

地球静止轨道航天器绕飞持续观测任务轨迹规划与控制

张海涛¹, 王伟林¹, 张雅声¹, 王浩², 李智^{1*}

(1. 航天工程大学, 北京 101416; 2. 酒泉卫星发射中心, 甘肃 酒泉 735000)

摘要:针对地球静止轨道(geosynchronous orbit, GEO)航天器的高清观测任务,成像卫星在连续小推力作用下接近 GEO 航天器,对 GEO 航天器自然绕飞并以有利的光照条件对其持续观测。针对 Clohessy-Wiltshire (CW)方程的偏差问题,通过修正非球形摄动和重力加速度二次长期项偏差对 CW 方程进行改进,补偿非线性偏差的长期项和主要的摄动项。在轨迹规划问题上,计算绕飞轨迹的初始相位角区间,以保证成像卫星在整个绕飞任务中都能够以良好的观测角观测 GEO 航天器。基于 CW 方程和改进的 CW 方程对成像卫星接近和绕飞 GEO 航天器全过程进行仿真,基于 CW 方程的仿真没有达到预期目标;基于改进的 CW 方程的仿真达到预期目标,全过程所需施加的总速度增量仅为 4.67 m/s,工程上具有很强的可行性。

关键词:成像卫星;轨迹规划;绕飞任务;非线性偏差;摄动偏差;持续观测

中图分类号:V529 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2024)01-074-13

Trajectory planning and control of continuous observation missions for geosynchronous orbit spacecraft fly-around

ZHANG Haitao¹, WANG Weilin¹, ZHANG Yasheng¹, WANG Hao², LI Zhi^{1*}

(1. Space Engineering University, Beijing 101416, China; 2. Jiuquan Satellite Launch Center, Jiuquan 735000, China)

Abstract: For high-definition observation of GEO (geosynchronous orbit) spacecraft, the optical satellite approaches the GEO spacecraft with continuous low-thrust and flies around the GEO spacecraft without thrust. On the deviation of Clohessy-Wiltshire (CW) equations, CW equations are improved by accommodating the non-spherical perturbation, and the quadratic terms of the nonlinearity in the differential gravitational acceleration. The secular growth of the nonlinear deviation and the most perturbation deviation have been accommodated in the ICW (improved CW) equations. On trajectory planning, we calculate the initial phase angle interval of the fly-around trajectory to ensure that the optical satellite can take pictures of the GEO spacecraft with favorable observation angles throughout the entire fly-around mission. Simulations are conducted based on CW equations and ICW equations, respectively. The simulation based on the CW equations fails, but the simulation based on the ICW equations succeeds. The total thrust required is only 4.67 m/s, which is highly feasible in engineering.

Keywords: optical satellite; trajectory planning; fly-around mission; nonlinear deviation; perturbation deviation; continuous observation

由于地球静止轨道(geosynchronous orbit, GEO)的轨道优势,许多高价值航天器都位于 GEO 区域。2021年,欧洲航天局空间碎片办公室在《欧洲年度空间环境报告》中指出,截至2020年底,共有873个GEO空间目标^[1]。GEO空间目标距离地面近36 000 km,给地面高清观测^[2-3]带来巨大挑战。

GEO区域的成像卫星能够在不受大气干扰的情况下,拍摄更清晰的GEO空间目标图像,并能更好地监测GEO航天器的工作状态。因此,部署成像卫星接近GEO航天器,实现对GEO航天器的持续观测具有重要意义。利用GEO的轨

道周期特点,成像卫星可以在整个自然绕飞任务中以良好的观测角对GEO航天器进行连续观测。

根据用于表示相对运动的状态量的类型,研究相对运动的模型可以分为两类:第一类是用轨道参数作为状态量的相对运动模型;第二类是用相对状态矢量作为状态量的相对运动模型,例如用直角坐标系中的相对位置和速度^[4]作为状态矢量。第一类模型^[5-8]的优点是易于分析摄动对相对运动的影响。因此,这种模型具有较高的精度,并能有效避免偏差的长期累积。这种模型的缺点是不便于建立状态微分方程,不利于研究连

续小推力作用下的相对运动。在第二类模型^[9-11]中,Clohessy-Wiltshire (CW)方程应用最为广泛,CW方程的优点在于:建立状态方程后,便于结合最优控制理论开展成像卫星接近 GEO 航天器的研究,也便于对飞行编队进行研究。缺点是 CW 方程的偏差较大,且偏差随时间不断累积^[12]。

在绕飞轨迹规划问题上,刘猛等^[13]给出了航天器基于最小冲量进入对空间目标绕飞轨道的策略,在轨道机动燃料消耗方面有借鉴价值。黄艺等^[14]研究了对非合作目标绕飞任务的姿轨耦合控制策略,给出能够对外界干扰和不确定参数具有很好抑制效果的控制方案。谭天乐等^[15-17]给出近圆轨道和大椭圆轨道的相对运动建模和解析方法,提供了对空间非合作目标高精度的相对悬停和循迹绕飞控制方法。刘涛等^[18]提出一种用于非合作目标惯性指向轴位置捕获的绕飞方法。

常燕等^[19]研究了对椭圆轨道上非合作目标进行长期绕飞检测的相对运动轨道构型设计与构型保持问题。梁静静等^[20]基于粒子群算法研究了双脉冲绕飞的优化问题和安全绕飞轨迹设计问题。王功波等^[21]在连续小推力条件下,针对圆轨道推导了满足快速绕飞条件的空间圆编队动力学模型。Dang^[22-23]推导了在任意开普勒轨道上相对运动的新状态转换矩阵,给出了 Tschauner-Hempel (TH) 方程的解。

在 CW 方程的偏差问题上,通过修正 CW 方程的非球形摄动偏差和非线性二次项偏差改进 CW 方程;在轨迹规划问题上,计算对 GEO 航天器绕飞的初始相位区间,成像卫星在连续小推力作用下接近 GEO 航天器,以合适的初始相位对其开始绕飞,实现对 GEO 航天器的自然绕飞并持续以有利的光照条件对其观测,如图 1 所示。

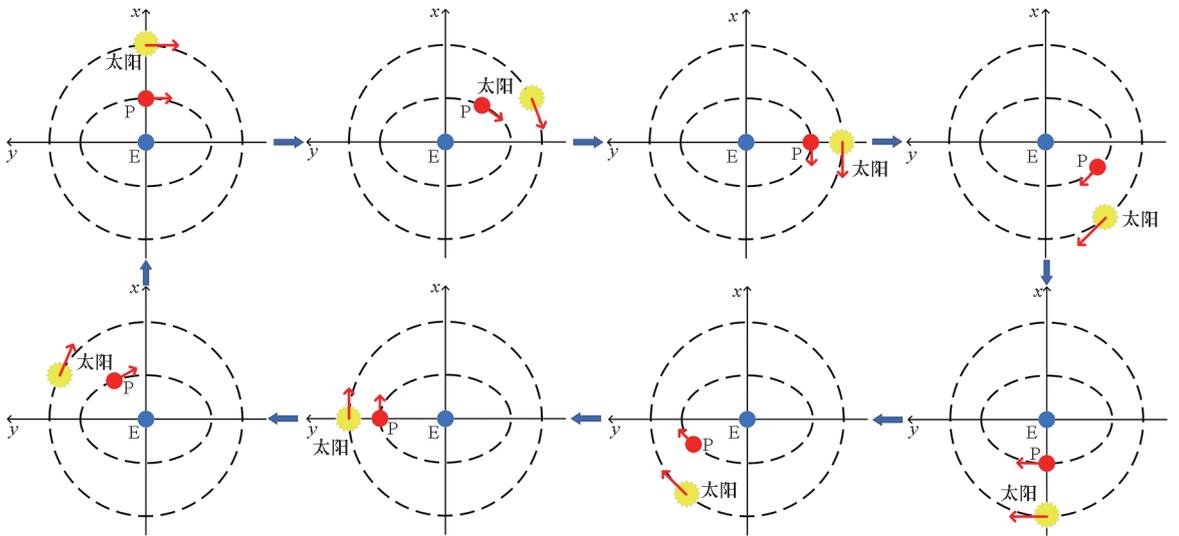


图 1 成像卫星 P 在整个绕飞任务中以良好的观测角对 GEO 航天器 E 进行拍照

Fig. 1 The optical satellite P can take pictures of the GEO spacecraft E with favorable observation angles throughout the entire fly-around mission

1 CW 方程

CW 方程采用当地垂直当地水平 (local vertical local horizontal, LVLH) 坐标系,该坐标系以航天器质心为原点, x 轴沿地心到航天器质心的方向; z 轴垂直于轨道平面,与瞬时角动量方向相同, y 轴方向根据右手定则确定。

两个非常接近的航天器分别记为 M 和 S, M 为主航天器, S 为辅航天器,存在:

$$\frac{\rho}{a} \ll 1 \quad (1)$$

式中, ρ 为两航天器之间的距离, a 表示航天器 M

的轨道半长轴。在以航天器 M 为原点的 LVLH 参考系中,定义 S 的状态矢量为 $\mathbf{X} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$, 连续推力控制 $\mathbf{U} = (u_x, u_y, u_z)^T$, 则 CW 方程为:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, ω 为航天器 M 的轨道角速度。

记 t_0 时刻, S 的相对状态矢量为 $\mathbf{X}(t_0)$, 则 t 时刻, 航天器 S 的相对状态矢量为:

$$\mathbf{X}(t, t_0) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t, \varepsilon)\mathbf{B}\mathbf{U}(\varepsilon)d\varepsilon \quad (5)$$

式中:

$$\boldsymbol{\phi}(t, t_0) = [\boldsymbol{\phi}_r(t, t_0) \quad \boldsymbol{\phi}_v(t, t_0)] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{rr}(t, t_0) & \boldsymbol{\phi}_{rv}(t, t_0) \\ \boldsymbol{\phi}_{vr}(t, t_0) & \boldsymbol{\phi}_{vv}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3c & 0 & 0 & s/\omega & -2(c-1)/\omega & 0 \\ 6(s-\tau) & 1 & 0 & 2(c-1)/\omega & (4s-3\tau)/\omega & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & s/\omega \\ 3\omega s & 0 & 0 & c & 2s & 0 \\ 6\omega(c-1) & 0 & 0 & -2s & -3+4c & 0 \\ 0 & 0 & -\omega s & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\phi}_{rr}(t, t_0)$ 、 $\boldsymbol{\phi}_{rv}(t, t_0)$ 、 $\boldsymbol{\phi}_{vr}(t, t_0)$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{vv}(t, t_0)$

都是 3×3 矩阵, $\tau = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0)$, $s = \sin\tau$,

$c = \cos\tau$ 。

2 改进的 CW 方程

非线性、参考轨道的偏心率和摄动是 CW 方程偏差的三个来源。在成像卫星对 GEO 航天器的接近和绕飞的任务中, 以 GEO 航天器为原点建立 LVLH 坐标系, 则 CW 方程偏差来源主要为非线性项和摄动项。记 P 为成像卫星, E 为被成像的 GEO 航天器。已知 P 和 E 的初始轨道参数, 改进的 CW(improved CW, ICW) 方程研究相对运动的步骤如下:

步骤 1: 以航天器 E 的质心为原点建立 LVLH 坐标系, 记为 \mathfrak{R} ;

步骤 2: 计算成像卫星 P 的初始状态矢量, 即在 LVLH 坐标系中成像卫星 P 相对于 GEO 航天器 E 的位置和速度矢量:

$$\mathbf{X}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))^T \quad (7)$$

据文献[22]的方法可求得:

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \dot{\mathbf{A}}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}} & \mathbf{A}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_{\text{ECI}} \\ \delta \mathbf{v}_{\text{ECI}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{A}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}}$ 为从地心惯性 (earth-centered inertial, ECI) 坐标系到 LVLH 坐标系的坐标变换矩阵, $\dot{\mathbf{A}}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}}$ 为 $\mathbf{A}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}}$ 的时间导数, $[\delta \mathbf{r}_{\text{ECI}}^T \quad \delta \mathbf{v}_{\text{ECI}}^T]^T$ 为 ECI 坐标系中 P 与 E 的位置和速度矢量之差。

步骤 3: GEO 航天器受到的主要摄动为非球形、三体 and 太阳光压摄动。然而, 由于 GEO 轨道的轨道特性, 非球形摄动是导致两航天器存在相对运动偏差的最主要因素。考虑 J_2 和 J_{22} 项摄动, 将 CW 方程中的万有引力常数 μ 修正为 ICW 方程中的万有引力常数 μ' :

$$\mu' = \left[1 - \frac{1}{2}J_2 \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 + 3J_{22} \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 \cos(2\lambda + 29.8568^\circ) \right] \mu \quad (9)$$

式中, $\mu = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 为万有引力常数, r_E 为地球的赤道半径, a_c 为 GEO 轨道的半长轴, λ 为 GEO 航天器 E 的星下点地理经度, $J_2 = -1.082627 \times 10^{-3}$, $J_{22} = 1.815528 \times 10^{-6}$ 。

步骤 4: 通过对 CW 方程初始状态矢量的修正来补偿非线性长期项偏差。将非线性二次项假设为虚加的摄动, 通过虚摄动解可求解对 CW 方程初始状态矢量的修正项。对 CW 方程初始状态矢量的修正项为:

$$\mathbf{X}_m^c(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{a_c^4} \cdot \frac{\rho^2 [2 + 3\cos(2\beta_0)]}{8n_L} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

式中, n_L 为 LVLH 坐标系相对 ECI 坐标系的旋转角速度, ρ^2 为成像卫星 P 与航天器 E 的相对距离的平方, β_0 为初始时刻 y 轴沿 z 轴反方向到成像卫星 P 位置矢量的角度。

步骤 5: 将两个独立的修正结合起来, 以补偿非线性偏差和非球形摄动偏差。ICW 方程的初始状态矢量为:

$$\mathbf{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) + \frac{\mu'}{a_c^4} \cdot \frac{\rho^2 [2 + 3\cos(2\beta_0)]}{8n_L} \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

求解状态方程 $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{U}$, 得到 $\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ 为 LVLH 坐标系中成像卫星 P 相对于航天器 E 的位置和速度。

在 ICW 方程中,通过步骤 3 补偿非球形摄动偏差,通过步骤 4 补偿非线性偏差,2.1 节和 2.2 节分别研究步骤 3 和步骤 4 补偿摄动偏差和非线性偏差的原理。

2.1 补偿非球形摄动偏差

定义航天器在离地球无限远处的重力势能为 0。 \mathbf{r} 为 ECI 坐标系中的位置矢量, r 为位置矢量的大小。设 \mathbf{r} 处单位质量的重力势能为:

$$R = -\frac{\mu}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_E}{r} \right)^n \left\{ J_n P_n(\sin(\varphi)) + \sum_{m=1}^n P_{nm}(\sin(\varphi)) \cdot [C_{nm} \cdot \cos(m\lambda) + S_{nm} \cdot \sin(m\lambda)] \right\} \right) \quad (12)$$

式中, J_n 为地球非球形摄动的带谐项, C_{nm} 和 S_{nm} 为田谐项, P_n 和 P_{nm} 为勒让德球谐函数, φ 是矢量 \mathbf{r} 与赤道平面的夹角, λ 是该单位质量的星下点地理经度。归一化 $P_n(\sin(\varphi))$ 和 $P_{nm}(\sin(\varphi))$, 记为 $\bar{P}_n(\sin(\varphi))$ 和 $\bar{P}_{nm}(\sin(\varphi))$, 归一化系数为:

$$\begin{cases} \zeta_n = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \\ \zeta_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} \quad m \leq n \end{cases} \quad (13)$$

化简后,引力势为:

$$R = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_E}{r} \right)^n \left[J_n \zeta_n \bar{P}_n(\sin(\varphi)) + \sum_{m=1}^n J_{nm} \zeta_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin(\varphi)) \cos(m\lambda - m\lambda_{nm}) \right] \right\} \quad (14)$$

各项的权重为:

$$\begin{cases} A_n = \left(\frac{r_E}{r} \right)^n J_n \zeta_n \\ A_{nm} = \left(\frac{r_E}{r} \right)^n J_{nm} \zeta_{nm} \end{cases} \quad (15)$$

对于 GEO 航天器,权量最大的五项分别是 J_2, J_{22}, J_3, J_{31} 和 J_{33} , 权重比为:

$$A_2 : A_{22} : A_3 : A_{31} : A_{33} = 11\ 053 : 64 : 3 : 7 : 6 \quad (16)$$

因此, J_2 和 J_{22} 是非球形摄动中权重最大的项。将这两项引入 ICW 方程中,包含 J_2 和 J_{22} 项的引力势为:

$$R = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{r_E}{r} \right)^2 (3\sin^2\varphi - 1) + 3J_{22} \left(\frac{r_E}{r} \right)^2 \cos^2\varphi \cos(2\lambda - 2\lambda_{22}) \right] \quad (17)$$

式中, $\lambda_{22} = -14.929^\circ$ 。对于两个相对接近的 GEO 航天器,其星下点的地理经度近似相等。由于 $\sin^2\varphi \approx 0, \cos^2\varphi \approx 1$, 式(17)可简化为:

$$R = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 + 3J_{22} \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 \cos(2\lambda + 29.8568^\circ) \right] \quad (18)$$

J_2 和 J_{22} 对相对运动的影响体现在与 CW 方程相比, ICW 方程中的万有引力常数修正为:

$$\mu' = \left[1 - \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 + 3J_{22} \left(\frac{r_E}{a_c} \right)^2 \cos(2\lambda + 29.8568^\circ) \right] \mu \quad (19)$$

2.2 补偿非线性偏差

在 CW 方程中,为了得到线性的状态方程,重力加速度的泰勒级数展开式中的非线性项在式(1)的条件下被舍弃,二次项是偏差的主要来源。被舍弃的二次项在位置分量上产生常数项、长期项和短周期项三种类型的偏差。长期项只出现在 y 轴方向上,是对精度影响最大的偏差。偏差的长期项可通过对 CW 方程的初始状态矢量的修正来补偿,利用摄动法可计算用于补偿 CW 方程中非线性偏差的修正项。摄动法中,将非线性二次项作为 CW 方程中的虚加摄动力。通过虚摄动求解用于补偿 CW 方程中非线性长期项偏差的初始状态矢量的修正项。

航天器在 ECI 坐标系中的瞬时位置和速度矢量分别为 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$, 根据牛顿第二定律得:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \\ \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\text{grad}(R) \end{cases} \quad (20)$$

其中, R 为在 \mathbf{r} 处单位质量的势能。成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置矢量为 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c$ 。根据式(12),对于航天器 E 和成像卫星 P,存在:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\text{grad}(R_c) = -\frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c + \mathbf{f}_c \quad (21)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_p = -\text{grad}(R_p) = -\frac{\mu}{r_p^3} \mathbf{r}_p + \mathbf{f}_p \quad (22)$$

其中, \mathbf{f}_c 和 \mathbf{f}_p 分别为航天器 E 和成像卫星 P 受到的摄动力,如太阳光压摄动等。式(21)与式(22)相减得:

$$\ddot{\mathbf{r}}_p - \ddot{\mathbf{r}}_c = -\left(\frac{\mu}{r_p^3} \mathbf{r}_p - \frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c \right) + \Delta\mathbf{f} \quad (23)$$

式中, $\Delta\mathbf{f}$ 为成像卫星 P 和航天器 E 受到的摄动偏差。ICW 方程在步骤 3 中对主要摄动偏差进行修正,在步骤 4 中对非线性偏差进行修正。因此,在修正非线性偏差时,令 $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{0}$ 。将式(23)从 ECI 坐标系转换到 LVLH 坐标系:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} + 2\boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) = -\left(\frac{\mu}{r_i^3} \mathbf{r}_i - \frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c \right) \quad (24)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_c = [0 \ 0 \ n]^T$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_c = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\boldsymbol{r}_c = [r_c \ 0 \ 0]^T$, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a_c^3}}$ 。式(24)可整理为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\frac{\mu(r_c + x)}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\mu}{r_c^2} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\frac{\mu y}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ \ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (25)$$

在 CW 方程中,式(25)可化简为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + n^2z = 0 \end{cases} \quad (26)$$

记 CW 方程中的状态矢量为:

$$\boldsymbol{X}_{cw}(t) = [x_{cw}(t) \ y_{cw}(t) \ z_{cw}(t) \ \dot{x}_{cw}(t) \ \dot{y}_{cw}(t) \ \dot{z}_{cw}(t)]^T \quad (27)$$

解为:

$$\begin{cases} x_{cw} = \frac{\rho}{2} \sin(nt + \beta_0) \\ y_{cw} = \rho \cos(nt + \beta_0) \\ z_{cw} = \frac{\sqrt{3}\rho}{2} \sin(nt + \beta_0) \\ \dot{x}_{cw} = \frac{\rho}{2} n \cos(nt + \beta_0) \\ \dot{y}_{cw} = -\rho n \sin(nt + \beta_0) \\ \dot{z}_{cw} = \frac{\sqrt{3}\rho}{2} n \cos(nt + \beta_0) \end{cases} \quad (28)$$

保留式(25)等号右边的二次项,舍弃高阶项。将式(25)化简为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = \frac{3\mu}{a_c^4} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x^2 \right) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{3\mu}{a_c^4} xy \\ \ddot{z} + n^2z = \frac{3\mu}{a_c^4} xz \end{cases} \quad (29)$$

根据式(29),将重力加速度泰勒级数展开式中的非线性二次项作为 CW 方程中虚加的摄动力,虚加摄动力为:

$$\boldsymbol{U}_{nl} = \left[\frac{3\mu}{a_c^4} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x^2 \right) \ \frac{3\mu}{a_c^4} xy \ \frac{3\mu}{a_c^4} xz \right]^T \quad (30)$$

将式(29)简记为:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{nl} \quad (31)$$

式(31)为 CW 方程的非线性偏差传播方程。

记 CW 方程的非线性偏差为:

$$\boldsymbol{X}_{nl}(t) = [x_{nl}(t) \ y_{nl}(t) \ z_{nl}(t) \ \dot{x}_{nl}(t) \ \dot{y}_{nl}(t) \ \dot{z}_{nl}(t)]^T \quad (32)$$

根据式(5)可得式(31)的解为:

$$\boldsymbol{X}_{nl}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \boldsymbol{X}_{nl}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t, s) \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{nl}^c(s) ds \quad (33)$$

CW 方程中被舍弃的二次项导致 y 轴方向偏差的长期项为:

$$y_{nl-long}(t) = -\left\{ 6nx_{nl}(t_0) + 3\dot{y}_{nl}(t_0) - \frac{3}{8} \frac{\mu}{a_c^4} \frac{\rho^2 [2 + 3\cos(2\beta_0)]}{n} \right\} t \quad (34)$$

为了修正 y 轴方向偏差的长期项,令 $y_{nl-long} = 0$,可得非线性偏差的零累积准则:

$$\begin{cases} x_{nl}^c(t_0) = 0 \\ \dot{y}_{nl}^c(t_0) = \frac{\mu}{a_c^4} \frac{\rho^2 [2 + 3\cos(2\beta_0)]}{8n} \end{cases} \quad (35)$$

因此,根据虚摄动解可得到对 CW 方程初始状态矢量的修正项如式(10)所示。

通过对初始状态矢量 $\boldsymbol{X}_{cw}(t_0)$ 添加修正项 $\boldsymbol{X}_{nl}^c(t_0)$,可以补偿 CW 方程中的非线性长期偏差,即在 ICW 方程中,初始状态矢量 $\boldsymbol{X}_{cw}(t_0)$ 被替换为 $\boldsymbol{X}_{cw}(t_0) + \boldsymbol{X}_{nl}^c(t_0)$ 。

2.3 偏差修正验证

为了研究 ICW 方程相对 CW 方程的改进效果,选取成像卫星 P 和 GEO 航天器 E 进行仿真验证,其轨道半长轴 a 、离心率 e 、轨道倾角 i 、升交点赤经 Ω 、近地点幅角 w 、平近地点角 m 如表 1 所示。

表 1 成像卫星 P 与 GEO 航天器 E 的轨道参数

Tab.1 Orbital elements of the optical satellite P and the GEO spacecraft E

| 航天器 | a/m | e | $i/$ (°) | $\Omega/$ (°) | $w/$ (°) | $m/$ (°) |
|-----|------------|-----------|-------------|------------------|-------------|-------------|
| P | 42 165 000 | 0.002 372 | 0.01 | 0 | 270 | 90 |
| E | 42 165 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

LVLH 坐标系中成像卫星 P 的初始状态矢量如表 2 所示。初始时刻从 y 轴沿 z 轴反方向到成像卫星 P 的位置矢量的角度为 0° , \boldsymbol{X} 为 CW 方程的初始状态矢量, \boldsymbol{Y} 为 ICW 方程的初始状态矢量。

2.3.1 非球形摄动偏差修正验证

为了验证 ICW 方程中步骤 3 的非球形摄动解,将非球形摄动解与高精度轨道传播 (high-precision orbit propagator, HPOP) 模型作对比。HPOP 模型中考虑前 21 阶非球形摄动、太阳光压

表 2 成像卫星 P 的初始状态矢量

Tab. 2 The initial state vector of the optical satellite P

| 状态 矢量 | x_0/m | y_0/m | z_0/m | $\dot{x}_0/$ (m/s) | $\dot{y}_0/$ (m/s) | $\dot{z}_0/$ (m/s) |
|----------|---------|---------|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| X | -237.2 | 199 999 | 34.9 | 7.292 | -0.008 69 | 0.536 6 |
| Y | -237.2 | 199 999 | 34.9 | 7.292 | 0.034 54 | 0.536 6 |

摄动和三体引力摄动。利用二体模型、HPOP 模型和步骤 3 中的非球形摄动解,分别在 ECI 坐标系中计算成像卫星 P 和 GEO 航天器 E 的位置。将 P 在 ECI 坐标系中的位置分别转换到 LVLH 坐标系 \mathfrak{R} 中,P 在 \mathfrak{R} 中的位置即为 P 相对于 E 的位置,将 HPOP 模型得到的相对位置视为真实相对位置。在仿真场景中,航天器星下点的地理经度为 165°E。

相比二体模型,非球形摄动解在相对位置的 x 、 y 和 z 方向对精度的提高分别如图 2、图 3 和图 4 所示。图中红色实线表示非球形摄动解相对 HPOP 模型的偏差,蓝色虚线表示二体模型相对

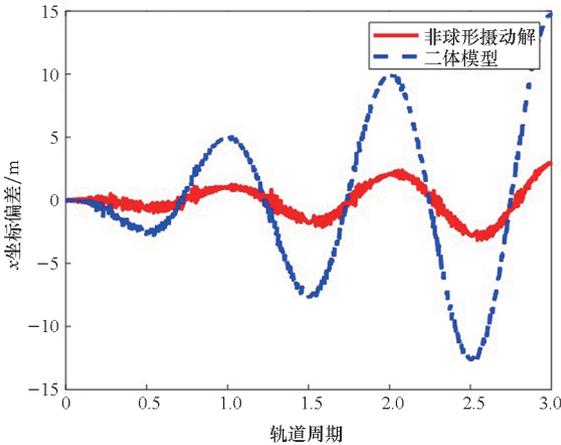


图 2 非球形摄动解对 x 方向精度的提高

Fig. 2 Improvement of the non-spherical perturbation solution in x -coordinate

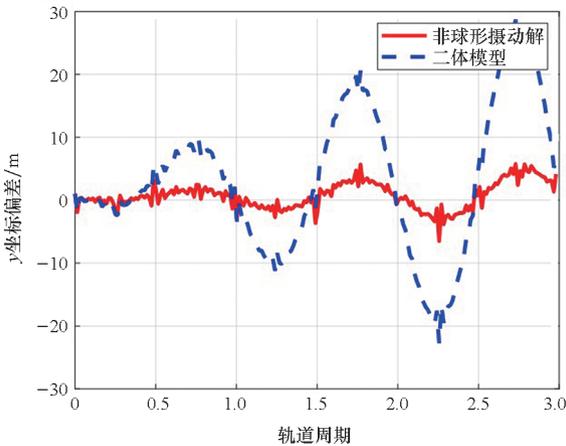


图 3 非球形摄动解对 y 方向精度的提高

Fig. 3 Improvement of the non-spherical perturbation solution in y -coordinate

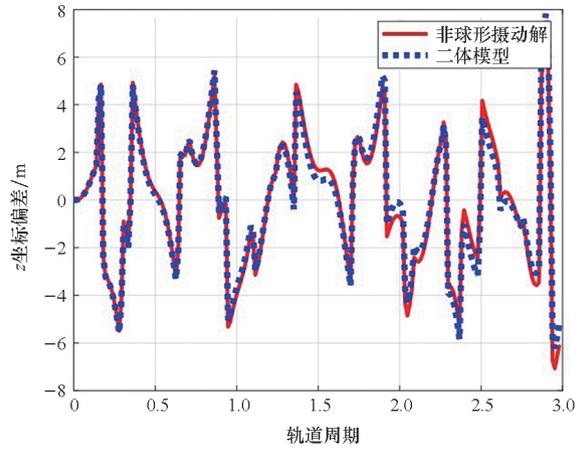


图 4 非球形摄动解对 z 方向精度的提高

Fig. 4 Improvement of the non-spherical perturbation solution in z -coordinate

HPOP 模型的偏差。通过比较可得,非球形摄动是摄动偏差的最主要因素,非球形摄动解提高了 CW 方程在 LVLH 坐标系 x 、 y 轴方向的精度。

利用 ICW 方程和 CW 方程仿真成像卫星 P 相对于 GEO 航天器 E 的运动,比较三个轨道周期内相对位置的 x 、 y 、 z 坐标差异。由于 CW 方程存在非线性偏差,为了展现 ICW 方程中步骤 3 对 CW 方程的改进效果,本节中不对 ICW 方程进行非线性偏差修正。ICW 方程与 CW 方程中相对位置的 x 、 y 、 z 坐标差值分别如图 5、图 6 和图 7 所示。

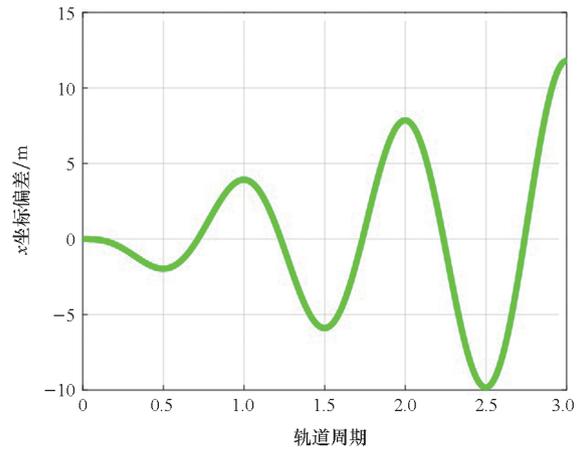


图 5 ICW 方程和 CW 方程在 x 轴方向的差值

Fig. 5 Deviation in x -coordinate between ICW equations and CW equations

从图 5 ~ 7 中可以看出,ICW 方程与 CW 方程中相对位置的 x 、 y 、 z 坐标差值呈周期性变化,且差值幅值逐渐增大。 x 、 y 坐标差值幅值的增长率,在同一个数量级, z 坐标幅值的增长率比 x 、 y 坐标幅值的增长率小一个数量级。

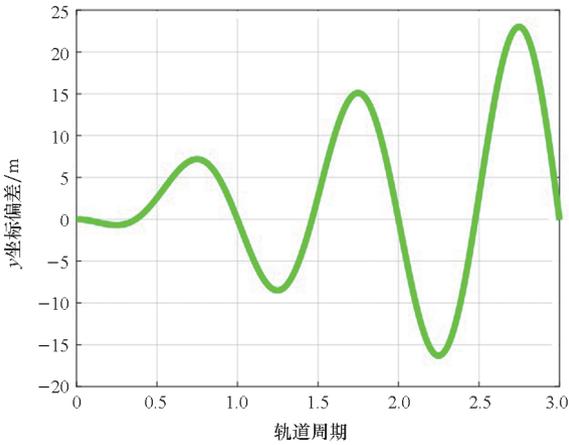


图 6 ICW 方程和 CW 方程在 y 轴方向的差值

Fig.6 Deviation in y-coordinate between ICW equations and CW equations

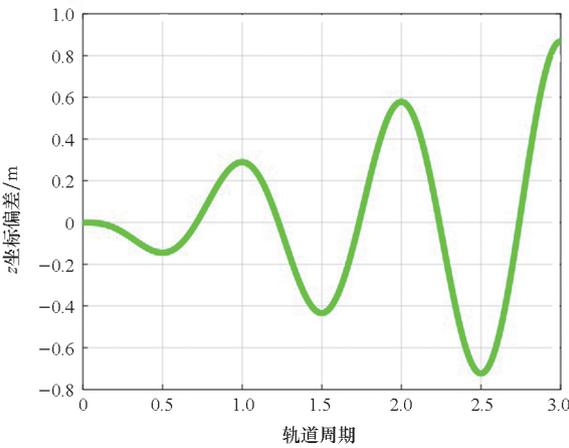


图 7 ICW 方程和 CW 方程在 z 轴方向的差值

Fig.7 Deviation in z-coordinate between ICW equations and CW equations

2.3.2 非线性偏差修正验证

CW 方程和 ICW 方程计算出的成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置的 y 坐标如图 8 所示。图中红色实线代表 ICW 方程的 y 坐标,蓝色虚线代表 CW 方程的 y 坐标。ICW 方程与 CW 方程的 y 坐标差值如图 9 所示。

为了验证 ICW 方程步骤 4 的改进效果,将 CW 方程和 ICW 方程计算的相对位置的 y 坐标与真值进行比较。由于 CW 方程存在摄动偏差,为了展现 ICW 方程中步骤 4 对 CW 方程的改进效果,本节不对 ICW 方程进行摄动偏差修正。如图 10 所示,红色实线表示 ICW 方程中相对位置的 y 坐标与真值的差值,蓝色虚线表示 CW 方程中相对位置的 y 坐标与真值的差值。

成像卫星 P 与 GEO 航天器 E 的初始距离为 200 km,3 个轨道周期后,ICW 方程中相对位置的 y 坐标相对真值出现 36 m 的长期偏差,而

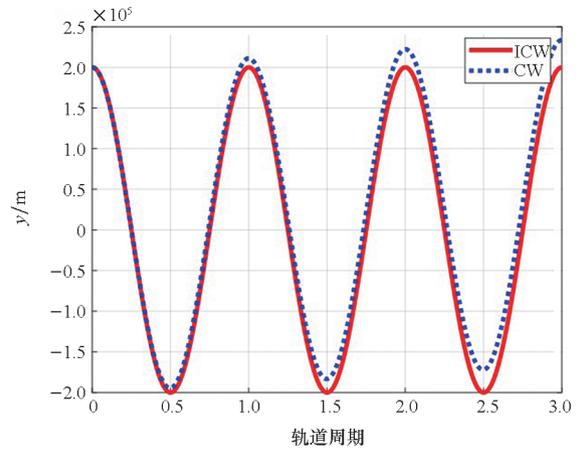


图 8 ICW 方程和 CW 方程中的 y 坐标值

Fig.8 y-coordinate in ICW equations and CW equations

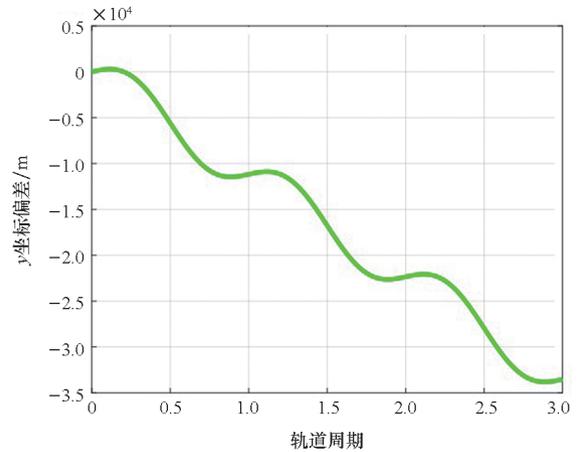


图 9 ICW 方程和 CW 方程在 y 轴方向的非线性偏差值

Fig.9 y-coordinate nonlinear deviation between ICW equations and CW equations

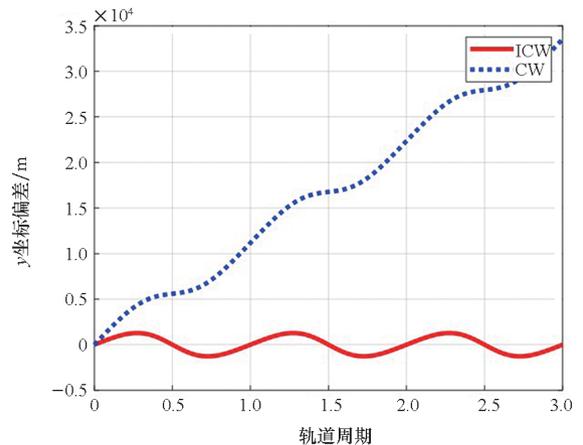


图 10 ICW 方程和 CW 方程在 y 轴方向与真值的差值

Fig.10 y-coordinate deviation of ICW equations and CW equations from the truth value

CW 方程的长期累积偏差为 33 563 m。ICW 方程的长期偏差仅约为 CW 方程的 0.1%。通过

比较,验证了 ICW 方程对非线性偏差长期项补偿的有效性。

ICW 方程补偿了相对位置 y 轴方向二次非线性偏差的长期项和 x 、 y 轴方向上主要的摄动偏差。ICW 方程中,在建立状态微分方程时,不对非线性偏差的短期项进行修正。在有更高的精度需求时,可用短期项偏差修正结果状态矢量。这样处理的优点在于:得到的控制系统是线性时不变系统,同时在最终的状态矢量中加入短周期项可保证结果的准确性。

3 轨迹规划

对 GEO 航天器绕飞持续观测任务的轨迹规划分为两段:成像卫星抵近 GEO 航天器和成像卫星对 GEO 航天器绕飞。为了实现燃料消耗最少,成像卫星最理想的轨迹规划方案是:在连续小推力控制下接近 GEO 航天器,然后对 GEO 航天器自然绕飞完成持续观测任务。

3.1 成像卫星对 GEO 航天器绕飞

3.1.1 观测角和太阳的运动

观测角定义如图 11 所示。定义 α 为成像卫星对 GEO 航天器的观测角。 0° 观测角表示:成像卫星、GEO 航天器和太阳共线,成像卫星处于中间位置。显然,越接近 0° ,成像卫星对 GEO 航天器的观测越有利;越接近 180° ,成像卫星对 GEO 航天器的观测越不利。成像卫星为了在整个绕飞阶段都能对 GEO 航天器成像,需观测角始终小于 60° 。成像卫星能较好地对 GEO 航天器成像的观测角的最大值取决于成像卫星相机的成像能力和 GEO 航天器的材质,通常情况下,成像卫星在观测角小于 60° 的情况下,可实现对 GEO 航天器成像。

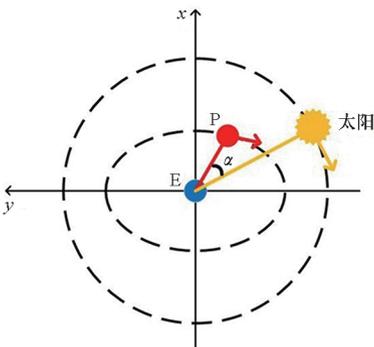


图 11 观测角的定义

Fig. 11 Observation angle

在 ECI 坐标系中,太阳的轨道参数为:

$$\begin{cases} a = 1.000\ 001\ 02 \text{ 天文单位} \\ e = 0.016\ 708\ 62 - 0.000\ 042\ 04T - 0.000\ 001\ 24T^2 \\ i = 23.439\ 291^\circ - 0.013\ 004\ 17''T - 0.000\ 000\ 16''T^2 \\ \Omega = 0'' \\ \omega = 282.937\ 347'' + 0.322\ 562\ 06''T - 0.000\ 157\ 57''T^2 \\ m = 357.529\ 100^\circ + 0.985\ 562\ 008\ 04^\circ d - 0.000\ 773\ 4^\circ d^2 \end{cases} \quad (36)$$

其中, T 为儒略世纪, d 为儒略日。据太阳的轨道参数,可得太阳在 ECI 坐标系中的位置矢量。由于太阳到地心的距离远大于 GEO 航天器到地心的距离,假设地心到太阳的方向与 GEO 航天器 E 到太阳的方向重合。太阳在以航天器 E 为原点的 LVLH 坐标系 \mathfrak{R} 中的方向矢量为:

$$\mathbf{d}_{\text{sun}} = \mathbf{A}_{\text{ECI} \rightarrow \text{LVLH}} \cdot \mathbf{k}_{\text{ECI}} \quad (37)$$

式中, \mathbf{k}_{ECI} 为太阳在 ECI 中的方向矢量。

3.1.2 绕飞阶段的观测角

设计成像卫星 P 在 GEO 航天器 E 轨道平面内的绕飞轨迹。设 t_p 时刻太阳方向矢量在 LVLH 坐标系 \mathfrak{R} 的 xoy 平面上的投影与 x 轴重合,成像卫星 P 在 t_0 到 t_p 时刻完成对航天器 E 的抵近,从 t_p 时刻开始绕飞。 \mathbf{d}_p 为航天器 E 到成像卫星 P 的位置矢量,记 θ_{xy} 为 \mathbf{d}_p 在 t_p 时刻的初始相位角,即 θ_{xy} 为 t_p 时刻 x 轴沿 z 轴反方向到 \mathbf{d}_p 矢量的角度,如图 12 所示。 δ 为太阳的赤纬,即太阳的星下点纬度,显然 $\delta \in (-23^\circ 26', +23^\circ 26')$ 。 t 时刻, \mathbf{d}_p 在 LVLH 坐标系 \mathfrak{R} 中的 x 、 y 、 z 坐标为:

$$\mathbf{d}_p = [x(t), y(t), z(t)] \quad (38)$$

$$\begin{cases} x(t) = e_A a_c \cos(-n_E(t - t_p) - \theta_{xy}) \\ y(t) = 2e_A a_c \sin(-n_E(t - t_p) - \theta_{xy}) \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

式中, $e_A = \sqrt{(e_c + \Delta e)^2 + e_c^2} - 2e_c(e_c + \Delta e)\cos(\Delta m)$, n_E 为 ECI 坐标系中航天器 E 的轨道角速度。成像卫星对 GEO 航天器的观测角为:

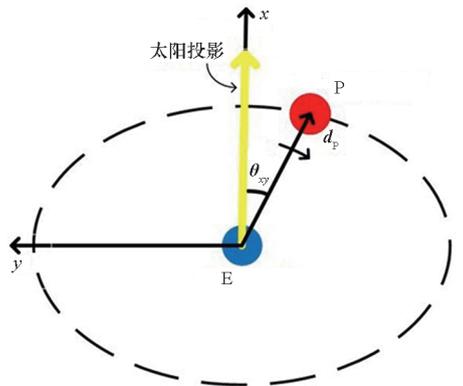


图 12 太阳和成像卫星的相对位置

Fig. 12 Position of the sun and the optical satellite

$$\alpha = \langle \mathbf{d}_p, \mathbf{d}_{\text{sun}} \rangle = \arccos \frac{\mathbf{d}_p \cdot \mathbf{d}_{\text{sun}}}{|\mathbf{d}_p| \cdot |\mathbf{d}_{\text{sun}}|} \quad (40)$$

当 $\theta_{xy} = 0^\circ$ 时, 成像卫星 P 在 GEO 航天器 E 的一个轨道周期内对 E 的观测角如图 13 所示。

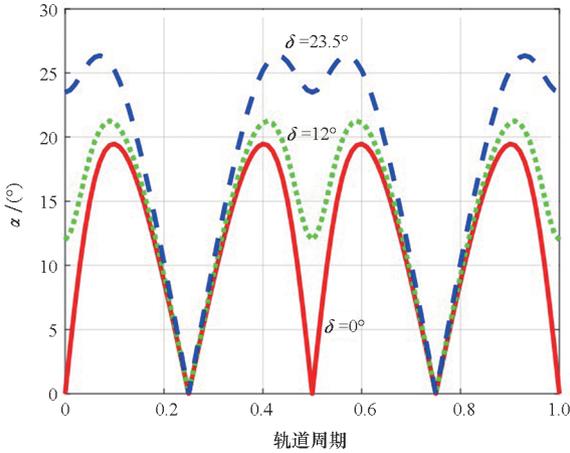


图 13 在 $\theta_{xy} = 0^\circ$ 时成像卫星 P 对 GEO 航天器 E 的观测角
Fig. 13 Observation angles of the optical satellite P to the GEO spacecraft E when $\theta_{xy} = 0^\circ$

太阳的赤纬在 $-23^\circ 26'$ 到 $+23^\circ 26'$ 间变化。记 α_m 为一个轨道周期内 P 对 E 的最大观测角, α_m 随太阳赤纬而变化, 如图 14 所示。当 $\theta_{xy} = 0^\circ$ 时, α_m 在 $\delta = 0^\circ$ 时取得最小值 19.47° , 在 $\delta = \pm 23^\circ 26'$ 时取得最大值 26.35° 。因此, 成像卫星 P 在 t_p 时刻以 $\theta_{xy} = 0$ 开始对 GEO 航天器 E 绕飞, 成像卫星 P 对 GEO 航天器 E 的观测角始终小于 26.35° 。

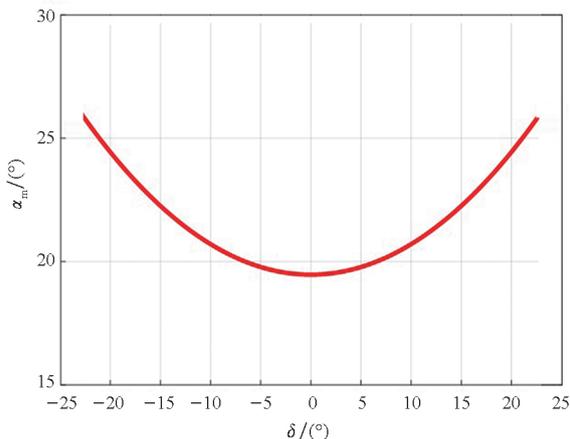


图 14 成像卫星 P 对 GEO 航天器 E 的最大观测角随太阳赤纬的变化

Fig. 14 Maximum observation angle of the optical satellite P to the GEO spacecraft E varies with the declination of the sun δ

t_p 时刻, 成像卫星 P 以初始相位角 $\theta_{xy} \neq 0^\circ$ 开始对 GEO 航天器 E 绕飞。 θ_{xy} 取不同值时, 一个轨道周期内的最大观测角 α_m 随太阳赤纬 δ 变化,

如图 15 所示。因此, 无论太阳的赤纬 δ 取何值, 如果绕飞的初始相位 $\theta_{xy} \in (-37.2^\circ, 37.2^\circ)$, 在整个绕飞任务中, P 对 E 的观测角始终小于 60° , P 可以有利的观测角对 E 拍照。因此, 可对 GEO 航天器持续观测的成像卫星的绕飞初始相位角区间为 $\theta_{xy} \in (-37.2^\circ, 37.2^\circ)$ 。

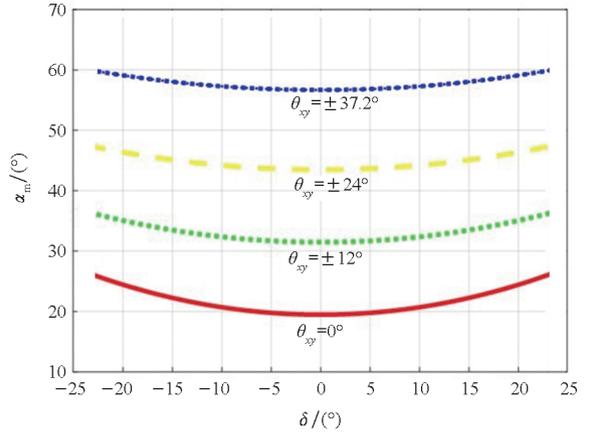


图 15 不同 θ_{xy} 时最大观测角 α_m 随太阳赤纬的变化
Fig. 15 The maximum observation angle in an orbital period α_m varies with the declination of the sun δ at different θ_{xy}

3.1.3 绕飞轨道参数确定

设计成像卫星 P 在 GEO 航天器 E 轨道平面内的绕飞。在 LVLH 坐标系 \mathfrak{R} 中, 绕飞相对轨迹为椭圆, 记 r_{xy} 为相对轨迹的半长轴, 记 y_{off} 为椭圆相对轨道的中心与航天器 E 的距离。记 $\Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega$ 和 Δm 为 P 与 E 轨道的偏心率、轨道倾角、升交点赤经、近地点幅角和平近地点角差值:

$$\begin{cases} \Delta a = 0 \text{ m} \\ \Delta e = \sqrt{\left(\frac{r_{xy}}{2a_c}\right)^2 + \frac{e_c r_{xy}}{a_c} \cos \theta_{xy} + e_c^2} - e_c \\ \Delta i = 0^\circ \\ \Delta \Omega = 0^\circ \\ \Delta \omega = \frac{y_{\text{off}}}{a_c} - \arctan \frac{r_{xy} \sin \theta_{xy}}{r_{xy} \cos \theta_{xy} + 2a_c e_c} \\ \Delta m = \arctan \frac{r_{xy} \sin \theta_{xy}}{r_{xy} \cos \theta_{xy} + 2a_c e_c} \end{cases} \quad (41)$$

已知 GEO 航天器 E 的轨道参数, 根据任务要求的 r_{xy}, θ_{xy} 和 y_{off} , 设计成像卫星 P 的相对轨迹。根据式(41)可得 $\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta m$, 进而可得成像卫星 P 在 t_p 时刻的轨道参数。

3.2 成像卫星抵近 GEO 航天器

据 3.1 节的方法, 可得成像卫星 P 在 t_p 时刻的轨道参数, 已知成像卫星在 t_0 时刻的轨道参数。以成像卫星 P 的燃料消耗为优化指标, 计算

成像卫星接近 GEO 航天器的控制策略,从 t_0 到 t_p 的轨迹优化是一个两点边界问题。状态方程为:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (42)$$

支付函数为:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_p} (\mathbf{U}^T \mathbf{U}) dt \quad (43)$$

根据式(43),哈密顿函数可写为:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{U}) \quad (44)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda}$ 是协态变量。

根据最优化的必要条件,协态方程为:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^* = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Y}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}^* \quad (45)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{U}^* + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0} \quad (46)$$

把式(46)代入式(42),得:

$$\dot{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{A}\mathbf{Y}^* - \mathbf{B}\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}^* \quad (47)$$

据式(47)和式(45),可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}^* \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix} \quad (48)$$

式(48)的解析解为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}^*(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} (t - t_0) \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t_0) \end{bmatrix} \quad (49)$$

式(49)可写为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}^*(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\mathbf{I}_{11}(t) & \mathbf{I}\mathbf{I}_{12}(t) \\ \mathbf{I}\mathbf{I}_{21}(t) & \mathbf{I}\mathbf{I}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t_0) \end{bmatrix} \quad (50)$$

已知 ICW 方程中的初始状态矢量 $\mathbf{Y}(t_0)$ 和终端状态矢量 $\mathbf{Y}(t_p)$, 可得:

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t_0) = \mathbf{I}\mathbf{I}_{12}(t_p)^{-1} [\mathbf{Y}^*(t_p) - \mathbf{I}\mathbf{I}_{11}(t_p)\mathbf{Y}(t_0)] \quad (51)$$

根据式(46)、式(50)和式(51),可得最优控制策略:

$$\mathbf{U}^*(t) = -\mathbf{B}^T [\mathbf{I}\mathbf{I}_{21}(t)\mathbf{Y}(t_0) + \mathbf{I}\mathbf{I}_{22}(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t_0)] \quad (52)$$

4 仿真

从 t_0 到 t_p , 成像卫星 P 在连续小推力的作用下接近 GEO 航天器 E; 自 t_p 时刻开始, 成像卫星 P 对 GEO 航天器自然绕飞。成像卫星 P 的相对绕飞轨迹在 GEO 航天器 E 的轨道平面内, 椭圆相对轨迹的半长轴为 20 km, 初始相位角 $\theta_{xy} = 0^\circ$ 。在该场景中, t_0 为 GEO 航天器星下点当地时间

2021 年 6 月 10 日 00:00:00, t_p 为 2021 年 6 月 11 日 12:00:00。成像卫星 P 和 GEO 航天器 E 在 t_0 时刻的轨道参数如表 1 所示。

根据 CW 方程和 ICW 方程, LVLH 坐标系 \mathfrak{N} 中成像卫星 P 在 t_0 和 t_p 时的状态矢量如表 3 所示, \mathbf{X} 为 CW 方程的状态矢量, \mathbf{Y} 为 ICW 方程的状态矢量。

表 3 成像卫星 P 在 LVLH 坐标系中的状态矢量

Tab. 3 State vector of the optical satellite P in the LVLH frame

| 状态 矢量 | x/m | y/m | z/m | $\dot{x}/(\text{m/s})$ | $\dot{y}/(\text{m/s})$ | $\dot{z}/(\text{m/s})$ |
|-------------------|--------------|--------------|--------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\mathbf{X}(t_0)$ | -237 | 199 999 | 34.9 | 7.292 2 | -0.008 7 | 0.536 6 |
| $\mathbf{Y}(t_0)$ | -237 | 199 999 | 34.9 | 7.292 2 | 0.034 5 | 0.536 6 |
| $\mathbf{X}(t_p)$ | 10 000 | 0 | 0 | -0.000 046 | -1.458 3 | 0 |
| $\mathbf{Y}(t_p)$ | 10 000 | 0 | 0 | -0.000 046 | -1.458 4 | 0 |

分别基于 CW 方程和 ICW 方程进行仿真。计算成像卫星 P 的最优控制策略, 将成像卫星 P 在 ECI 坐标系中的运动方程积分得到其位置和速度, 再将 ECI 中得到的位置转换到 LVLH 坐标系中。积分采用龙格-库塔法, 积分得到的结果作为成像卫星 P 的真实位置, 进而可得成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置以及 P 对 E 绕飞过程中的观测角。将基于 CW 方程和 ICW 方程得到的相对位置和观测角进行对比。

4.1 基于 CW 方程的仿真

基于 CW 方程进行仿真。 t_0 到 t_p 时间内, 成像卫星 P 在连续小推力作用下接近 GEO 航天器 E, 施加的总速度增量为 4.70 m/s。图 16 为成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置在 LVLH 坐标系 xoy 平面中的投影。由于 CW 方程存在偏差, 相对绕飞轨迹的中心在 y 轴方向上偏离 GEO 航天器 E。图 17 为 P 到 E 的距离, t_p 时刻, P 到 E 的距离不是预先规划的 10 km, 而是 14 km。图 18 为成像卫星 P 在 t_p 后的一个轨道周期内对 GEO 航天器 E 的观测角, 最大观测角为 75.57° , 成像观测仿真任务失败。

4.2 基于 ICW 方程的仿真

基于 ICW 方程进行仿真, 图 19 为成像卫星 P 从 t_0 到 t_p 的控制推力加速度(工程上一般表述为控制推力), 总速度增量为 4.67 m/s。图 20 ~ 22 分别表示成像卫星 P 的推力控制的 x 、 y 、 z 坐标分量。图 23 为 P 相对于 E 的位置, 图 24 为 P 与 E 间的距离, t_p 时刻 P 与 E 的距离为 10 km, P 开始

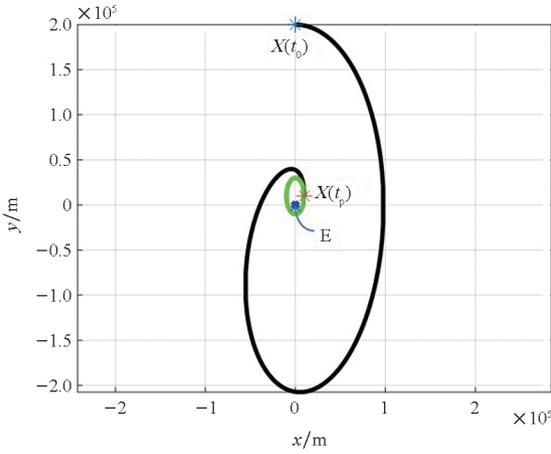


图 16 基于 CW 方程仿真的成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置在 LVLH 坐标系 xoy 平面中的投影
 Fig. 16 Position of the optical satellite P relative to the GEO spacecraft E on the xoy plane based on CW equations simulation

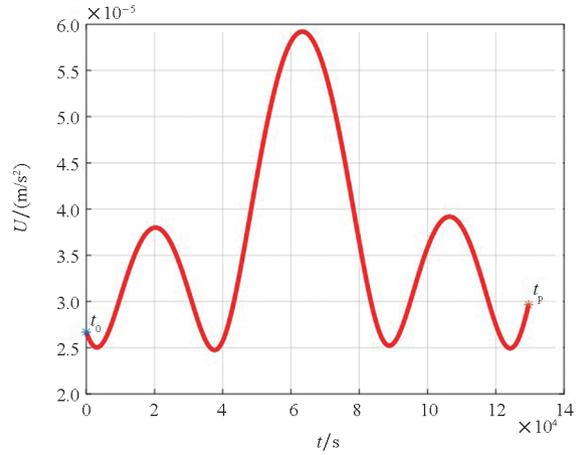


图 19 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 的控制推力
 Fig. 19 Thrust control of the optical satellite P based on ICW equations simulation

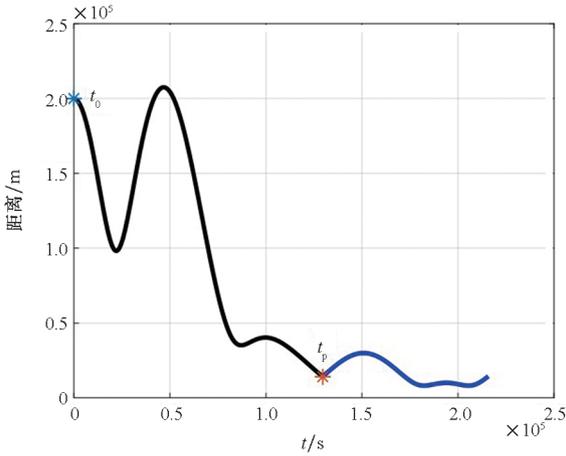


图 17 基于 CW 方程仿真的成像卫星 P 与 GEO 航天器 E 的距离
 Fig. 17 Distance between the optical satellite P and the GEO spacecraft E, simulation based on CW equations

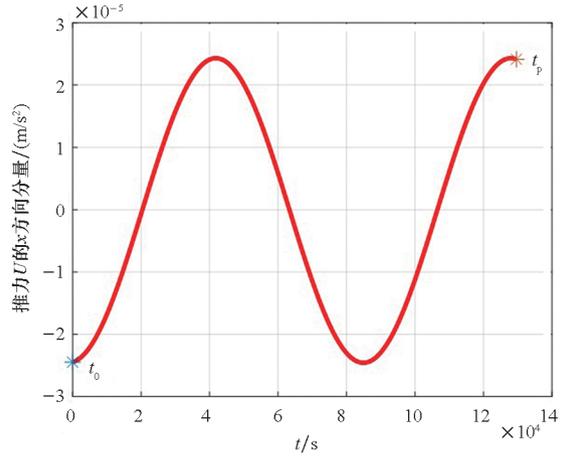


图 20 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 在 x 方向的推力
 Fig. 20 Thrust control of the optical satellite P in x -coordinate simulation based on ICW equations

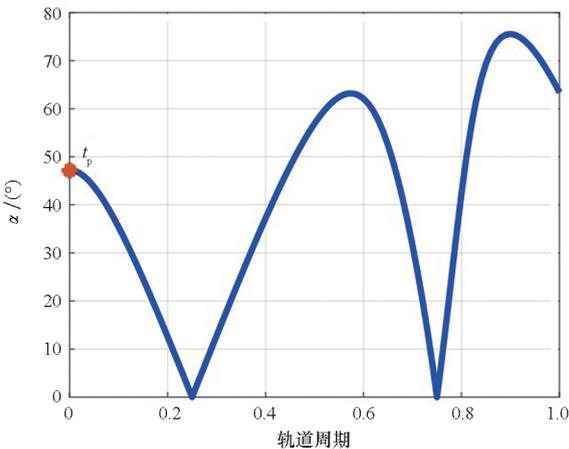


图 18 基于 CW 方程仿真的成像卫星 P 对 GEO 航天器 E 的观测角

Fig. 18 Observation angles of the optical satellite P to the GEO spacecraft E based on CW equations simulation

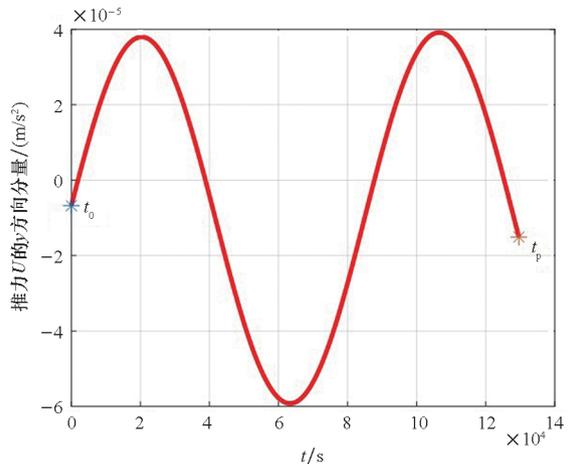


图 21 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 在 y 方向的推力
 Fig. 21 Thrust control of the optical satellite P in y -coordinate simulation based on ICW equations

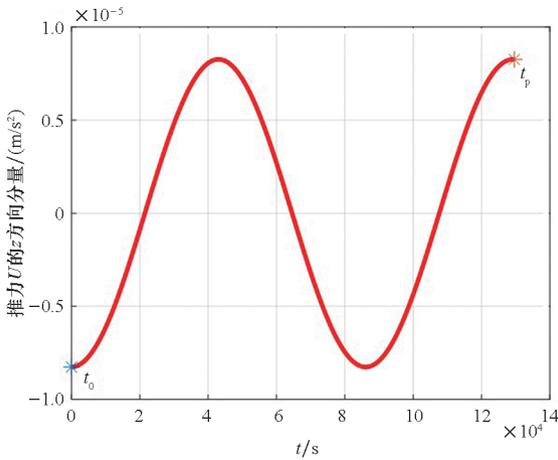


图 22 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 在 z 方向的推力
Fig. 22 Thrust control of the optical satellite P in z-coordinate simulation based on ICW equations

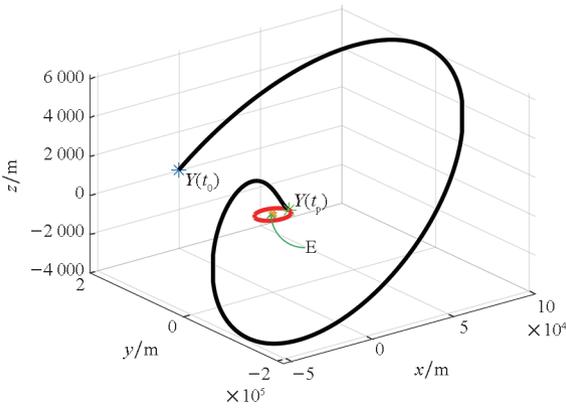


图 23 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 相对 GEO 航天器 E 的位置
Fig. 23 Position of the optical satellite P relative to the GEO spacecraft E based on ICW equations simulation

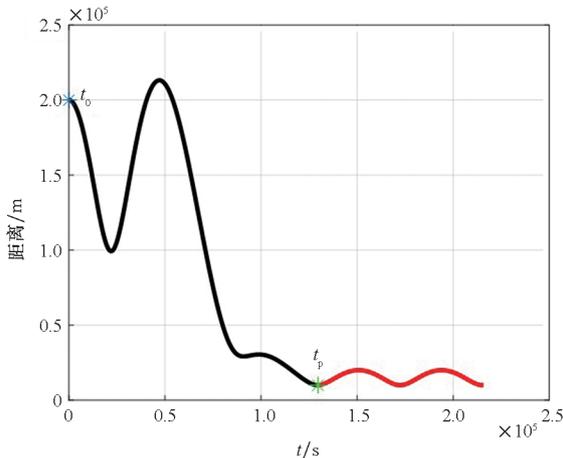


图 24 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 与 GEO 航天器 E 间的距离
Fig. 24 Distance between the optical satellite P and the GEO spacecraft E based on ICW equations simulation

对 E 自然绕飞。图 25 为 P 对 E 在 t_p 后一个轨道周期内的观测角,最大观测角为 22.6° 。成像卫星 P 能以良好的观测角在整个绕飞任务中对 GEO 航天器 E 成像。

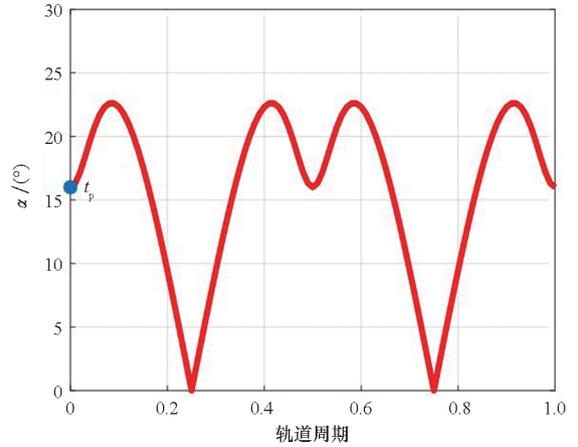


图 25 基于 ICW 方程仿真的成像卫星 P 对 GEO 航天器 E 的观测角
Fig. 25 Observation angles of the optical satellite P to the GEO spacecraft E based on ICW equations simulation

5 结论

通过修正非球形摄动偏差和重力加速度二次长期项偏差改进 CW 方程。将 CW 方程、ICW 方程与真值作仿真对比,ICW 方程补偿了非线性偏差的长期项和主要的摄动偏差。在轨迹规划问题上,计算对 GEO 航天器绕飞的初始相位角区间,成像卫星以该区间内的初始相位角对 GEO 航天器开始绕飞,可实现在整个绕飞任务中都能以良好的观测角对 GEO 航天器进行观测。选择合适的初始相位角,分别基于 CW 方程和 ICW 方程仿真接近和绕飞的全过程。在仿真中,成像卫星在连续的小推力作用下接近 GEO 航天器,然后对 GEO 航天器自然绕飞。基于 CW 方程的仿真任务失败,而基于 ICW 方程达到预期目标。在基于 ICW 方程的仿真中,所需要的总速度增量仅为 4.67 m/s ,工程上具有很强的可行性。ICW 方程可满足精度要求,可用于 GEO 空间态势感知和在轨服务任务规划。

参考文献 (References)

[1] ESA Space Debris Office. ESA's space environment report[R/OL]. (2021 - 05 - 27) [2021 - 06 - 27]. https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/ESA_s_Space_Environment_Report_2021.

[2] HEILIGERS J, MCINNES C R, BIGGS J D, et al. Displaced geostationary orbits using hybrid low-thrust propulsion [J]. Acta Astronautica, 2012, 71: 51 - 67.

- [3] DE ALMEIDA A K, Jr, PIÑEROS J O M, DE ALME PRADO A F B. On the use of a continuous thrust to find bounded planar trajectories at given altitudes in low earth orbits[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10: 8728.
- [4] SULLIVAN J, GRIMBERG S, D'AMICO S. Comprehensive survey and assessment of spacecraft relative motion dynamics models[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(8): 1837–1859.
- [5] YIN J F, RAO Y R, HAN C. Inverse transformation of elliptical relative state transition matrix [J]. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2014, 4(3): 419–428.
- [6] YIN J F, HAN C. Elliptical formation control based on relative orbit elements[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 26(6): 1554–1567.
- [7] MONTENBRUCK O, KIRSCHNER M, D'AMICO S, et al. E/I-vector separation for safe switching of the GRACE formation [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2006, 10(7): 628–635.
- [8] D'AMICO S, MONTENBRUCK O. Proximity operations of formation-flying spacecraft using an eccentricity/inclination vector separation [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(3): 554–563.
- [9] D'AMICO S. *Autonomous formation flying in low earth orbit*[D]. The Netherlands; Ridderprint BV, 2010.
- [10] GAIAS G, ARDAENS J S, MONTENBRUCK O. Model of J2 perturbed satellite relative motion with time-varying differential drag [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2015, 123(4): 411–433.
- [11] SPIRIDONOVA S. Formation dynamics in geostationary ring[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2016, 125(4): 485–500.
- [12] VADDI S S, VADALI S R, ALFRIEND K T. Formation flying: accommodating nonlinearity and eccentricity perturbations [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(2): 214–223.
- [13] 刘猛, 李全. 航天器对空间目标追踪及绕飞研究[J]. *沈阳理工大学学报*, 2011, 30(2): 80–83.
LIU M, LI Q. Research on achievement of tracking and flying around space target [J]. *Journal of Shenyang Ligong University*, 2011, 30(2): 80–83. (in Chinese)
- [14] 黄艺, 贾英民. 非合作目标绕飞任务的航天器鲁棒姿轨耦合控制 [J]. *控制理论与应用*, 2018, 35(10): 1405–1414.
HUANG Y, JIA Y M. Robust relative position and attitude control for non-cooperative fly-around mission [J]. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(10): 1405–1414. (in Chinese)
- [15] 谭天乐. 椭圆轨道交会、悬停与绕飞的全状态反馈控制[J]. *宇航学报*, 2016, 37(7): 811–818.
TAN T L. Full state feedback control of rendezvous, hovering and fly-around in elliptical orbit[J]. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(7): 811–818. (in Chinese)
- [16] 李彬, 张洪波, 郑伟. 航天器近距离相对悬停被动安全特性分析[J]. *国防科技大学学报*, 2019, 41(6): 1–11.
LI B, ZHANG H B, ZHENG W. Passive safety analysis of close relative hovering for spacecraft[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2019, 41(6): 1–11. (in Chinese)
- [17] 孙永军, 王钤, 刘伊威, 等. 空间非合作目标捕获方法综述[J]. *国防科技大学学报*, 2020, 42(3): 74–90.
SUN Y J, WANG Q, LIU Y W, et al. A survey of non-cooperative target capturing methods[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2020, 42(3): 74–90. (in Chinese)
- [18] 刘涛, 王勇, 解永春, 等. 一种用于非合作目标惯性指向轴位置捕获的绕飞方法[J]. *宇航学报*, 2018, 39(5): 524–531.
LIU T, WANG Y, XIE Y C, et al. A fly-around method for capturing position on inertia axis of a non-cooperative target[J]. *Journal of Astronautics*, 2018, 39(5): 524–531. (in Chinese)
- [19] 常燕, 陈韵, 鲜勇, 等. 椭圆轨道上目标监测绕飞轨道构型设计与构型保持[J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(6): 1317–1324.
CHANG Y, CHEN Y, XIAN Y, et al. Configuration design and maintenance of flyaround trajectory for target monitoring in elliptical orbit [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(6): 1317–1324. (in Chinese)
- [20] 梁静静, 解永春. 基于长方体禁飞区的安全绕飞轨迹设计[J]. *空间控制技术与应用*, 2018, 44(1): 45–50.
LIANG J J, XIE Y C. Design method of safe fly-around trajectory based on rectangular keep-out-zone[J]. *Aerospace Control and Application*, 2018, 44(1): 45–50. (in Chinese)
- [21] 王功波, 孟云鹤, 郑伟, 等. 快速绕飞卫星空间圆编队设计方法[J]. *宇航学报*, 2010, 31(11): 2465–2470.
WANG G B, MENG Y H, ZHENG W, et al. Fast fly around satellite space circle formation design [J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(11): 2465–2470. (in Chinese)
- [22] DANG Z H. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary Keplerian orbit [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(11): 2917–2927.
- [23] DANG Z H. Solutions of Tschauner-Hempel equations[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(11): 2953–2957.

(编辑: 梁慧, 杨琴)