航行器、水面舰艇等,在实际工程应用中受到各种激励载荷作用,其振动声辐射特性研究一直受到国内外学者的关注。因此,开展圆柱壳不同边界条件下振动声辐射特性研究具有重要意义。

在圆柱壳振动特性分析方面,Chen 等^[1]基于波动法和 Flügge 理论分析了圆柱壳结构自由振

动特性;Ganapathi 等^[2]基于高阶剪切变形理论探究了激励加载、几何尺寸、铺层方式对圆柱壳振动响应的影响;Matsunaga^[3]基于能量变分原理分析了复合材料圆柱壳的自由振动特性;Shi 等^[4]基于一阶剪切变形理论和 Hamilton 原理,通过二分法计算分析了圆柱壳结构的固有频率;Jin 等^[5-6]基于一阶剪切变形理论和改进傅里叶方法,推导了圆柱壳的自由振动响应;李海超等^[7-8]基于剪

* 收稿日期:2023-03-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52101351,U2006229)

作者简介:庞福振(1980—),男,山东菏泽人,教授,博士,博士生导师,E-mail:pangfuzhen@hrbeu.edu.cn;

李海超(通信作者),男,山东菏泽人,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:lihaichao@hrbeu.edu.cn

切变形理论和能量变分原理,建立了复合材料回转结构振动分析 Jacobi-Ritz 方法,系统性分析了复合材料回转结构振动声辐射特性;王宇等^[9]基于 Love 壳体理论,开展了薄壁圆柱壳结构受谐波和冲击载荷作用下壳体振动特性研究;瞿叶高等^[10]基于分区广义变分原理和最小二乘加权残值法,分析了圆柱壳-圆锥壳组合结构的振动响应特性。在圆柱壳声辐射研究方面, Jamali 等^[11]基于传递矩阵法和波函数法,分析了理想流体下任意厚度功能梯度圆柱壳声振特性; Yang 等^[12]结合 Helmholtz 方程,给出了圆柱壳长度对声辐射效率的影响;王献忠等^[13]提出一种精细积分传递矩阵法,分析了环肋和边界条件对圆柱壳振动辐射声压的影响;张超等^[14]基于模态叠加法建立圆柱壳振动声辐射模型,分析在低频段圆柱壳纵肋对辐射声功率的影响。

上述针对圆柱壳振动声辐射的研究,主要是集中在结构频域稳态响应研究领域,而对于脉冲载荷和随机载荷激励下圆柱壳瞬态声振响应研究较少,不利于探究激励载荷的随机性对结构振动声辐射的影响。为此,本研究建立一种振动声辐射 Jacobi-Ritz 时域半解析方法,开展圆柱壳振动声辐射时域分析,基于 Rayleigh-Ritz 法和 Newmark- β 逐步积分方法,求解圆柱壳受迫振动响应,在此基础上,计算圆柱壳外部声场 Kirchhoff 时域边界积分方程,分析不同边界条件、厚长比、激励载荷形式等对圆柱壳振动声辐射特性的影响。

1 结构振动声辐射 Jacobi-Ritz 时域分析方法

1.1 理论模型

圆柱壳结构理论计算模型如图 1 所示, L 、 h 和 R 分别为结构的长度、厚度和半径,通过 5 组虚拟弹簧 ($k_u, k_v, k_w, k_x, k_\theta$) 施加在圆柱壳两端以模拟边界条件。基于微元法思想,将圆柱壳结构沿轴向均匀分为 H 段。引入柱坐标系 (x, θ, z) , 其中 x 和 θ 分别表示结构的轴向和周向, u 、 v 和 w 表示相应的轴向、周向和径向位移。

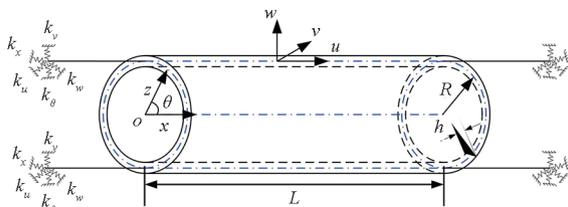


图 1 圆柱壳计算模型

Fig. 1 Calculation model of cylindrical shell

1.2 结构振动分析 Jacobi-Ritz 时域方法

根据广义胡克定律和一阶剪切变形理论,圆柱壳结构的本构方程如下^[7]:

$$\begin{bmatrix} N_x^i \\ N_\theta^i \\ N_{x\theta}^i \\ M_x^i \\ M_\theta^i \\ M_{x\theta}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{0,i} \\ \varepsilon_\theta^{0,i} \\ \gamma_{x\theta}^{0,i} \\ \chi_x^i \\ \chi_\theta^i \\ \chi_{x\theta}^i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz}^i \\ Q_{\theta z}^i \end{bmatrix} = \bar{\kappa} \begin{bmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{0,i} \\ \gamma_{\theta z}^{0,i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: N_x 、 N_θ 和 $N_{x\theta}$ 为面内力, M_x 、 M_θ 和 $M_{x\theta}$ 为弯矩, Q_{xz} 和 $Q_{\theta z}$ 为剪切力; $\bar{\kappa} = 5/6$ 表示剪切修正因子; A_{ij} 和 D_{ij} ($i, j = \{1, 2, 6\}$) 表示圆柱壳结构的拉伸和弯曲刚度系数,

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z^2) dz \quad (3)$$

式中, Q_{ij} ($i, j = \{1, 2, 6\}$) 为

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \\ Q_{12} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} \\ Q_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{cases} \quad (4)$$

μ 、 E 分别表示圆柱壳的泊松比和弹性模量。

由一阶剪切变形理论可得圆柱壳的结构势能为:

$$\begin{aligned} U_V = & \frac{1}{2} \iint_S \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0^i}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_0^i}{\partial \theta} + \frac{w_0^i}{R} \right)^2 + \right. \\ & A_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0^i}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0^i}{\partial x} \right)^2 + \bar{\kappa} A_{66} \left(\frac{\partial w_0^i}{\partial x} + \phi_x^i \right)^2 + \\ & 2A_{12} \left(\frac{\partial u_0^i}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_0^i}{\partial \theta} + \frac{w_0^i}{R} \right) + \\ & \bar{\kappa} A_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_0^i}{\partial \theta} - \frac{v_0^i}{R} + \phi_\theta^i \right)^2 + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x^i}{\partial x} \right)^2 + \\ & 2D_{12} \left(\frac{\partial \phi_x^i}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial \theta} \right) + D_{22} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial \theta} \right)^2 + \\ & \left. D_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi_x^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial x} \right)^2 \right] R dx d\theta \quad (5) \end{aligned}$$

式中, ϕ_x^i 和 ϕ_θ^i 分别代表壳段 x 和 θ 方向转角。

通过引入虚拟弹簧实现结构复杂边界模拟,结构边界势能 U_b 为:

$$\begin{aligned} U_b = & \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \left[(k_{u,x0} u_0^2 + k_{v,x0} v_0^2 + k_{w,x0} w_0^2 + \right. \\ & k_{x,x0} \phi_x^2 + k_{\theta,x0} \phi_\theta^2)_{x=0} + (k_{u,xL} u_0^2 + k_{v,xL} v_0^2 + \\ & \left. k_{w,xL} w_0^2 + k_{x,xL} \phi_x^2 + k_{\theta,xL} \phi_\theta^2)_{x=L} \right] R d\theta dz \quad (6) \end{aligned}$$

不同子结构之间的连接弹簧能量为:

$$U_s^i = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} [k_u (u_0^i - u_0^{i+1})^2 + k_v (v_0^i - v_0^{i+1})^2 + k_w (w_0^i - w_0^{i+1})^2 + k_x (\phi_x^i - \phi_x^{i+1})^2 + k_\theta (\phi_\theta^i - \phi_\theta^{i+1})^2]_{i,i+1} R d\theta dz \quad (7)$$

则该结构的总势能表示为:

$$U_{BS} = U_b + \sum_{i=1}^{H-1} U_s^i \quad (8)$$

圆柱壳结构势能函数为:

$$T^i = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right)^2 \right] \cdot \left(1 + \frac{z}{R} \right) R dx d\theta dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ I_1 \left[\left(\frac{\partial u_0^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0^i}{\partial t} \right)^2 \right] + I_3 \left[\left(\frac{\partial \phi_x^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial t} \right)^2 \right] + I_2 \left[\left(\frac{\partial u_0^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^i}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_\theta^i}{\partial t} \right) \right] \right\} R dx d\theta \quad (9)$$

其中:

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1 + \frac{z}{R} \right) (1, z, z^2) dz \quad (10)$$

外部激励载荷 $f_{w,i}$ 对圆柱壳分段所做的功为:

$$W^i = \int f_{w,i} w_i dx \quad (11)$$

基于 Jacobi 正交多项式构造位移容许函数,

圆柱壳结构的各位移函数分量表示如下:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha,\beta)}(x) [A_m \cos(n\theta) + B_m \sin(n\theta)] e^{i\omega t} \\ v_0 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha,\beta)}(x) [C_m \sin(n\theta) + D_m \cos(n\theta)] e^{i\omega t} \\ w_0 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha,\beta)}(x) [E_m \cos(n\theta) + F_m \sin(n\theta)] e^{i\omega t} \\ \phi_x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha,\beta)}(x) [G_m \cos(n\theta) + H_m \sin(n\theta)] e^{i\omega t} \\ \phi_\theta = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha,\beta)}(x) [I_m \sin(n\theta) + J_m \cos(n\theta)] e^{i\omega t} \end{cases} \quad (12)$$

式中: $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, I_m$ 和 J_m 表示待定系数; $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ 表示第 m 项 Jacobi 多项式, α, β 为 Jacobi 参数; m 和 n 表示轴向半波数和周向半波数; M 和 N 表示轴向和周向 Jacobi 多项式截断数。

圆柱壳能量泛函描述为:

$$\mathcal{L} = \sum_1^{N-1} (W^i + T^i - U_V^i) - U_{BS} \quad (13)$$

根据 Rayleigh-Ritz 方法, 对 Jacobi 待定系数求偏导:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0 \quad (14)$$

式中, $\vartheta = \{A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, I_m, J_m\}$ 。

引入瑞利阻尼, 并基于 Newmark- β 逐步积分法求解时域振动响应。

1.3 辐射噪声预报 Jacobi-Ritz 时域边界元法

时域边界元方法可以自动满足 Sommerfeld 远场辐射条件, 图 2 为圆柱壳声场边界离散理论模型。

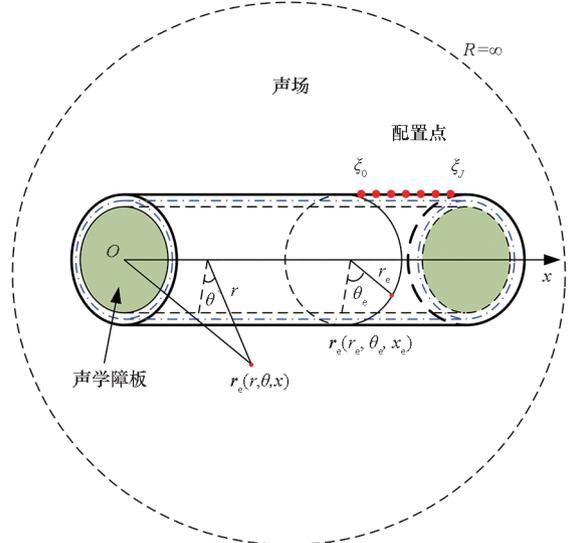


图 2 圆柱壳声场边界离散理论模型

Fig. 2 Discrete theoretical model for the acoustic field boundary of cylindrical shell

在声场边界上求解 Kirchhoff 积分方程^[15]:

$$\Re(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t) + \iint_Y \left(\int_0^t G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t, \tau) \frac{\partial p(\mathbf{r}_e, \tau)}{\partial n^+} \right) dY$$

$$= \iint_Y \left(\int_0^t p(\mathbf{r}_e, \tau) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t, \tau) \right) dY \quad (15)$$

式中, $p(\mathbf{r}, t)$ 表示流体中的声压, \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_e 分别表示场点和源点, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t, \tau)$ 和 $G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t, \tau)$ 为时域声场波动方程的基本解和法向导数, Y 为声场边界。

$\Re(\mathbf{r})$ 系数定义如下:

$$\Re(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, \mathbf{r} \in \Omega \\ \frac{1}{2}, \mathbf{r} \in Y \\ 0, \mathbf{r} \notin \Omega \text{ 且 } \mathbf{r} \notin Y \end{cases} \quad (16)$$

式中, Ω 为声场域。

对时域声场边界积分方程进行数值离散, 将时间轴等分为 N_t 份 ($t_n = n_t \Delta t, n_t = 0, 1, \dots, N_t$), 对第 m_t 个时间步长的声场物理量进行时间插值, 得到:

$$\begin{cases} p^{m_t}(\mathbf{r}_e, \tau) = \sum_{i=1}^l T_i^{m_t}(\tau) p_i^{m_t}(\mathbf{r}_e) \\ q^{m_t}(\mathbf{r}_e, \tau) = \frac{\partial p^{m_t}(\mathbf{r}_e, \tau)}{\partial n^+} = \sum_{i=1}^l \bar{T}_i^{m_t}(\tau) q_i^{m_t}(\mathbf{r}_e) \end{cases} \quad (17)$$

式中: n^+ 为声场边界单位外法线方向, $p_i^{m_i}(\mathbf{r}_e)$ 和 $q_i^{m_i}(\mathbf{r}_e)$ 分别为声压和声压法向导数的空间分布函数; I 为第 m_i 步处时间插值函数的阶数; $T_i^{m_i}(\tau)$ 和 $\bar{T}_i^{m_i}(\tau)$ 为时间插值函数。取 $I = 2$, 则 $T_i^{m_i}(\tau)$ 和 $\bar{T}_i^{m_i}(\tau)$ 取相同的时间插值函数, 得到:

$$\begin{cases} T_1^{m_i}(\tau) = \bar{T}_1^{m_i}(\tau) = 1 - \tau/\Delta t \\ T_2^{m_i}(\tau) = \bar{T}_2^{m_i}(\tau) = \tau/\Delta t \end{cases} \quad (18)$$

考虑基本解的时间平移不变性, 则离散时域声场边界积分方程如下:

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{r})p(\mathbf{r}, t_{n_i}) + \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \iint_Y (\bar{G}_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) q_i^{m_i}(\mathbf{r}_e)) dY \\ = \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \iint_Y (H_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) p_i^{m_i}(\mathbf{r}_e)) dY \end{aligned} \quad (19)$$

式中,

$$\begin{cases} \bar{G}_{(n_i-m_i-1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = \int_0^{\Delta t} \bar{T}_i^{m_i}(\tau) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t_n, \tau) d\tau \\ H_{(n_i-m_i-1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = \int_0^{\Delta t} \bar{T}_i^{m_i}(\tau) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e, t_n, \tau) d\tau \end{cases} \quad (20)$$

在柱坐标系中, 采用傅里叶级数沿圆周方向将二维声场边界积分方程转化为一维声场边界积分方程, 声场边界积分方程为:

$$\begin{cases} p_i^{m_i}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N [p_{i,n}^s(r, n, x) \sin(n\theta) + p_{i,n}^c(r, n, x) \cos(n\theta)] \\ p_i^{m_i}(\mathbf{r}_e) = \sum_{n=0}^N [p_{i,n}^s(r_e, n, x_e) \sin(n\theta_e) + p_{i,n}^c(r_e, n, x_e) \cos(n\theta_e)] \end{cases} \quad (21)$$

其中, $p_{i,n}^s$ 和 $p_{i,n}^c$ 表示边界声压法向导数的傅里叶级数展开系数, 上标 s 和 c 分别表示正弦项系数和余弦项系数。同样地, 格林函数及其法向导数展开为:

$$\begin{cases} \bar{G}_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \\ = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N G_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i [\sin(n\theta) \sin(n\theta_e) + \cos(n\theta) \cos(n\theta_e)], & \frac{r_s}{c} \leq t_{n_i} \leq \frac{r_s}{c} + \Delta t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ H_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \\ = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N H_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i [\sin(n\theta) \sin(n\theta_e) + \cos(n\theta) \cos(n\theta_e)], & \frac{r_s}{c} \leq t_{n_i} \leq \frac{r_s}{c} + \Delta t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

傅里叶系数 $G_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i, H_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i$ 写为:

$$\begin{cases} G_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi r_s} \bar{T}_i(t_{n_i} - \frac{r_s}{c}) \cos(n\phi) d\phi \\ H_{(n_i-m_i+1)(1)n}^i = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\pi r_s^2} \frac{\partial r}{\partial n} \left[T_i\left(t_{n_i} - \frac{r_s}{c}\right) + \frac{r_s}{c} \dot{T}_i\left(t_{n_i} - \frac{r_s}{c}\right) \right] \cos(n\phi) d\phi \end{cases} \quad (23)$$

式中,

$$\begin{cases} \phi = \theta_e - \theta \\ \theta_e = \phi + \theta \\ d\theta_e = d\phi \end{cases} \quad (24)$$

基于第一类切比雪夫多项式离散声场边界, 在每个边界元上设置配置点, 以保障声场边界和结构边界匹配, 则傅里叶声压系数展开如下:

$$\begin{cases} p_{i,n}^s = \sum_{j=0}^J T_j(\xi) p_{i,n,j}^s = \mathbf{T}_p(\xi) \mathbf{p}_{i,n}^s \\ p_{i,n}^c = \sum_{j=0}^J T_j(\xi) p_{i,n,j}^c = \mathbf{T}_p(\xi) \mathbf{p}_{i,n}^c \end{cases} \quad (25)$$

式中, $T_j(\xi)$ 是第一类的第 j 个切比雪夫多项式。

将式(21) ~ (25) 代入式(19) 得到修正的离散时域 Kirchhoff 边界积分方程:

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{r}) \mathbf{T}_p(\mathbf{r}) \mathbf{p}_{i,n}^s + \sum_{n=1}^N \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \int_{J_e} [\bar{G}_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \mathbf{T}_p \mathbf{r}_e(\xi) | \mathbf{J}_\xi | d\xi] \mathbf{q}_{i,n}^s \\ = \sum_{n=1}^N \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \int_{J_e} [H_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \mathbf{T}_p \mathbf{r}_e(\xi) | \mathbf{J}_\xi | d\xi] \mathbf{p}_{i,n}^s \\ \Re(\mathbf{r}) \mathbf{T}_p(\mathbf{r}) \mathbf{p}_{i,n}^c + \sum_{n=1}^N \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \int_{J_e} [\bar{G}_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \mathbf{T}_p \mathbf{r}_e(\xi) | \mathbf{J}_\xi | d\xi] \mathbf{q}_{i,n}^c \\ = \sum_{n=1}^N \sum_{m_i=1}^{N_i} \sum_{i=1}^I \int_{J_e} [H_{(n_i-m_i+1)(1)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) \mathbf{T}_p \mathbf{r}_e(\xi) | \mathbf{J}_\xi | d\xi] \mathbf{p}_{i,n}^c \end{aligned} \quad (26)$$

其中, \mathbf{T}_p 为由正交多项式组成的向量, \mathbf{J}_ξ 为坐标变换的雅可比矩阵。 $J + 1$ 配置点在每个边界元上, 位于第一类切比雪夫多项式的零点处:

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2(J+1)}\pi\right), j = 1, 2, \dots, J+1 \quad (27)$$

在结构与声场耦合界面上, 满足^[16]:

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_e, t)}{\partial n^+} = -\rho_0 [\ddot{w}_j(\mathbf{r}_e, t)]_{r=R} \quad (28)$$

式中, ρ_0 为流体密度, $\ddot{w}_j(\mathbf{r}_e, t)$ 表示结构法向加速度, 通过 Newmark- β 积分法和式(12) 求解。

联立式(26) 和式(27), 并以矩阵形式表述:

$$Cp^{n,l} = \sum_{m_l=1}^{N_l} \sum_{i=1}^I \tilde{G}_{(n_l-m_l+1)(1)}^i \ddot{w}_i^n + \sum_{m_l=1}^{N_l} \sum_{i=1}^I H_{(n_l-m_l+1)(1)}^i p_i^n \quad (29)$$

式中, $p^{n,l}$ 为第 l 个边界元上广义声压向量, \ddot{w}_i^n 和 p_i^n 分别表示广义加速度向量和广义声压向量, C 为结构边界影响系数, $\tilde{G}_{(n_l-m_l+1)(1)}^i$ 和 $H_{(n_l-m_l+1)(1)}^i$ 表示影响系数矩阵。

2 收敛性及有效性验证

2.1 计算模型

圆柱壳结构和材料参数如下: $L = 4 \text{ m}$, $R = 0.2 \text{ m}$, $h = 0.004 \text{ m}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$ 。流体介质参数取值为: $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $v_a = 340 \text{ m/s}$ 。边界条件弹簧刚度取值如表 1 所示, 振动考核点 $(0.25L, \pi, R)$, 噪声考核点 $(0.75L, 0, 2 \text{ m})$ 。激励载荷选取如图 3 所示的三角脉冲激励载荷, 激励点位置为 $(0.25L, 0, R)$ 。

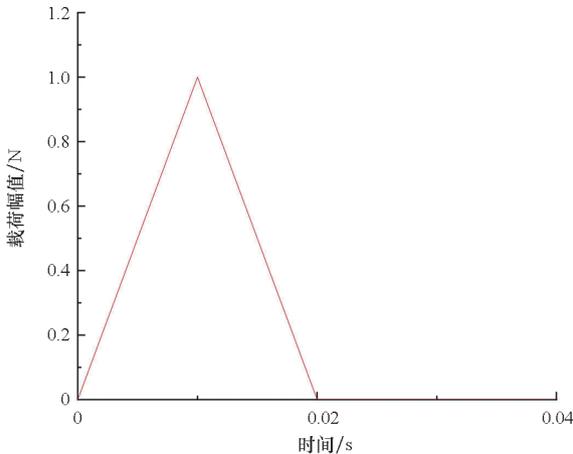
表 1 边界条件弹簧刚度值

Tab. 1 Spring stiffness values under boundary conditions

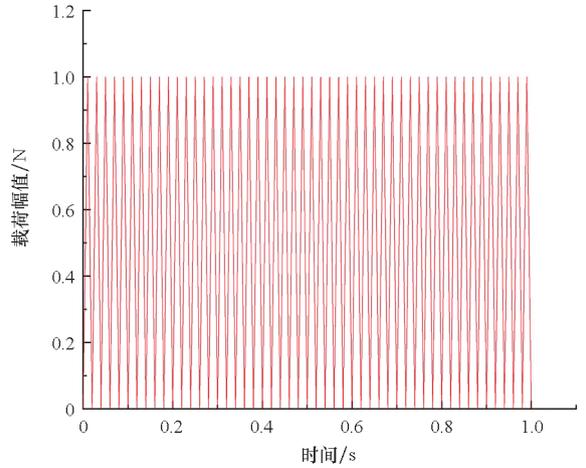
类型	线弹簧刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	旋转弹簧刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1}$)
固支 - C	$k_u = k_v = k_w = 10^{15}$	$k_x = k_\theta = 10^{15}$
简支 - S	$k_u = k_v = k_w = 10^{15}$	$k_x = k_\theta = 0$
自由 - F	$k_u = k_v = k_w = 0$	$k_x = k_\theta = 0$
弹性 - S	$k_u = k_v = k_w = 10^8$	$k_x = k_\theta = 10^8$

2.2 收敛性分析

在两端简支边界条件下, 选取 Jacobi 参数 $\alpha = 1$, $\beta = 1$, 不同分段数 H 和位移容许函数截断数



(a) 单个三角脉冲载荷
(a) Single triangular pulse load



(b) 周期三角脉冲载荷
(b) Periodic triangle pulse load

图 3 受迫振动激励载荷

Fig. 3 Forced vibration excitation load

M, N 对圆柱壳固有频率计算结果的影响如图 4 所示。由图 4 可知, 随着分段数和位移容许函数截断数的增加, 圆柱壳结构固有频率逐渐趋于收敛, 当 $H = 3, M = 6, N = 6$ 时, 与有限元方法 (finite element method, FEM) 计算结果对比误差较小。因此为保证圆柱壳体声振响应分析的精确性, 在后续研究中选取圆柱壳分段数 $H = 4$, 位移容许函数截断数 $M = 8, N = 8$ 。

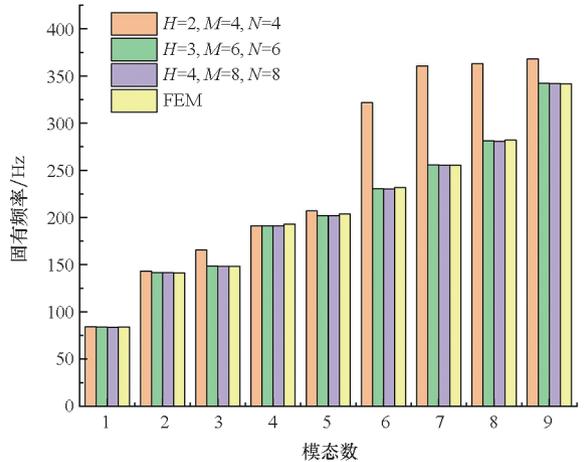


图 4 圆柱壳固有频率对比

Fig. 4 Natural frequency comparison of cylindrical shells

在 Jacobi 参数取值方面, 以 $\alpha = 1, \beta = 1$ 下的固有频率为参考值, 不同 Jacobi 参数下结构固有频率相对误差如图 5 所示。由图 5 可知, 简支边界条件下选取不同 Jacobi 参数 α, β 时, 固有频率最大相对误差不超过 2×10^{-6} , 即 Jacobi 参数的选取对圆柱壳结构振动特性影响较小。

图 6 为不同声压截断函数下的辐射噪声, 由分析结果可知, 在结构振动响应计算参数一定的

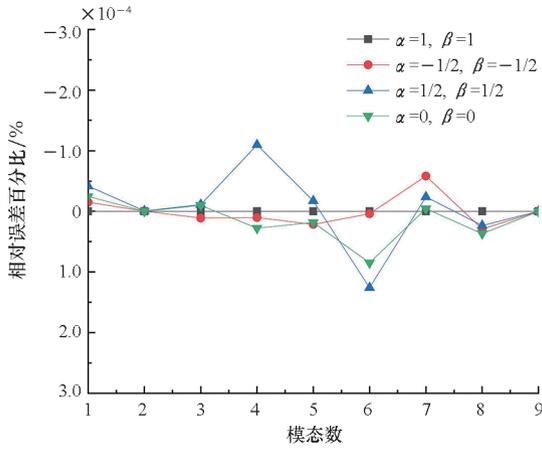


图5 不同 Jacobi 参数下固有频率相对百分比误差
Fig.5 Relative percentage error of natural frequency with different Jacobi parameters

情况下,随着声压截断函数 J 的增加,圆柱壳辐射噪声声压级快速稳定收敛,后续分析中取声压截断函数 $J = 4$ 。

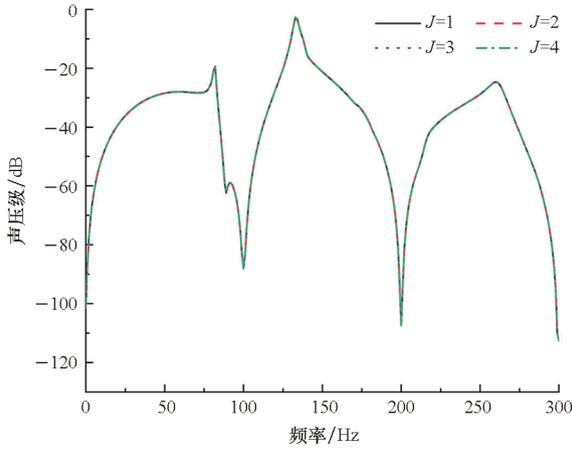


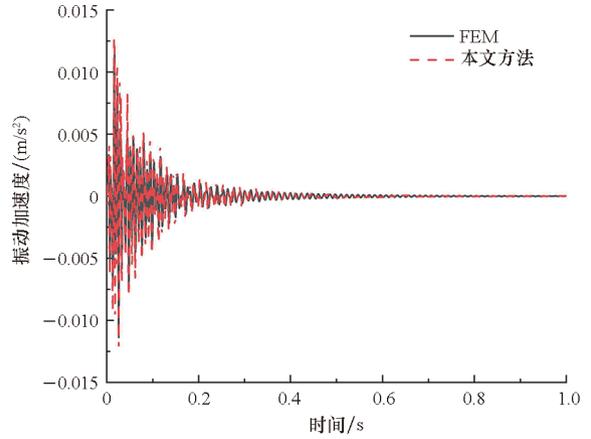
图6 不同声压截断函数下噪声收敛性分析
Fig.6 Analysis of acoustic convergence under different sound pressure truncation functions

2.3 有效性验证

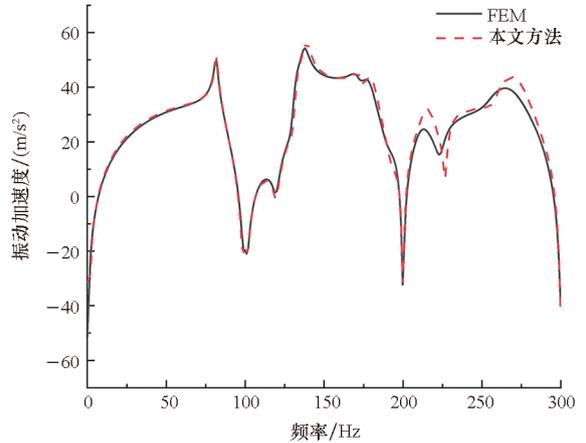
为验证 Jacobi-Ritz 时域半解析方法的有效性,施加如图 3 (a) 所示的单个三角脉冲载荷, Jacobi-Ritz 时域半解析方法与有限元方法/边界元方法 (finite element method/boundary element method, FEM-BEM) 声振时频响应结果对比情况如图 7 所示。边界条件为简支,分段数 $H = 4$,位移容许函数 $M = 8, N = 8$, Jacobi 参数 $\alpha = 1, \beta = 1$, 声压截断函数 $J = 4$ 。

由 Jacobi-Ritz 时域半解析方法与 FEM-BEM 方法在时域和频域计算结果曲线对比可知,圆柱壳结构振动响应吻合良好,而声辐射响应两者趋势基本一致,其量值的小幅差异可能是两种方法之间流

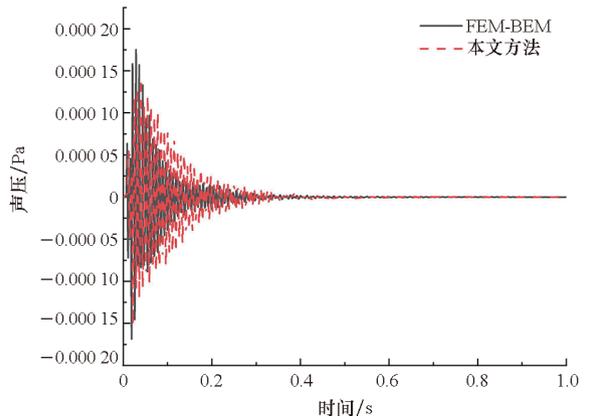
固交界面处声场节点和结构节点匹配算法不一致等导致。总体而言,理论方法与 FEM-BEM 方法求解误差相差较小,验证了 Jacobi-Ritz 时域半解析计算方法的有效性。此外, FEM-BEM 方法中采用的为稳定收敛网格,网格总数 57 519,同一计算机硬件环境下, FEM/BEM 计算时长 1 293 s,而 Jacobi-Ritz 时域半解析方法计算时长仅 52 s,由此验证了 Jacobi-Ritz 时域半解析方法的高效性。



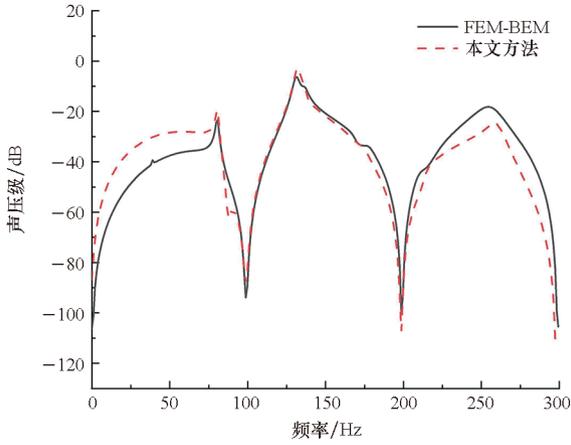
(a) 振动加速度时域响应
(a) Time domain response of vibration acceleration



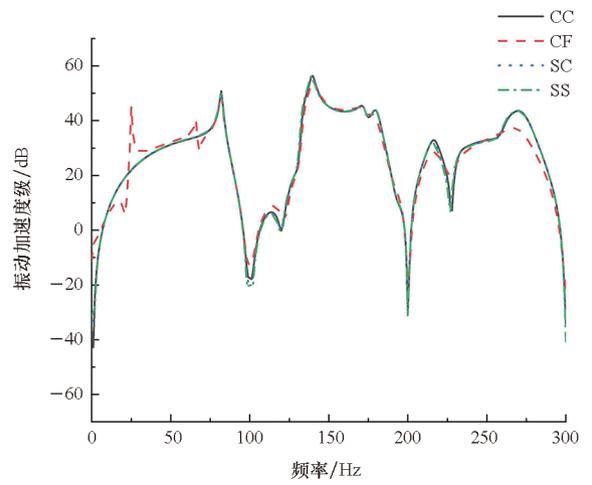
(b) 振动加速度频域响应
(b) Frequency domain response of vibration acceleration



(c) 辐射噪声时域响应
(c) Time domain response of acoustic radiation



(d) 辐射噪声频域响应



(b) 振动加速度频域响应

(b) Frequency domain response of vibration acceleration

图 7 理论解与 FEM-BEM 对比

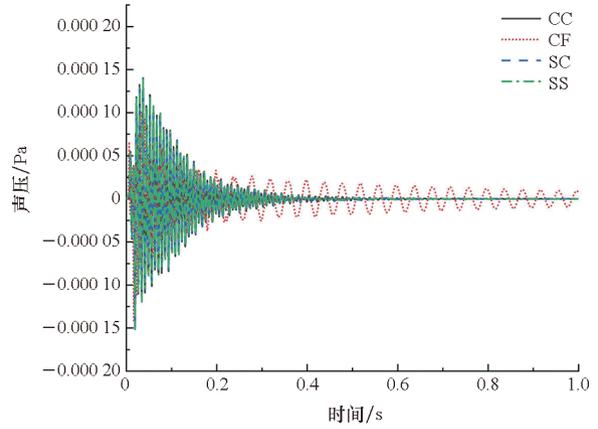
Fig. 7 Comparison of theoretical solutions and FEM-BEM results

3 圆柱壳受迫振动声辐射特性研究

3.1 边界条件的影响

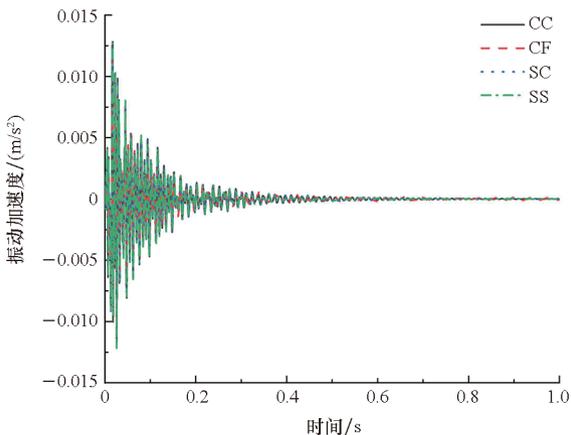
根据表 1 所示的弹簧刚度取值,以图 3(a) 所示的单个三角脉冲载荷为激励,激励位置 $(0.25L, 0, R)$,不同边界条件对圆柱壳振动声辐射的时频响应影响曲线如图 8 所示,其中 CC、CF、SC、SS 分别表示圆柱壳结构两端边界为固支、一端固支另一端自由、一端简支另一端固支、两端简支。

由图 8 可知,边界条件对结构受迫振动响应影响较大,但总体趋势保持一致,“CF”相较于其他三种边界条件在 25 Hz 和 66 Hz 引起声振响应峰值,这是由于“CF”边界相较于其他边界条件结构在 25 Hz 和 67 Hz 处存在固有模态。此外,固支边界条件相较于简支边界条件,约束了旋转弹



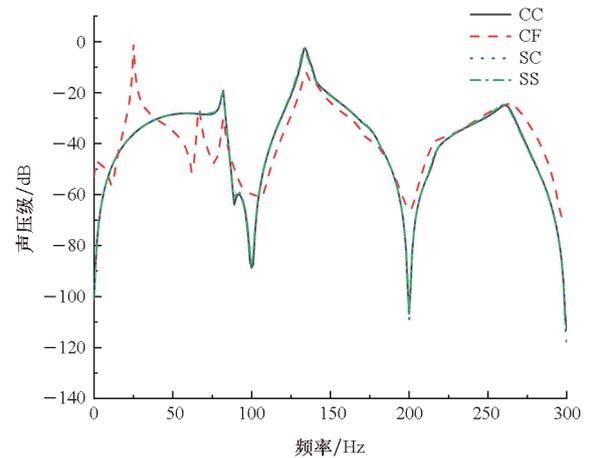
(c) 辐射噪声时域响应

(c) Time domain response of acoustic radiation



(a) 振动加速度时域响应

(a) Time domain response of vibration acceleration



(d) 辐射噪声频域响应

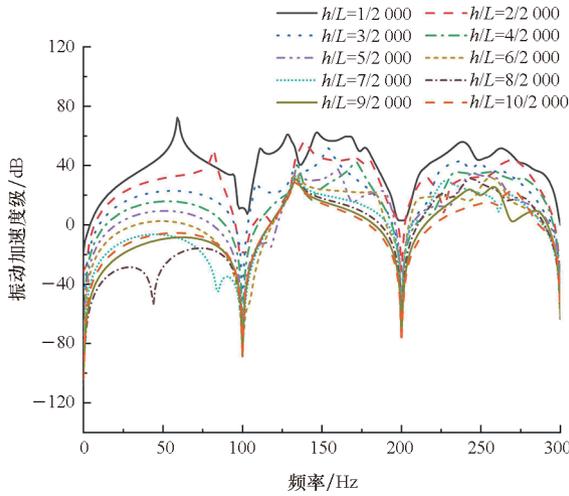
(d) Frequency domain response of acoustic radiation

图 8 不同边界条件下响应曲线

Fig. 8 Response curve under different boundary conditions 簧刚度,而其对结构固有频域影响较小,因此其余三种边界条件下声振响应共振峰值频率相差较小。

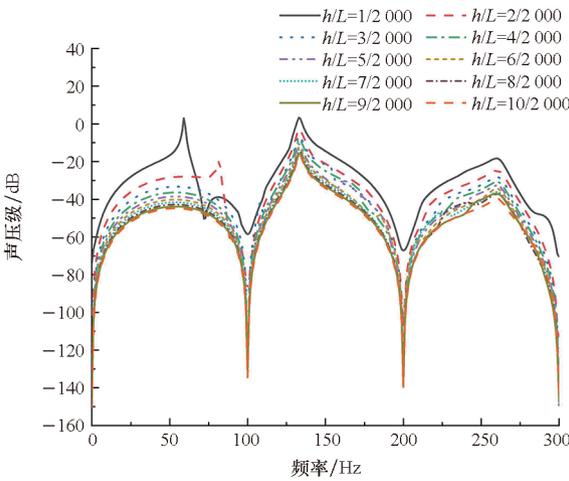
3.2 厚长比结构参数的影响

为探究圆柱壳厚长比参数对振动声辐射特性的影响,固定圆柱壳结构的长度、半径等结构参数,调节圆柱壳厚度,激励载荷形式为图 3(a)所示的单个三角脉冲载荷,图 9 给出了不同厚长比下圆柱壳振动声辐射频域响应曲线。



(a) 振动加速度频域响应曲线

(a) Frequency domain response of vibration acceleration



(b) 辐射噪声频域响应曲线

(b) Frequency domain response of acoustic radiation

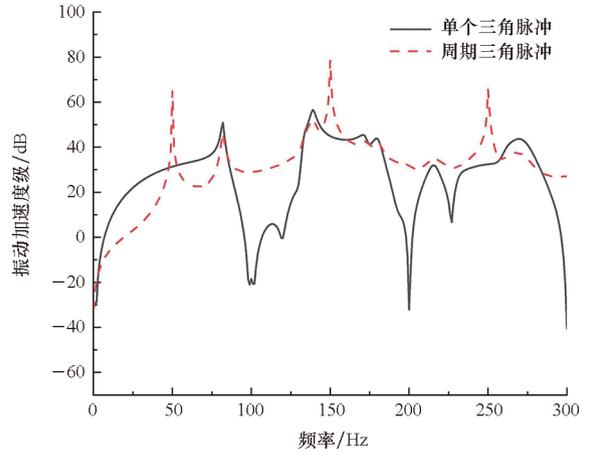
图 9 不同厚度下振动声辐射特性曲线

Fig. 9 Vibro-acoustic characteristic curves under different thicknesses

由图 9 可知,圆柱壳厚长比变化对振动声辐射响应具有显著影响,固定圆柱壳的长度时,随着圆柱壳厚度的增加,其振动声辐射的响应逐渐降低,原因主要是圆柱壳结构刚度随厚度的增加而增大。此外,当厚长比大于 0.003 时,随着厚度的增加,圆柱壳振动加速度级和声压级下降的趋势变缓,主要原因是此时结构厚度的增加对刚度增益降低。

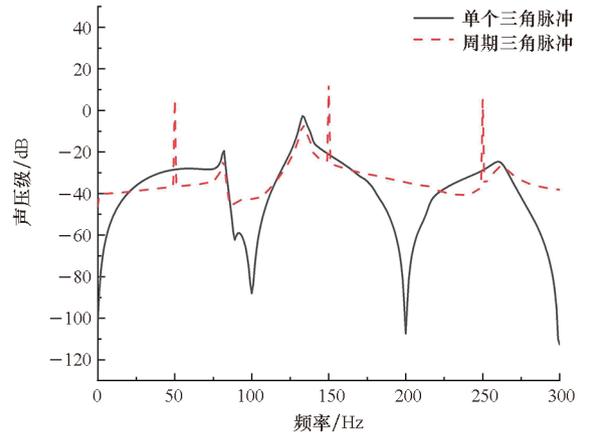
3.3 激励载荷形式的影响

为探究圆柱壳不同激励载荷下受迫振动声辐射特性的影响,选取如图 3 所示的脉宽为 0.02 s、幅值为 1 N 的单个三角脉冲和周期三角脉冲,时长均为 1 s,图 10 给出了两种激励载荷形式下振动声辐射特性曲线。



(a) 振动加速度频域响应曲线

(a) Frequency domain response of vibration acceleration



(b) 辐射噪声频域响应曲线

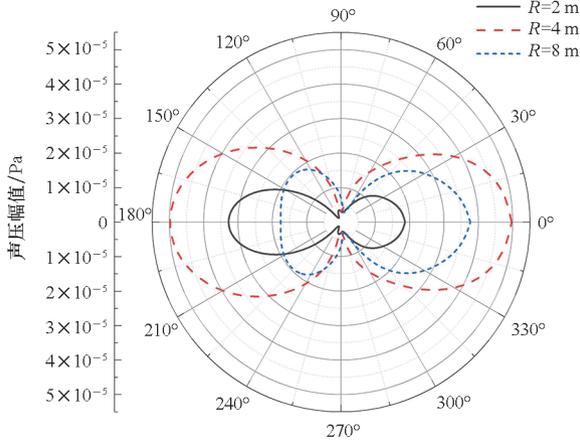
(b) Frequency domain response of acoustic radiation

图 10 不同激励载荷形式下振动声辐射特性曲线
Fig. 10 Vibro-acoustic characteristic curves under different excitation loads

由图 10 分析可知,除了结构的固有模态,激励载荷形式对结构振动声辐射的影响也较为显著,周期性三角脉冲载荷相较于单个三角脉冲载荷在 50 Hz、150 Hz、250 Hz 等倍频处引起振动响应和辐射噪声峰值,主要是由于周期性三角脉冲载荷在此频率下存在激励峰值及其倍频成分。为体现辐射噪声传递情况及特征频率下圆柱壳声压分布情况,在时间为 0.1 s、0.15 s 处及 50 Hz 和 82 Hz 频率处,给出了周期三角波载荷作用下,周向距离为 2 m、4 m、8 m 处的辐射噪声指向性图,

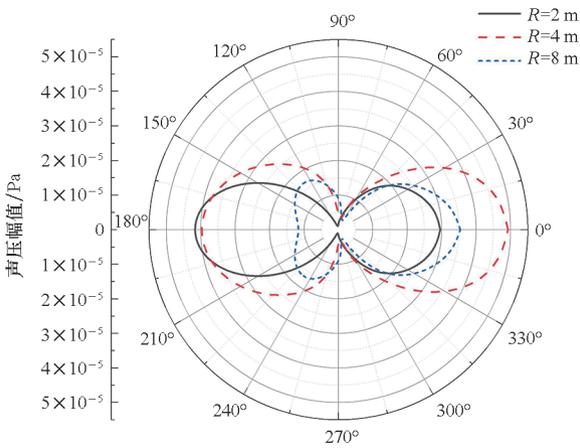
如图 11 所示。

由图 11 可以分析出,无论在时域还是频域角度,圆柱壳振动声辐射均以 0°(力的激发方向)到 180°之间的连接线对称分布。此外,圆柱壳结构



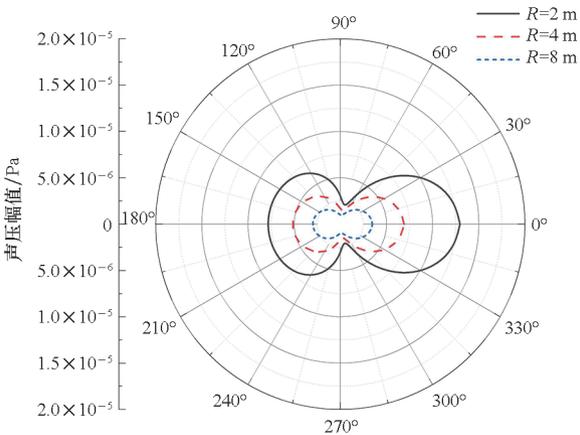
(a) 0.1 s 噪声时域指向性图

(a) Acoustic radiation directivity patterns in time domain at 0.1 s



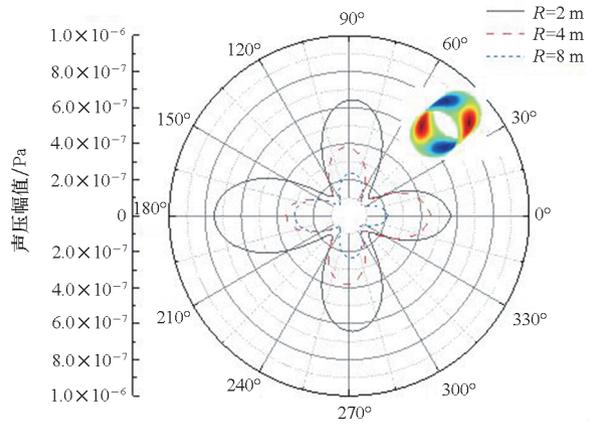
(b) 0.15 s 噪声时域指向性图

(b) Acoustic radiation directivity patterns in time domain at 0.15 s



(c) 50 Hz 噪声频域指向性图

(c) Acoustic radiation directivity patterns in frequency domain at 50 Hz



(d) 82 Hz 噪声频域指向性图

(d) Acoustic radiation directivity patterns in frequency domain at 82 Hz

图 11 不同周向距离下的辐射指向性图

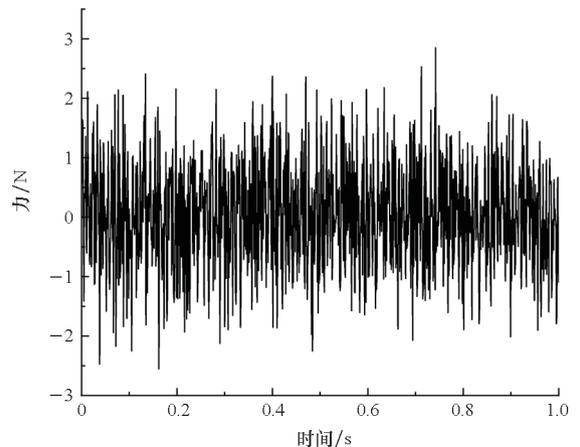
Fig. 11 Acoustic radiation directivity patterns with different circumferential distance

在 82 Hz 由固有频率引起的共振峰值,声压分布是 4 个花瓣,对应于结构振型(2,1)分布。为了探究激励载荷的随机性对圆柱壳声振响应的影响,在激励点(0.25L, 0, R)施加随机激励载荷,随机激励载荷曲线如图 12 所示,图 13 给出了随机激励载作用下结构振动声辐射曲线。

由图 13 可以分析出,随机激励载荷作用下结构振动响应和辐射噪声在 92 Hz 和 142 Hz 存在峰值,其中 92 Hz 是由随机激励载荷在此频率峰值引起,而 142 Hz 则是由结构在 141.3 Hz 固有频率下引起的强特征线谱。

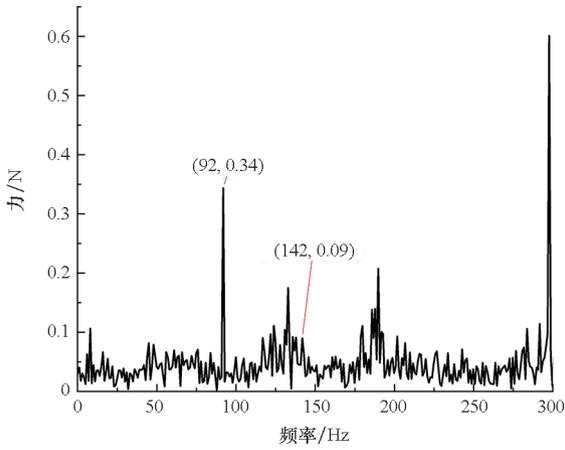
4 结论

本研究建立了基于 Jacobi-Ritz 振动声辐射时域半解析方法,开展了不同边界条件下圆柱壳受



(a) 随机激励载荷时域曲线

(a) Time domain curve of random excitation load

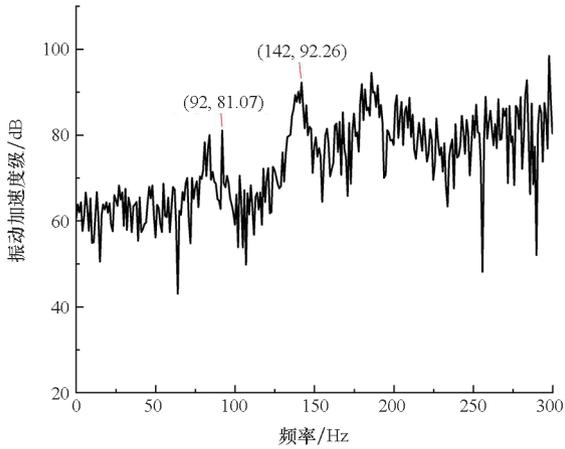


(b) 随机激励载荷频域曲线

(b) Frequency domain curve of random excitation load

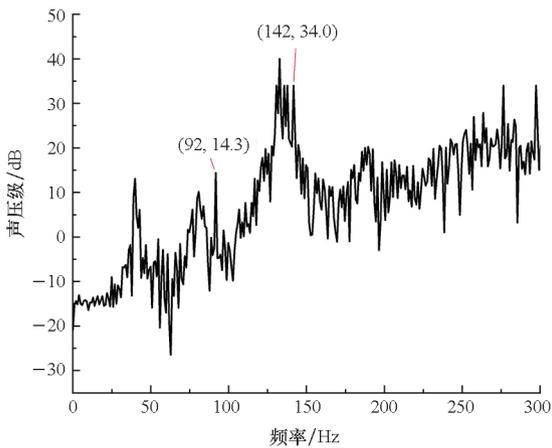
图 12 随机激励载荷幅值曲线

Fig. 12 Amplitude curve of random excitation load



(a) 振动加速度频域响应曲线

(a) Frequency domain response of vibration acceleration



(b) 辐射噪声频域响应曲线

(b) Frequency domain response of acoustic radiation

图 13 随机激励载荷振动声辐射曲线

Fig. 13 Vibro-acoustic characteristic curves of random excitation load

迫振动特性分析研究,形成主要结论如下:

1) 简支边界条件下, Jacobi-Ritz 时域半解析方法与 FEM-BEM 声振响应计算结果吻合较好,具备计算效率高、精度高等特点,可用于圆柱壳结构受迫振动声辐射特性分析。

2) 不同边界条件对结构振动声辐射响应影响较大,随着边界条件的刚度变弱,固有频率存在左移现象。当其他参数一定时,圆柱壳振动声辐射响应随着厚长比的增加总体呈下降趋势,当厚长比达到 0.003 时,圆柱壳结构振动声辐射响应降低的趋势变缓,说明此时厚度变化对结构刚度矩阵增益降低。

3) 圆柱壳在脉冲载荷和随机载荷激励下受迫振动声辐射由结构固有频率和激励载荷峰值引起特征线谱,在结构固有频率处,激励载荷偏小也可能造成强特征线谱。

参考文献 (References)

[1] CHEN M X, ZHANG L, XIE K. Vibration analysis of a cylindrical shell coupled with interior structures using a hybrid analytical-numerical approach [J]. Ocean Engineering, 2018, 154: 81 - 93.

[2] GANAPATHI M, PATEL B P, PATEL H G, et al. Vibration analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(1): 65 - 86.

[3] MATSUNAGA H. Vibration and buckling of cross-ply laminated composite circular cylindrical shells according to a global higher-order theory [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(9): 1060 - 1075.

[4] SHI D Y, HE D Z, WANG Q S, et al. Free vibration analysis of closed moderately thick cross-ply composite laminated cylindrical shell with arbitrary boundary conditions [J]. Materials (Basel, Switzerland), 2020, 13(4): 884.

[5] JIN G Y, YE T G, JIA X Z, et al. A general Fourier solution for the vibration analysis of composite laminated structure elements of revolution with general elastic restraints [J]. Composite Structures, 2014, 109: 150 - 168.

[6] JIN G Y, YE T G, MA X L, et al. A unified approach for the vibration analysis of moderately thick composite laminated cylindrical shells with arbitrary boundary conditions [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 75: 357 - 376.

[7] 李海超. 复合材料回转结构振动声辐射雅克比-里兹方法及应用 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2021.

LI H C. Jacobi-Ritz method and application for vibration and sound radiation of composite shells of revolution [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2021. (in Chinese)

[8] 李海超, 庞福振, 张航, 等. 阶梯厚度圆柱壳自由振动特性分析 [J]. 振动工程学报, 2020, 33(6): 1226 - 1233.

LI H C, PANG F Z, ZHANG H, et al. Free vibration

- analysis of stepped cylindrical shells[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2020, 33(6): 1226 - 1233. (in Chinese)
- [9] 王宇, 罗忠. 薄壁圆柱壳构件受迫振动的响应特征研究[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(7): 103 - 108.
WANG Y, LUO Z. Forced vibration response characteristics of thin cylindrical shell[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(7): 103 - 108. (in Chinese)
- [10] 瞿叶高, 华宏星, 孟光, 等. 基于区域分解的圆锥壳 - 圆柱壳 - 圆锥壳组合结构自由振动[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(22): 1 - 7.
QU Y G, HUA H X, MENG G, et al. A domain decomposition method for free vibration analysis of a joined conical-cylindrical-conical shell[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(22): 1 - 7. (in Chinese)
- [11] JAMALI J, NAEI M H, HONARVAR F, et al. Acoustic scattering and radiation force function experienced by functionally graded cylindrical shells [J]. *Journal of Mechanics*, 2011, 27(2): 227 - 243.
- [12] YANG H, SEONG W. Acoustic radiation efficiency of a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell with finite vibration loading [J]. *Applied Acoustics*, 2021, 171: 107664.
- [13] 王献忠, 江晨半, 计方, 等. 有限长加筋圆柱壳水下声辐射的精细传递矩阵法[J]. *船舶力学*, 2017, 21(4): 503 - 511.
WANG X Z, JIANG C B, JI F, et al. Acoustic radiation of submerged ring-stiffened cylindrical shells with precise transfer matrix method[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2017, 21(4): 503 - 511. (in Chinese)
- [14] 张超, 商德江, 李琪. 水下纵肋加强圆柱壳低频振动与声辐射[J]. *船舶力学*, 2018, 22(1): 97 - 107.
ZHANG C, SHANG D J, LI Q. Low-frequency vibration and sound radiation from submerged longitudinally stiffened cylindrical shell [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2018, 22(1): 97 - 107. (in Chinese)
- [15] QU Y G, ZHANG W M, PENG Z K, et al. Time-domain structural-acoustic analysis of composite plates subjected to moving dynamic loads[J]. *Composite Structures*, 2019, 208: 574 - 584.
- [16] WU H J, YU L, JIANG W K. A coupling FEM/BEM method with linear continuous elements for acoustic-structural interaction problems [J]. *Applied Acoustics*, 2019, 150: 44 - 54.