

含新型间断探测器的混合 WCNS 格式在间断无粘可压流的应用

张昊¹, 邓小刚^{1,2*}

(1. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073; 2. 军事科学院系统工程研究院, 北京 100082)

摘要:为了让高精度数值格式在含间断和小尺度涡等复杂结构的超声速无粘可压缩流动情况下,仍能鲁棒地捕捉激波并快速得到流场高保真的模拟结果,研究了以子模板导数组合为基础的光滑度量算法,构造了精度与鲁棒性兼顾的新型间断探测器,使间断识别对小尺度涡也具有高分辨率;研究了混合加权紧致非线性格式(weighted compact nonlinear scheme, WCNS)方法,对流场中的光滑与间断区域分别使用线性与非线性加权格式求解,从而克服单一非线性格式在光滑区分辨率难以达到设计精度的问题。数值实验表明,使用新型间断探测器的混合 WCNS 格式对一维、二维 Euler 方程模拟结果良好,并且相比于在全流场使用局部特征分解的原始 WCNS 方法有计算效率的提高。

关键词:激波捕捉;问题单元识别;有限差分法;高精度格式;双曲守恒律;无粘流动

中图分类号:V211.3 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2024)01-001-11



听语音
与作者互动
聊科研

Hybrid WCNS scheme with new discontinuity detector applied to discontinuous inviscid compressible flows

ZHANG Hao¹, DENG Xiaogang^{1,2*}

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. System Engineering Research Institute, Academy of Military Sciences, Beijing 100082, China)

Abstract: In order to enable high-precision accurate schemes to robustly capture shock waves and quickly obtain high fidelity simulation results of the flow field in supersonic inviscid compressible flow calculations, which usually contains complex structures such as discontinuities and small-scale vortices, a smoothness measurement algorithms based on combinations of sub-stencil derivatives were studied, and a new discontinuity detector was developed to balance accuracy and robustness, making troubled-cell recognition highly resolved for small-scale vortices. Hybrid WCNS (weighted compact nonlinear scheme) methods were studied, which could solve smooth and discontinuous regions in the flow field using linear and nonlinear weighting schemes respectively, to overcome the difficulty of a single nonlinear scheme in achieving design accuracy in smooth areas. Numerical results show that the hybrid WCNS scheme with new discontinuity detector performs well in simulating one-dimensional and two-dimensional Euler equations, and has higher computational efficiency compared to the original WCNS method that uses local characteristic decomposition in the entire flow field.

Keywords: shock capturing; troubled-cell recognizing; finite difference method; high accuracy scheme; hyperbolic conservation law; inviscid flow

超声速无粘可压缩流动由双曲守恒律描述,在各种实际问题中得到了广泛应用,相应方程也属于计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)重点求解的模型问题。它的一个主要特征是即使初始条件光滑,解也可能发展出间断^[1]。具体来说,当超声速来流流过飞行器外形或受到各种扰动影响后,多样化的流场结构随之产生,例如激波、接触间断、涡与湍流,以及它们的相互作用

用等。激波等间断会使得流动变量值发生突变,能否对其进行精确还原关系着数值模拟方法是否可靠。在求解过程中,格式不仅需要最小化色散耗散误差达到高分辨率,来精细还原流场中的小尺度涡,还需要在间断附近保持足够的数值耗散,从而抑制非物理振荡,确保计算的稳定性^[2]。在这些近乎矛盾的要求之下,如何构造高保真的高阶精度数值格式,同时具备良好的激波捕捉能力,

收稿日期:2023-05-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11972370,11927803)

第一作者:张昊(1996—),男,山东烟台人,博士研究生,E-mail:zhanghao@nudt.edu.cn

*通信作者:邓小刚(1960—),男,四川绵阳人,研究员,博士,博士生导师,E-mail:xgdeng2000@sina.com

来准确精细地模拟复杂流动特征,成为 CFD 领域长期的重大挑战。

为了能够实现以上要求,高精度格式应运而生。由于内含的数值耗散更低,在同样的网格规模下,高阶格式相比于二阶格式在计算精度上有显著提升^[3]。特别地,高阶有限差分方法的数学形式直接且构造方式简单,因而受到了广泛关注。此外对于多维问题,有限差分方法由于可以维数分解,相比于其他方法也更加高效适用^[4]。当前发展最多的高阶激波捕捉格式之一就是加权紧致非线性格式 (weighted compact nonlinear scheme, WCNS),它由 Deng 等^[5]提出,然后经过一系列改进,是有效结合求解流场光滑与间断区域的方法。根据解的局部光滑程度,WCNS 格式可以通过非线性权动态调整子模板在插值中的权重,实现无振荡地捕捉间断。

然而,这种非线性机制也降低了 WCNS 在光滑区的谱特性。对于无粘可压缩流的小尺度结构,格式的数值耗散可能超过物理耗散^[6],使其在光滑区的色散耗散误差经常大于其应恢复到的线性格式的水平^[7]。而且在计算含间断的双曲守恒律系统时,需要对全场使用局部特征分解,将问题变换到特征空间求解,以解耦非线性系统从而减少扰动。这虽然可以避免间断周围解的振荡,但也大大增加了计算时间,格式的效率 and 鲁棒性都有待进一步提高。通常有两种方法可以改善非线性加权格式的色散耗散特性:增强非线性机制、构造混合格式^[8]。这里仅对后一类进行讨论。

混合格式由于其易实现性,正成为越来越多学者的研究对象。通过将间断与光滑区二分,它可以更好地利用激波捕捉格式及低耗散高保真算法各自的优势特性,从而相比于完全采用特征分解的单一方法具有更高的分辨率、更优的计算效率^[9]。Deng 等^[10]通过边界变差递减方法将可调节耗散算法用于尺度分辨模拟,构造了激波捕捉的迎风-中心型混合格式。Shen 等^[11]提出了一类求解双曲守恒律的加权紧致中心格式,能实现任意一致的时空高阶,并借由限制器完成间断捕捉。Wan 等^[12]提出了一种新的混合策略,将模板分为光滑、不光滑或过渡区域,各自应用相适应的格式来模拟 Euler 方程的定常解。

不过,在分别处理光滑区和间断之前,必须能够正确分辨它们。间断探测器正是实现此类识别的一种有效手段。目前已经发展出许多种类的问题单元探测器,其性质对整个格式的分辨率和鲁

棒性都会产生很大影响,成为发展混合格式的重要挑战^[8]。Jiang 等^[13]以模板上非线性权的最小值与最大值之比作为探测器构造依据,实现了较好的间断捕捉能力。类似地,Tang^[14]提出了使用子模板光滑度量的最小值与最大值之比的探测器,进而自适应地调节非线性权中的指数。Ruan 等^[15]设计了单调保持-加权群速度控制间断传感器,分别使用光滑和间断探测器,将流场分为光滑、大间断、小间断三类区域分别求解。Takagi 等^[16]基于无参数间断探测标准,将目标本质无振荡格式的非线性权值组合作为探测器,发展了新的激波捕捉框架。Xue 等^[17]为混合格式发展了一种简化的多层感知光滑探测器,并在光滑与不光滑之外引入高频区,提高了格式的谱分辨率。

本文基于结构网格的高精度有限差分方法,总结在间断无粘可压缩流动计算中的间断探测与混合格式应用问题;给出混合格式的通用两步构造框架,并归纳基于导数组合、光滑度量方法这两种常见构造类型的间断探测器,进而设计出一种新的问题单元探测器,实现对光滑与间断波形的识别,并将其用于发展混合 WCNS 格式以完成对间断单元的非线性处理;针对波形识别和一维、二维 Euler 方程算例,从多个角度展示计算结果,并与其他探测器进行对比,对各自的优势与不足进行更深入的分析。

1 控制方程与 WCNS 离散

将研究限制在五阶 WCNS 格式,对于其他阶精度可以用同样的方法实现。为了描述算法,简化无粘流动模拟,考虑一维标量双曲守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

式中, $u = u(x, t)$ 表示流动变量, $f(u)$ 是 u 的通量, $x \in [a, b]$ 和 $t \in [0, \infty)$ 分别是空间与时间坐标。在均匀网格单元上,使用有限差分方法进行空间离散。 $x_j = jh$ 表示点 j 的坐标,其中 $j = 0, 1, \dots, N$, 网格间距 $h = (b - a)/N$ 。然后可以得到守恒律方程的半离散形式

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -F'_j \quad (2)$$

式中, $u_j(t)$ 和 F'_j 分别代表变量 $u(x_j, t)$ 和通量导数 $f'_j = \partial f / \partial x |_{x=x_j}$ 的数值近似。 F'_j 使用六阶显式差分计算。

五阶 WCNS 在五点模板 $S_5 = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$ 上对半点变量左右值 $\bar{u}_{j+1/2}^{L/R}$ 进行非线性插值。简便起见,这里只对 $\bar{u}_{j+1/2}^L$ 进行分析,同时省略上标 L,对称可得 $\bar{u}_{j-1/2}^R$ 。在三个三点子模板

$S_3^k = \{x_{j+k-2}, x_{j+k-1}, x_{j+k}\}$ ($k=0,1,2$) 上,分别线性插值得到半点值的三阶近似 $\tilde{u}_{j+1/2}^k$,其表达式可见文献[18]。五阶插值是它们的线性组合

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \sum_{m=0}^2 d_m \tilde{u}_{j+1/2}^m \quad (3)$$

式中, d_m ($m=0,1,2$) 被称为最优权或线性权, $d_0=1/16, d_1=5/8, d_2=5/16$ 。式(3)的展开式也对应着五阶显式迎风线性插值

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \frac{3u_{j-2} - 20u_{j-1} + 90u_j + 60u_{j+1} - 5u_{j+2}}{128} \quad (4)$$

用非线性权 ω_m 代替最优权 d_m ,就得到了非线性插值格式

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \sum_{m=0}^2 \omega_m \tilde{u}_{j+1/2}^m \quad (5)$$

通过设计非线性权,在光滑区令 ω_m 接近 d_m ,使目标格式的精度接近线性格式;而在间断区则令 ω_m 趋于 0,从而避免跨间断插值,抑制数值振荡。在 ω_m 的选择上,使用耗散较低的 Z 型权^[18] 进行计算,从而更加凸显探测器对格式分辨率的提高作用,其形式为

$$\begin{cases} \omega_m^Z = \frac{\alpha_m^Z}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z} \\ \alpha_m^Z = d_m \left[1 + \left(\frac{\tau}{\beta_m + \varepsilon} \right)^q \right] \end{cases} \quad (6)$$

其中:下标 $m=0,1,2$; $q=1$ 为耗散控制参数;全局光滑度量 $\tau = |\beta_0 - \beta_2|$;小量 $\varepsilon = 10^{-40}$ 用来避免分母为零;子模板光滑度量 β_m 的具体形式亦可参考文献[18]。

矢量扩展式(1),有模拟无粘流的 Euler 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

式中,守恒变量 \mathbf{U} 的表达式为

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, E)^T \quad (8)$$

通量 \mathbf{F} 的表达式为

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, (E+p)u)^T \quad (9)$$

ρ, u, p 分别代表密度、速度、压力;总能 $E = e + \rho u^2/2$,其中 e 为内能。为了使方程封闭,再引入理想气体状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho E \quad (10)$$

式中, γ 为比热比,对于非高温空气一般取 $\gamma = 1.4$ 。

当使用非均匀网格时,需要从物理坐标系 x 向计算坐标系 ξ 做网格变换,该变换关系为

$$\xi = \xi(x) \quad (11)$$

坐标变换后的 Euler 方程为

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

式中, $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}/J$, 通量

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\xi}_x \mathbf{F} = \tilde{\xi}_x (\rho u \tilde{\xi}_x, \rho u^2 \tilde{\xi}_x + p \tilde{\xi}_x, (E+p)u \tilde{\xi}_x)^T \quad (13)$$

式(13)中所用到网格导数的表达式为

$$\tilde{\xi}_x = \frac{\xi_x}{J} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (14)$$

其中, $1/J$ 为 Jacobian 矩阵的行列式,即网格导数雅可比

$$\frac{1}{J} = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \quad (15)$$

2 混合 WCNS 算法与间断探测器

2.1 混合 WCNS 算法

在混合 WCNS 格式中,主要不同在于不是单纯应用非线性插值,而是在模板 S_3 上通过间断区的 WCNS 方法或光滑区的迎风线性公式来插值无粘流 $\tilde{u}_{j+1/2}^{L/R}$ 。与原 WCNS 格式相比,这种混合除了能够保持分辨率与抑制振荡特性,还减少了计算时间。具体步骤如下:

步骤 1: 在每个时间步开始时,在整个计算域应用间断探测器来识别不光滑单元。将在半节点 $x_{j+1/2}$ 处的探测结果记为 $\sigma_{j+1/2}$,对于光滑流动其值为 1,而在间断处则等于 0。显然,该指标对混合格式的效率和准确性起着重要作用,这将在后文进一步研究。

步骤 2: 要构造混合 WCNS 格式,单元 j 边界上的插值公式需变为

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \sigma_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2}^{\text{linear}} + (1 - \sigma_{j+1/2}) \tilde{u}_{j+1/2}^{\text{WCNS}} \quad (16)$$

式中, $\tilde{u}_{j+1/2}^{\text{linear}}$ 和 $\tilde{u}_{j+1/2}^{\text{WCNS}}$ 分别代表了线性插值与 WCNS 插值,同样包含了左右值,即通过探测结果 $\sigma_{j+1/2}$ 完成二者的切换。为了提高算法的鲁棒性,对于被判定为间断的点,需在其周围添加缓冲区,将左右各 1 个点也标记为 $\sigma_{j+1/2} = 0$ 处理,以应对子时间步中可能出现的间断运动。

至此阐明了混合 WCNS 格式模拟无粘流动的一般框架,可以发现其重点在于能够自动准确分辨间断,从而自适应地采用非线性插值求解,并在光滑节点使用更高效、更高分辨率的线性格式。此外将引入一些经典的间断探测器作为对比,各探测器的表达式将在 2.2 节一并给出。

需要注意,插值过程在求解方程组时按变量分量逐个进行,而在多维问题中是逐维展开^[8-9]。但将探测器应用到多维时,会存在多维耦合效应,给出以下几点原因做定性分析:第一,混合格式所

用到的 WCNS 本身在推广到多维时就考虑了几何守恒律,需要探测器及混合格式与其相匹配;第二,实际流动结构是多维的,流动变量在各方向同时变化,只在一维层面上识别间断可能忽略这种耦合效应,影响结果的准确性;第三,根据文献[19]对依赖域的论述,多维情况下所用到的其他方向节点,虽然处于上游节点的影响域内,但实际上超出了目标点按流动特征所形成的依赖域。此外,在每个空间节点上做多维耦合探测,相比于解耦探测并不会显著增加间断单元识别的计算量,具体细节这里不做讨论。

边界条件方面,由于主要关注内点空间格式构造,且采用笛卡尔网格计算,所以在边界使用虚拟点方法。在超声速入口、出口边界,分别使用自由流条件和内点外推。对于无粘固壁边界,虚拟点的密度、压力等标量与对应内点相同,速度矢量的切向、法向分量则都与对应内点大小相等、方向相反,以保证壁面处速度为 0。至于对称边界,将固壁边界中的速度切向分量改为与对应内点方向相同即可。

2.2 新型间断探测器

在介绍新型间断探测器之前,先回顾几种常用的探测器,新方法的提出与它们内含的思想一脉相承。此外每种情况下,在探测前都先对变量做归一化处理,这有助于在光滑区中当解的绝对值很大但相对变化小时消除误判^[8]。

Harten^[20]基于流场梯度的变化,考虑三点模板上一二阶导数的比值,提出

$$\varphi_{j+1/2} = 1 - \frac{|u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}|}{|u_{j-1} - u_j| + |u_j - u_{j+1}| + \varepsilon} \quad (17)$$

$$\sigma_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \varphi_{j+1/2} < \varphi_c \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

其中: $\varphi_{j+1/2}$ 用于反映界面 $x_{j+1/2}$ 附近的流场光滑程度;阈值 $\varphi_c = 0.3$; ε 为防止分母为 0 的小量,这里取 $\varepsilon = 10^{-3}$ 。

Li 等^[8]改进了 Harten 指示器,通过将模板扩展到五点,并重新组合导数,改善了探测器比值项对间断特异性捕捉的能力,大大降低了在极值点附近的误判。具体公式如下:

$$\psi_j = \min(\psi_j, \psi_{j+1}) \quad (19)$$

$$\psi_j = \frac{2ab + \varepsilon}{a^2 + b^2 + \varepsilon} \quad (20)$$

$$\begin{cases} a = |u_j - u_{j-1}| + |u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}| \\ b = |u_j - u_{j+1}| + |u_j - 2u_{j+1} + u_{j+2}| \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$\varepsilon = \frac{0.9\psi_c}{1 - 0.9\psi_c} \xi^2 \quad (22)$$

$\xi = 10^{-2}$ 。从而有间断探测器

$$\sigma_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \psi_{j+1/2} < \psi_c \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

式中, ψ_c 为阈值常数,若 $\psi_{j+1/2} \geq \psi_c$ 则认为流场光滑,否则包含间断。通常 ψ_c 越大,混合格式的鲁棒性越好; ψ_c 越小,混合格式的分辨率越高。这里取 $\psi_c = 0.4$ 。

除了使用相邻点导数组合,还发展出了基于非线性加权格式光滑因子的间断探测器。Fu^[9]发现 TENO 格式通过改进非线性机制,能够在谱空间中有效区分光滑区和间断,并由此提出一种新的基于六点模板 $S_6 = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}\}$ 的问题单元探测器。具体形式如下:

$$\gamma_k = \frac{1}{(\beta_k + \varepsilon)^q} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (24)$$

式中, $q = 6$, $\varepsilon = 10^{-4}$, β_k 按照光滑度量公式在四个三点子模板上计算得到。之后对 γ_k 进行归一化

$$\chi_k = \frac{\gamma_k}{\sum_{k=0}^3 \gamma_k} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (25)$$

得到探测结果

$$\sigma_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \chi_k \leq C_T^*, \exists k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (26)$$

式中,阈值 $C_T^* = 5 \times 10^{-4}$ 为探测器参数。当非线性权标识出不光滑子模板时,即判定 $x_{j+1/2}$ 处包含间断。

新型间断探测器在上述几种思想的基础上,使用六点模板 $S_6 = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}\}$ 进行问题单元识别。首先在四个三点子模板 $S_3^k = \{x_{j+k-2}, x_{j+k-1}, x_{j+k}\}$ ($k = 0, 1, 2, 3$)上,根据各自的一阶导数

$$\begin{cases} u'_{j+1/2}{}^0 = \frac{1}{2} |u_{j-2} - 4u_{j-1} + 3u_j| \\ u'_{j+1/2}{}^1 = \frac{1}{2} |u_{j-1} - u_{j+1}| \\ u'_{j+1/2}{}^2 = \frac{1}{2} |3u_j - 4u_{j+1} + u_{j+2}| \\ u'_{j+1/2}{}^3 = \frac{1}{2} |5u_{j+1} - 8u_{j+2} + 3u_{j+3}| \end{cases} \quad (27)$$

及全场一阶导平均值

$$\bar{u}' = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N u'_{j+1/2} \quad (28)$$

构造组合参数,来反映解的变化情况。

$$\eta_k = u'_{j+1/2}{}^k / (\bar{u}' + \varepsilon) \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (29)$$

其中小量 $\varepsilon = 10^{-4}$ 用来避免分母为 0。进而得到探测结果

$$\sigma_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \max(\eta_k) > C, k=0,1,2,3 \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (30)$$

阈值 $C = 3.0$ 。

不难看出,这里新构造的探测器相比 Li、Fu 探测器,最核心的不同是重点关注子模板一阶导数,并引入一阶导全场平均值作为比较基准,从而敏锐地捕捉间断信息,其效果将在下一节给出。而且在确定阈值 C 的过程中发现,这种 η_k 形式对不同流场结构的识别结果差异明显,容易通过设定阈值进行区分,实现对间断的准确识别。

3 数值结果

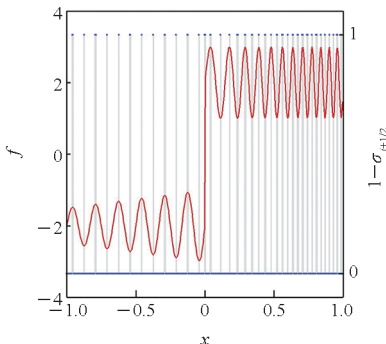
对上一节提到的间断探测器进行测试,算例使用的所有物理量均为无量纲量。首先用波形来检验探测器的识别能力和适用性,然后将其用于混合格式,求解模拟无粘流的 Euler 方程对比结果。关于识别变量的选择,波形测试中直接使用波形函数 f , Euler 方程中使用密度 ρ 。在所有 Euler 方程算例中,应用混合 Roe-Rusanov 通量格式,并采用三阶强稳定性保持 Runge-Kutta 方法^[21]进行时间推进,CFL 数均取 0.6。

3.1 一维波形测试

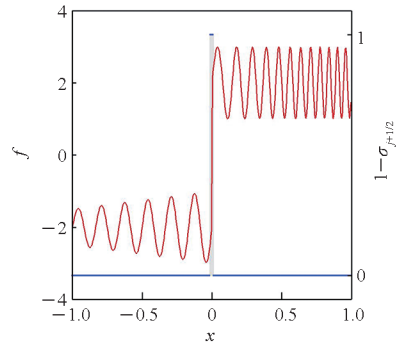
首先通过不同波数和幅值的正弦波形来检验各探测器的分辨能力。将计算域 $x \in [-1, 1]$ 用 400 个均匀网格离散,波形函数如下:

$$f(x) = \begin{cases} (0.5x + 1) \cdot \sin(12\pi x) - 2 & -1 \leq x < 0 \\ \sin[(x + 1) \cdot 12\pi x] + 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (31)$$

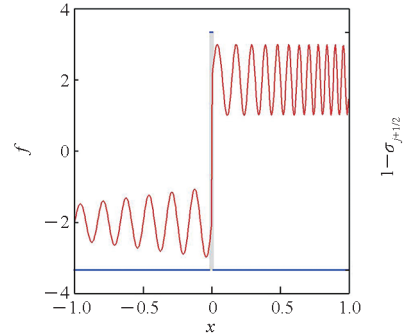
不同探测器的正弦波形测试结果如图 1 所示。其中正弦波形用红色实线标出,蓝色点(坐标在右轴)表示探测结果,且调换了 $\sigma_{j+1/2}$ 的 0、1 值位置,此时被灰色阴影所覆盖的区域即为识别到的间断,下同。从图中可以看出,四种探测器都



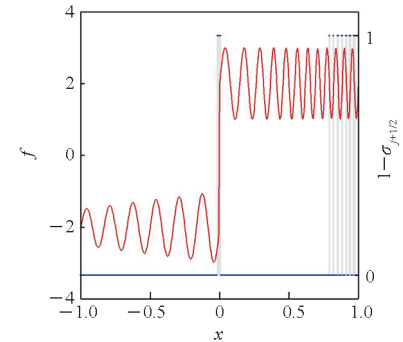
(a) Harten 探测器
(a) Harten detector



(b) Li 探测器
(b) Li detector



(c) Fu 探测器
(c) Fu detector



(d) 新型探测器
(d) New detector

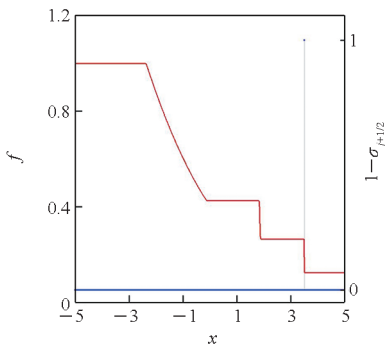
图 1 各探测器正弦波形测试结果

Fig. 1 Sine wave test results of each detector

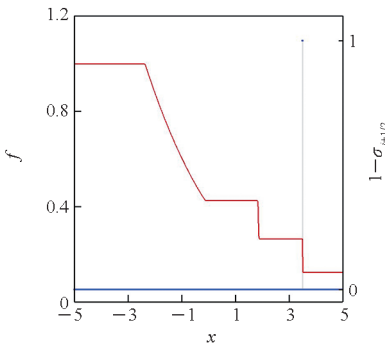
识别出了 $x = 0$ 附近的间断,其中新型探测器与 Li、Fu 探测器的结果相似,除了较高波数时,没有像 Harten 探测器在变化的幅值和频率下产生误判。

然后使用 Sod 问题^[22]结果,进一步考察探测器对不同流动结构的识别能力,此时密度波形中从左至右依次分布着膨胀波、接触间断、激波。待识别波形为五阶原始 WCNS 在 2 000 个单元上的计算结果,也用 2 000 个均匀网格离散计算域 $x \in [-5, 5]$ 。

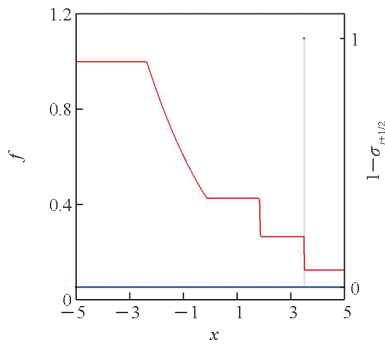
不同探测器的 Sod 波形测试结果如图 2 所示。四种探测器都识别出了 $x = 3.5$ 附近的间断,其中 Harten 探测器的阴影区相比后三者的更细。



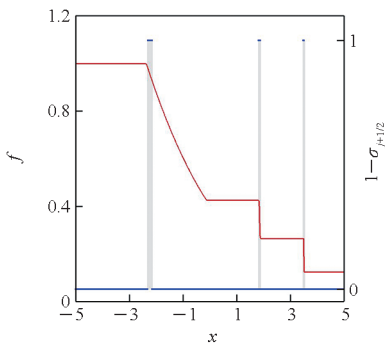
(a) Harten 探测器
(a) Harten detector



(b) Li 探测器
(b) Li detector



(c) Fu 探测器
(c) Fu detector



(d) 新型探测器
(d) New detector

图 2 各探测器 Sod 波形测试结果

Fig. 2 Sod profile test results of each detector

此外,只有新型探测器判别出了 $x = 2$ 周围的接触间断,表明其在间断识别方面具有更好的鲁棒性。同时,新型探测器也对少部分膨胀波做了判别。

3.2 一维 Euler 方程测试

下面通过混合 WCNS 格式计算进一步考察探测器的性能。首先选取 Sod 激波管问题^[22],可以较全面地考察探测器对非定常稀疏波、接触间断、激波等常见流动结构的识别能力。初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & 0 \leq x \leq 5 \\ (0.125, 0, 0.1) & 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad (32)$$

用 $N = 200$ 个均匀网格离散,推进到无量纲时间 $t = 2.0$ 。图 3 给出了密度计算结果,其中精确解为五阶 WCNS 在 2 000 个单元上的结果,右上方框内为间断区域的放大。几种探测器都能准确识别各种光滑与间断结构,实现混合格式效果。

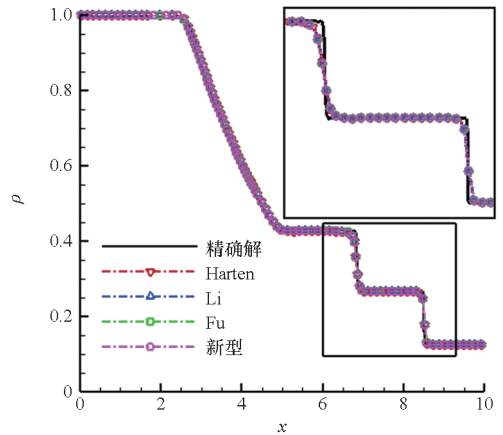


图 3 Sod 问题密度计算结果

Fig. 3 Density results of Sod problem

为了进一步测试混合格式的分辨率与鲁棒性,下个算例使用经典的 Shu-Osher 问题^[23],即一道马赫数为 3 的激波与带密度扰动的正弦熵波发生非定常相互作用,其也广泛应用于测试格式在捕捉激波的同时对小尺度结构的分辨能力。初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, 2.629, 10.333) & -5 \leq x \leq -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1) & -4 < x \leq 5 \end{cases} \quad (33)$$

使用 $N = 200$ 个均匀网格离散,时间推进到 $t = 1.8$ 。图 4 给出了流场的密度分布,其中精确解由五阶 WCNS 在 2 000 个单元上计算得到,左下方框内为相互作用区的放大。通过对比可知各格式都能实现较好模拟,在间断位置均无过冲。新型探测器具有优于 Harten 与 Fu 探测器的分辨率,稍弱于 Li 探测器的结果,体现出其分辨率与鲁棒性兼顾的识别状态,适合嵌入混合格式。

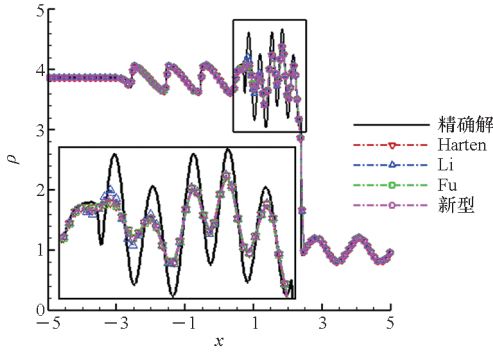


图 4 Shu-Osher 问题密度计算结果

Fig. 4 Density results of Shu-Osher problem

接下来由表 1 给出应用各探测器的混合格式计算所花费的 CPU 时间、占原 WCNS-Z 格式计算时间的比例,以及在最后时刻所判别到的间断单元在全流场所占的百分比。数据结果体现出新型探测器的识别范围适中,且对应混合格式的计算效率较高。

表 1 Shu-Osher 问题计算时间及比例

Tab. 1 Calculation time and ratio of Shu-Osher problem

间断探测器	计算时间/s	计算时间占比	间断单元百分比
WCNS-Z	0.81	1.00	100.00
Harten	0.59	0.73	36.00
Li	0.38	0.47	15.50
Fu	0.45	0.56	37.50
新型	0.41	0.50	24.50

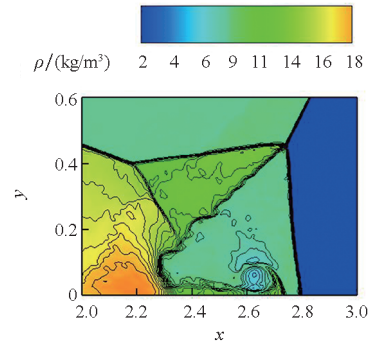
3.3 二维 Euler 方程测试

首先计算双马赫反射问题^[24]。该算例描述了在二维无粘流动中,马赫数 10 的激波以 60°角入射到静止平板并继续传播,能考核格式精确捕捉强激波和回流区小尺度结构等的的能力。初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.4, 0, 0, 1) & x > \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}y \\ (8, 7.1, -4.1, 116.5) & \text{其他} \end{cases} \quad (34)$$

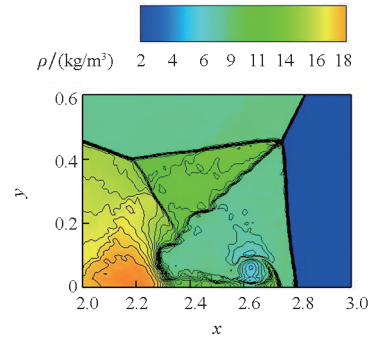
式中, v 表示 y 方向速度。计算域 $(x, y) \in [0, 4] \times [0, 1]$, 用 400×100 个均匀网格离散, 并使用消息传递接口 (message passing interface, MPI) 给定 4 个核进行并行计算, 推进到 $t = 1.8$ 。通过沿滑移线产生的涡结构的丰富程度, 可以判断格式的耗散大小。图 5 给出了四种探测器在回流区附近得到的密度等值线。所有结果都捕捉到了三波点附近的马赫杆、反射激波等, 而且 Fu 和新型探测

器识别到了更丰富的滑移线涡结构。



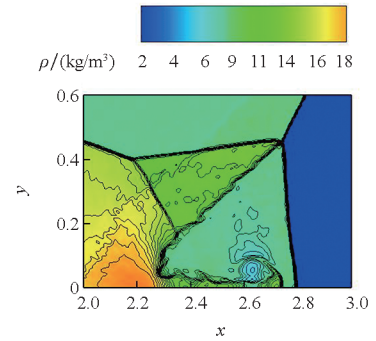
(a) Harten 探测器

(a) Harten detector



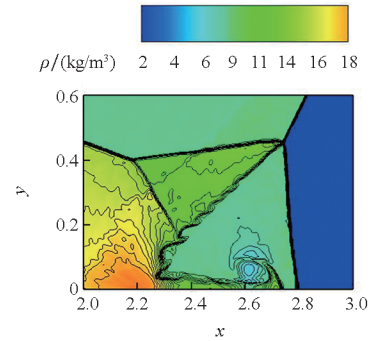
(b) Li 探测器

(b) Li detector



(c) Fu 探测器

(c) Fu detector



(d) 新型探测器

(d) New detector

图 5 双马赫反射密度等值线

Fig. 5 Density contours of double Mach reflection

在最后的时间步中,四种格式识别到的间断分布如图 6 所示。可以发现,四种探测器都能识别到马赫反射特有的入射激波、反射激波和马赫杆等结构。其中 Li 和新型探测器可以准确分辨出滑移线,而且特别判断到了回流区内靠近壁面的卷起涡,Harten 的则有较多无效识别。

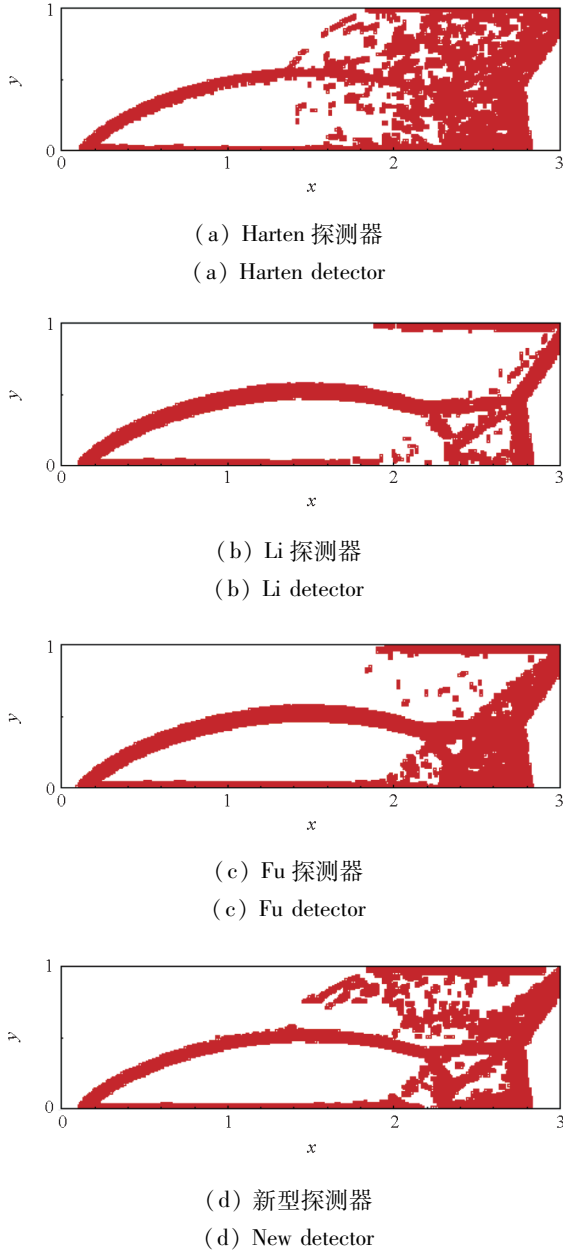


图 6 双马赫反射间断单元分布

Fig. 6 Discontinuity distributions of double Mach reflection

再由表 2 给出计算时间与比例。新型探测器的间断单元数是除 Li 探测器之外最少的,与图 6 结果相对应,而且其计算时间最短,体现出它在识别与求解两阶段的高效。此外,本算例中几种混合格式的计算时间占比都在 60% 左右。

另一个算例是 Rayleigh-Taylor (R-T) 不稳定^[25]问题。最初通过上下放置两种不同密度的

表 2 双马赫反射计算时间及比例

Tab. 2 Calculation time and ratio of double Mach reflection

间断探测器	计算时间/s	计算时间占比	间断单元百分比
WCNS-Z	41.96	1.00	100.00
Harten	25.34	0.60	20.64
Li	25.97	0.62	13.61
Fu	26.83	0.64	18.34
新型	25.25	0.60	18.32

流体形成位于 $y = 0.5$ 的接触间断,然后撤掉中间隔板,在重力影响下密度更大的流体会流入另一侧,R-T 不稳定就在交界面处产生,并出现小尺度涡结构。由于算例无粘,所以流动细节的多少就可以作为比较格式数值耗散的依据。初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 0, -\frac{c}{40}\cos(8\pi x), 2y+1) & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (1, 0, -\frac{c}{40}\cos(8\pi x), y + \frac{3}{2}) & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (35)$$

其中, c 表示声速,计算域为 $[0, 0.25] \times [0, 1]$ 。在 128×512 个网格上使用 4 核 MPI 并行计算到 $t = 1.95$ 。应用四种探测器的混合格式得到的密度等值线见图 7。可以看出,四种混合格式都能得到蘑菇帽状尖峰、剪切层等主要流场结构,且都出现了尖峰两侧下方及沿剪切层的卷起涡,体现出较低的耗散水平,表明探测器对于小尺度结构具有较好的分辨率特性。尤其后三者的结果更相似,且对小尺度结构的分辨更精细,具有更高的可信度。

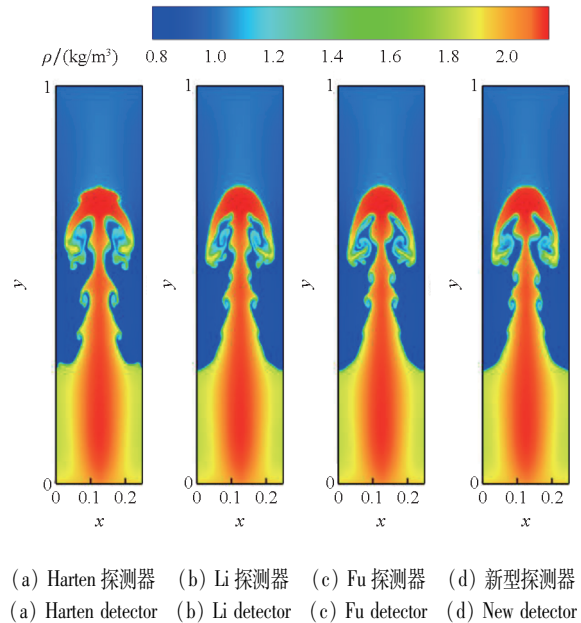
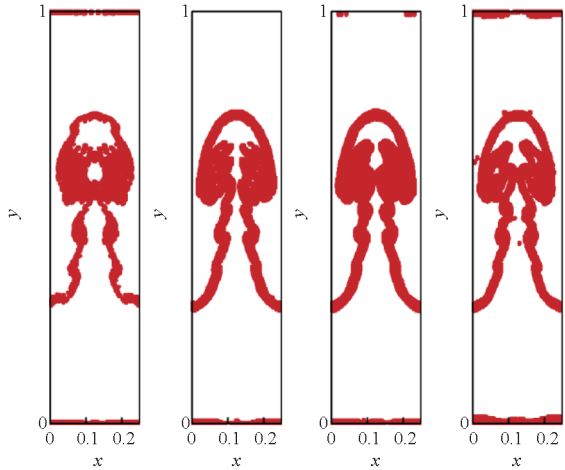


图 7 R-T 不稳定密度等值线

Fig. 7 Density contours of R-T instability

然后结合图 8 间断单元分布做进一步对比。Harten 探测器对剪切层识别过少,在尖峰下方又大量判定为间断,导致其难以做出准确模拟;后三者则在剪切层附近的识别相似且合理。在两侧卷起涡处的问题单元, Li 和新型探测器的都较少,且能有效区分涡的边缘和内部,而 Fu 探测器则将此区域全部作为间断处理,这也再次体现了新型探测器对于混合格式分辨率与鲁棒性的平衡。



(a) Harten 探测器 (b) Li 探测器 (c) Fu 探测器 (d) 新型探测器
(a) Harten detector (b) Li detector (c) Fu detector (d) New detector

图 8 R-T 不稳定间断单元分布

Fig. 8 Discontinuity distributions of R-T instability

计算时间与比例由表 3 展示。由于 Harten 探测器的结果不够准确,暂不将其列入比较。余下探测器中, Li 探测器的间断单元比例最低,然后是新型探测器, Fu 探测器的最多,与图 8 结果相对应;而且新型探测器的计算时间也介于 Li 和 Fu 之间,占 WCNS-Z 格式的时间比例都在 60% 左右。

表 3 R-T 不稳定计算时间及比例

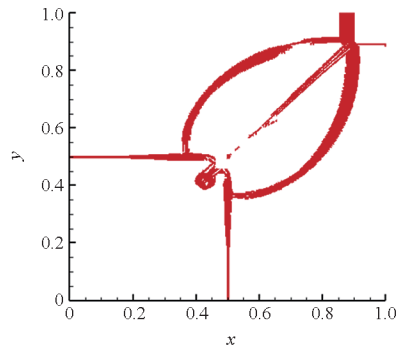
Tab. 3 Calculation time and ratio of R-T instability

间断探测器	计算时间/s	计算时间占比	间断单元百分比
WCNS-Z	439.82	1.00	100.00
Harten	242.09	0.55	10.20
Li	267.48	0.61	13.22
Fu	275.83	0.63	17.29
新型	272.61	0.62	15.26

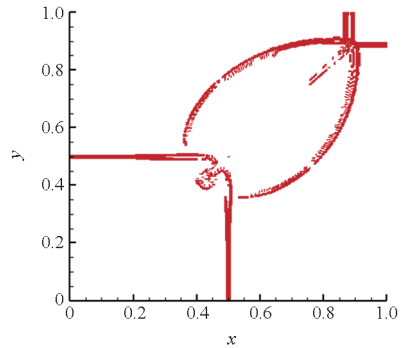
为了更多地考察四种探测器的特性,使用对应的混合格式计算二维黎曼问题^[26]中的构型 12。给定初值

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (0.5313, 0, 0, 0.4) & x \geq 0.5, y \geq 0.5 \\ (1, 0.7276, 0, 1) & x < 0.5, y \geq 0.5 \\ (0.8, 0, 0, 1) & x < 0.5, y < 0.5 \\ (1, 0, 0.7276, 1) & x \geq 0.5, y < 0.5 \end{cases} \quad (36)$$

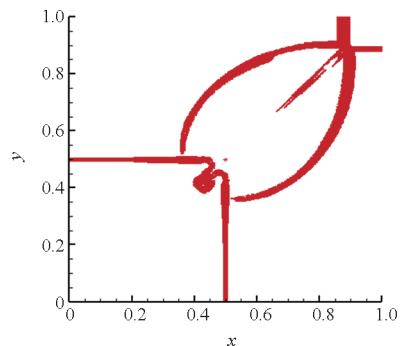
计算终止时间为 $t = 0.25$ 。这里重点关注间断单元,其在最后时刻的分布见图 9。出于鲁棒性的考虑,新型探测器的间断单元占比更高,对剪切层结构的包覆也更完整;与之相对应, Li 探测器的间断单元数最少,沿剪切层的包络线最细,甚至在间断面上还出现了一些小缺口; Harten 探测器的结果则跟 Fu 探测器的较为相似,单元比例和分布介于前两者之间。



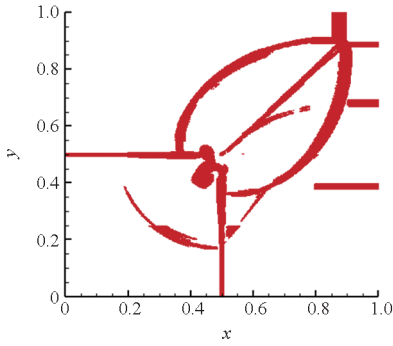
(a) Harten 探测器
(a) Harten detector



(b) Li 探测器
(b) Li detector



(c) Fu 探测器
(c) Fu detector



(d) 新型探测器

(d) New detector

图 9 二维黎曼问题(构型 12)间断单元分布

Fig.9 Discontinuity distributions of 2D Riemann problem
(configuration 12)

4 结论

本文研究了在同时包含间断与光滑区域的超声速无粘可压流情况下,对激波、接触间断等结构的识别与混合求解问题;提出了一种基于模板导数组合的新型间断探测器,能够自主识别光滑与间断区域,并以此为依据构造了混合 WCNS 格式,分别采用耗散水平相适应的线性与非线性格式求解,可用于模拟双曲守恒律问题,实现准确高效的激波捕捉。

通过一系列波形识别与一维、二维 Euler 方程算例,对比了不同探测器的间断识别能力,以及它们对应混合格式的特性。结果表明新型探测器具有不弱于常用间断探测器的识别能力,能兼顾计算的分辨率与鲁棒性,而且在识别和求解阶段的效率较高,更是优于在全场使用特征插值的原始 WCNS 格式,是混合格式设计中值得推广的方法。后续研究将针对间断探测器更深层机理,并采用更全面的算例展开。

参考文献 (References)

- [1] CHEN Y M, DENG X G. Nonlinear weights for shock capturing schemes with unconditionally optimal high order[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 478: 111978.
- [2] ZHENG S C, DENG X G, WANG D F. New optimized flux difference schemes for improving high-order weighted compact nonlinear scheme with applications[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(3): 405-424.
- [3] 阎超, 屈峰, 赵雅甜, 等. 航空航天 CFD 物理模型和计算方法的述评与挑战[J]. 空气动力学学报, 2020, 38(5): 829-857.
YAN C, QU F, ZHAO Y T, et al. Review of development and challenges for physical modeling and numerical scheme of CFD in aeronautics and astronautics[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2020, 38(5): 829-857. (in Chinese)
- [4] QIN J X, CHEN Y M, LIN Y, et al. On construction of shock-capturing boundary closures for high-order finite difference method [J]. Computers & Fluids, 2023, 255: 105818.
- [5] DENG X G, ZHANG H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165(1): 22-44.
- [6] JOHNSEN E, LARSSON J, BHAGATWALA A V, et al. Assessment of high-resolution methods for numerical simulations of compressible turbulence with shock waves[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(4): 1213-1237.
- [7] TAYLOR E M, WU M W, MARTIN M P. Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 223(1): 384-397.
- [8] LI Y H, CHEN C W, REN Y X. A class of high-order finite difference schemes with minimized dispersion and adaptive dissipation for solving compressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 2022, 448: 110770.
- [9] FU L. A hybrid method with TENO based discontinuity indicator for hyperbolic conservation laws [J]. Communications in Computational Physics, 2019, 26(4): 973-1007.
- [10] DENG X, JIANG Z H, VINCENT P, et al. A new paradigm of dissipation-adjustable, multi-scale resolving schemes for compressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 2022, 466: 111287.
- [11] SHEN H, AL JAHDALI R, PARSANI M. A class of high-order weighted compact central schemes for solving hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2022, 466: 111370.
- [12] WAN Y F, XIA Y H. A hybrid WENO scheme for steady-state simulations of Euler equations [J]. Journal of Computational Physics, 2022, 463: 111292.
- [13] JIANG Y, MAO M L, DENG X G, et al. Multiderivative combined dissipative compact scheme satisfying geometric conservation law III: characteristic-wise hybrid method [J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 14(2): 415-441.
- [14] TANG S J. High-order variable index weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation law [J]. Computational and Applied Mathematics, 2022, 41: 367.
- [15] RUAN Y C, TIAN B L, ZHANG X T, et al. Hybrid high-order steepness-adjustable harmonic scheme based on combined discontinuity sensors [J]. Computers & Fluids, 2022, 241: 105482.
- [16] TAKAGI S, FU L, WAKIMURA H, et al. A novel high-order low-dissipation TENO-THINC scheme for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2022, 452: 110899.
- [17] XUE Z Y, XIA Y H, LI C, et al. A simplified multilayer perceptron detector for the hybrid WENO scheme [J]. Computers & Fluids, 2022, 244: 105584.
- [18] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [19] 刘君. 有计算超声速流场的高精度格式么? [J]. 气动研

- 究与实验, 2022, 34(1): 2 - 14.
- LIU J. Is there a high order scheme for calculating supersonic flow fields? [J]. Aerodynamic Research & Experiment, 2022, 34(1): 2 - 14. (in Chinese)
- [20] HARTEN A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities; III. self-adjusting hybrid schemes [J]. Mathematics of Computation, 1978, 32(142): 363 - 389.
- [21] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439 - 471.
- [22] SOD G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1978, 27(1): 1 - 31.
- [23] GEROLYMOS G A, SÉNÉCHAL D, VALLET I. Very-high-order WENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(23): 8481 - 8524.
- [24] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(1): 115 - 173.
- [25] XU Z F, SHU C W. Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 205(2): 458 - 485.
- [26] LAX P D, LIU X D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 19(2): 319 - 340.

(编辑:熊立桃,王颖娟)