

基于权重的 AHP 判断矩阵一致性调整方法

耿正霖, 吴佳妮, 程兴华, 包长春*

(国防科技大学 气象海洋学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:传统的判断矩阵调整方法计算得到的权重不能最大限度地保留原始判断矩阵的信息。为此,提出一种基于权重的判断矩阵调整方法。该方法根据权重的性质,构造完全一致矩阵,利用 AdaGrad 最速下降法对矩阵进行拟合,使该矩阵相对于原始判断矩阵的总改变量最小,以其对应的权重作为矩阵的计算结果。数值计算结果表明,该方法相比于其他方法,权重对原始判断信息的保留度更高,且不需要反复进行矩阵一致性检验。

关键词:层次分析法;判断矩阵;一致性调整;AdaGrad

中图分类号:C934 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2024)01-179-08

Consistency adjustment method for pairwise comparison matrix in analytic hierarchy process based on weights

GENG Zhenglin, WU Jiani, CHENG Xinghua, BAO Changchun*

(College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Calculated weights by traditional PCM (pairwise comparison matrix) adjustment methods can't retain the information of the original PCM to the maximum extent. Therefore, a method for PCM modulation based on the weights was proposed. The method constructed a completely consistent matrix according to the properties of weights, and the matrix was fitted by the AdaGrad method, so as to minimize the total change of the matrix relative to the original PCM. Corresponding weights was taken as the calculation result of the matrix. Numerical results show that this method can significantly improve the retention of original PCM information compared with other methods and does not require repeated consistency checking.

Keywords: analytic hierarchy process; pairwise comparison matrix; consistency adjustment; AdaGrad

层次分析法^[1] (analytic hierarchy process, AHP)是一种综合定性与定量分析的多指标、多准则的综合评价方法,为定量分析定性事件提供了一种有效的技术手段,在经济、社会、管理、军事等诸多领域得到了广泛应用^[2-8]。其基本原理是由决策者(decision maker, DM)对不同指标进行两两比较,构建一个判断矩阵(pairwise comparison matrix, PCM),通过判断矩阵进行分析得出不同指标的权重^[1]。判断矩阵描述了决策者对不同比较因素的判决,但该判断通常有主观性,可能出现前后不一致的情况,即构造出来的判断矩阵可能不满足一致性要求^[9-10],导致计算出的权重难以保证决策的可靠性。因此,计算权重前通常需对判断矩阵进行一致性检测和元素值调整与修正,减小主观不一致对决策造成的影响。

目前,对判断矩阵进行修正,通常考虑两点:①使得改进后的判断矩阵满足一致性要求;②尽量保证对原始判断矩阵的修改不违背决策者的初衷。也就是在保证判断矩阵满足一致性要求的前提下,调整判断矩阵的元素值,使得调整后的判断矩阵与原始判断矩阵的差异程度最小^[11]。这里所说的判断矩阵满足一致性要求,通常是指判断矩阵的一致性系数(consistency ratio, CR)小于0.1^[11],该评判标准已广泛用于AHP一致性评价中。而矩阵调整程度可采用不同的指标进行衡量^[11],例如判断矩阵各元素总的变化量^[12]、判断矩阵各元素调整最大值^[11,13]、判断矩阵调整元素个数^[14]、判断矩阵元素调整比例^[15-16]等。这些方法均以CR满足一致性要求为目标,通过不同评价指标对应算法进行判断矩阵的调整,直至判

收稿日期:2021-11-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61702531)

作者简介:耿正霖(1988—),男,云南昆明人,讲师,博士,E-mail:oliver8812@163.com.cn

*通信作者:包长春(1979—),男,吉林镇赓人,副教授,博士,E-mail:baochangchun1979@163.com

断矩阵满足一致性要求。

但是,目前对判断矩阵信息保留程度的评价标准都是从判断矩阵出发,以判断矩阵调整前后的变化量衡量对原判断信息的保留程度,却没有考虑调整后判断矩阵残留的不一致性(CR≠0)对最终权重计算结果的影响。因为当CR≠0时,矩阵的逻辑不一致性^[17]可能并未完全消除,会导致计算权重时判断矩阵还存在逻辑矛盾,而且矩阵的数值不一致性也会对权重计算产生影响。两者都会使得权重所表述的各因素之间关系与原始判断产生偏离,也就是说,目前的方法并不能完全衡量最终判断结果(权重)对原始判断矩阵的保留程度。

因此,本文从判断结果出发,提出一种基于计算权重的 AHP 一致性调整方法,以最终计算权重对应的完全一致矩阵与原始判断矩阵差异最小为优化目标,进行判断矩阵调整,使权重能最大程度保留原始判断信息。

1 问题描述

通常,层次分析法的应用过程如图 1 所示。

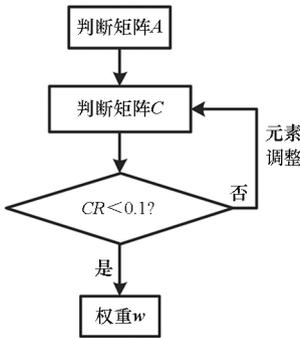


图 1 层次分析法应用过程
Fig. 1 Process of AHP application

首先,决策者给出原始判断矩阵 A,将 A 作为矩阵调整的初始值赋值给 C,若 C 满足一致性要求(CR < 0.1),则直接用 C 计算权重 w;若 C 不满足一致性要求,则通过相应的准则进行矩阵调整,直至 C 满足一致性要求(CR < 0.1),再根据矩阵 C 计算对应的权重 w,以进行不同因素的重要性加权。

目前,大多文献关注的是矩阵调整前后的变化量 X(X = C - A),以矩阵调整量的相应数据作为信息保留程度的衡量标准。但从层次分析法的应用看,最终目的是计算权重 w,要使结果尽量保留决策者的判断,应该使最终计算得到的权重 w 所表示的元素之间的重要性关系能尽可能保留原始判断矩阵的信息,而不是调整后的矩阵 C 尽可能保留原始判断矩阵的信息。

权重 w 可以视为是根据判断矩阵所有元素得

出的综合判决的结果,包含了各因素之间的重要性判断,其对应一个完全一致的矩阵 B(B 满足条件:对于任意的 i, j, k, 有 $b_{i,j} = b_{i,k} b_{k,j}$ ^[18]),可以描述各因素两两之间的相对重要性。用完全一致矩阵 B 与原始判断矩阵 A 的差异来衡量判断矩阵元素调整对原始决策信息的保留程度更为合理。层次分析法过程中涉及的变量关系如图 2 所示。

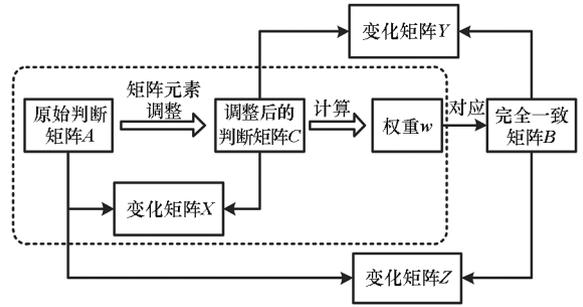


图 2 矩阵相互关系示意图

Fig. 2 Schematic diagram of matrix interrelationships

在实际情况下,矩阵元素调整通常不能完全消除不一致性(CR≠0),此时,计算得到的权重所对应的完全一致矩阵 B 与用于计算权重的判断矩阵 C 存在差异,用矩阵 Y 表示(Y = B - C),该矩阵等效于将判断矩阵 C 进行调整得到一个完全一致矩阵 B 所进行的调整量。那么,权重所对应的完全一致矩阵 B 与原始判断矩阵存在的差异为矩阵 X 和 Y 的叠加,用矩阵 Z 表示,即 Z = B - A。

可以看出,矩阵 X 是调整后的判断矩阵 C 相对于原始判断矩阵的改变量,而矩阵 Z 才是最终判断结果相对于原始判断矩阵的改变量。所以,通过矩阵 Z 更能衡量出判断结果即权重 w 对原始判断矩阵的改变程度或保留程度。因此,本文以矩阵 Z 各元素的平方和作为矩阵改变量的衡量标准,以其最小值为优化目标进行矩阵 B 的求解。

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{i,j}^2 = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \quad (1)$$

式中,N 为元素个数。

此时,权重求解过程转化为求解一个完全一致矩阵,使其与原始判断矩阵差异最小的过程。这个完全一致矩阵与权重一一对应,求出矩阵就对应得到权重。权重 w 和完全一致矩阵 B 对应关系如下:

1) 设 $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$, 则 B 可以由式(2)计算得到。

$$b_{i,j} = \frac{w_i}{w_j} \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

2) 若已知完全一致矩阵 B, 则对其任意列进

行归一化即可得到权重 w 。

$$w_i = b_{i,j} / \sum_{k=1}^N b_{k,j} \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

从上述分析可知,本文目标就是通过矩阵元素调整,构造一个完全一致矩阵,使其相对于原始矩阵的改变量最小。

2 算法步骤

假设原始判断矩阵为 A , 表示为:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} \quad (4)$$

本文目的是求得一个完全一致矩阵 B , 使得 A 与 B 的差异最小, 而 B 的任意列进行归一化后作为该判断矩阵计算得到的权重。这一过程也可以理解为一个带约束条件的优化问题: 在保证最终结果为完全一致矩阵的条件下, 使求得的矩阵与原始判断矩阵的差异程度最小。

显然, 对于一个完全一致矩阵 B , 其秩为 1, 行列间相关, 仅有 $N-1$ 个独立的变量, 只要确定 $N-1$ 个独立的变量的值就能确定整个矩阵。不失一般性, 可假设 $N-1$ 个独立的变量为 $b_{m,m+1}$, 其中 $1 \leq m \leq N-1$, 则矩阵其他元素都可由这 $N-1$ 个元素计算得到。矩阵 B 可依据式(5)构造:

$$b_{i,j} = \begin{cases} \prod_{m=i}^{j-1} b_{m,m+1} & j > i; i = 1, \dots, N-1; j = 2, \dots, N \\ \frac{1}{b_{j,i}} & j < i; j = 1, \dots, N-1; i = 2, \dots, N \\ 1 & j = i \end{cases} \quad (5)$$

只要改变 $b_{m,m+1}$ 的值, 就能在矩阵完全一致特性不变条件下, 实现矩阵调整, 从而与矩阵 A 进行拟合, 得到改变量最小条件下的 B , 作为调整后的矩阵。也就是求 $b_{m,m+1} (1 \leq m \leq N-1)$, 使得

矩阵改变量 $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2$ 最小, 即:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \quad (6)$$

因为 $a_{i,i} = b_{i,i} = 1$, 式(6) 等效于:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \quad (7)$$

要得到使得式(7)最小的 $b_{m,m+1} (1 \leq m \leq N-1)$, 最简单的方式是通过在一定范围内遍历 $b_{m,m+1}$ 的取值, 但该方法计算量较大, 特别是当 N

较大时, 若每个维度遍历数为 M , 总的遍历数量为 M^{N-1} 。基于此原因, 利用梯度最速下降法进行最优值的求解, 主要步骤如下。

2.1 优化目标

根据上述分析, 令 $b = [b_{1,2}, b_{2,3}, \dots, b_{N-1,N}]^T$,

设 $p = f(b) = f(b_{1,2}, b_{2,3}, \dots, b_{N-1,N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2$, 则最终目标即为求 $p = f(b)$ 在取值范围内的最小值。

2.2 梯度计算

计算 $p = f(b)$ 的梯度, 上式可以写为:

$$p = f(b) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (a_{i,j} - b_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[(a_{i,j} - b_{i,j})^2 + \left(\frac{1}{a_{i,j}} - \frac{1}{b_{i,j}} \right)^2 \right] \quad (8)$$

其中, $b_{i,j}$ 对 $b_{n,n+1} (1 \leq n \leq N-1)$ 求导得:

$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{n,n+1}} = \begin{cases} \prod_{m=i, m \neq n}^{j-1} b_{m,m+1} & i \leq n \leq j-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

那么, 计算得到 $1/b_{i,j}$ 对 $b_{n,n+1} (1 \leq n \leq N-1)$ 求导的结果:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{b_{i,j}} \right)}{\partial b_{n,n+1}} = \begin{cases} - \prod_{m=i, m \neq n}^{j-1} b_{m,m+1} / b_{i,j}^2 & i \leq n \leq j-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

则可计算出 p 对 $b_{n,n+1} (1 \leq n \leq N-1)$ 的导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial b_{n,n+1}} &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[2(a_{i,j} - b_{i,j})(-1) \frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{n,n+1}} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{1}{a_{i,j}} - \frac{1}{b_{i,j}} \right) \frac{1}{b_{i,j}^2} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{n,n+1}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left\{ \left[2 \left(\frac{1}{a_{i,j}} - \frac{1}{b_{i,j}} \right) \frac{1}{b_{i,j}^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2(a_{i,j} - b_{i,j}) \right] \frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{n,n+1}} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

那么, 可根据式(11), 求得 p 的梯度:

$$\nabla = \left[\frac{\partial p}{\partial b_{1,2}}, \frac{\partial p}{\partial b_{2,3}}, \dots, \frac{\partial p}{\partial b_{N-1,N}} \right]^T \quad (12)$$

2.3 数据更新

传统梯度下降法对每一个参数的学习率是相同的, 但实际中, 不同参数的重要性不同, 因此本文采用自适应梯度算法^[19] (adaptive gradient algorithm, AdaGrad) 进行数据更新, 对不同参数采用不同的学习率, 使目标函数能更快收敛。

设梯度累计量为 r , k 表示迭代次数, $k \geq 1$, 初

始化 $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{0}$, 累计量的更新公式如下:

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} + H(\nabla^{(k)}, \nabla^{(k)}) \quad (13)$$

式中, $H(\nabla^{(k)}, \nabla^{(k)})$ 表示 $\nabla^{(k)}$ 和自身的 Hadamard 乘积。梯度的更新公式如下:

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k-1)} - H\left(\frac{\gamma}{\delta + \sqrt{\mathbf{r}^{(k)}}}, \nabla^{(k)}\right) \quad (14)$$

式中: γ 为学习率; δ 为一个极小量, 避免分母为 0。因为原始判断矩阵元素在 $[1/9, 9]$ 内分布, \mathbf{b} 初值各个元素也在 $[1/9, 9]$ 内分布, 为避免调整量过大, 可控制 γ 大小使得最大调整量在一定的范围内。

可以看出, AdaGrad 算法第一次调整值约为学习率, 如果学习率超过了初值或者很接近初值, 会导致调整后的元素接近于 0, 其对应的倒数值会很大, 使得结果不收敛或者收敛到错误结果。故初值和学习率的选择原则为:

1) 采用原始判断矩阵的次对角阵元素为初值; 在无其他信息时, 原始判断矩阵具有较高的参考价值。

2) 学习率的选择, 可根据初值元素中的最小值设定, 为避免调整后特别是首次调整后矩阵元素接近 0, 设置学习率为最小元素值的 1/2。

2.4 迭代计算

计算 $\mathbf{b}^{(k)}$ 对应的 $p^{(k)}$, 当 $|p^{(k)} - p^{(k-1)}| < \varepsilon$ 停止迭代, 其中 ε 为一个很小的正数。假设此时迭代次数为 K , 以此时的 $\mathbf{b}^{(K)}$ 作为 \mathbf{b} 的最终解。

2.5 权重计算

得到最终的 \mathbf{b} 后, 根据式(5)构建完全一致矩阵 \mathbf{B} , 根据其任意列可以计算得到对应的权重 \mathbf{w} 。以矩阵 \mathbf{B} 的第 1 列为例, 其值为 $[1, 1/b_{1,2}, 1/\prod_{m=1}^2 b_{m,m+1}, \dots, 1/\prod_{m=1}^{N-1} b_{m,m+1}]^T$, 将其进行归一化, 即得到权重 \mathbf{w} 。

$$\mathbf{w} = \frac{[1, 1/b_{1,2}, 1/\prod_{m=1}^2 b_{m,m+1}, \dots, 1/\prod_{m=1}^{N-1} b_{m,m+1}]^T}{\sum_{j=2}^N (1/\prod_{m=1}^{j-1} b_{m,m+1}) + 1} \quad (15)$$

通过上述方法, 可以根据梯度大小自动调整变化量的大小和方向, 加快矩阵调整速率, 使得 \mathbf{b} 较快收敛到最小值点, 得到改变量较小的矩阵 \mathbf{B} , 同时得到对应的权重 \mathbf{w} 。

3 算例分析

利用 MATLAB 对上述算法进行验证分析, 并与其他几种参考算法进行比较。计算经典算例下

本文所述的完全一致矩阵改变量大小, 以此衡量算法的性能。传统算法通常只计算得到一个满足一致性条件的判断矩阵, 进而计算权重; 本文利用权重计算其对应的完全一致矩阵, 将其与原始判断矩阵进行比较。进行比较的算法如表 1 所示。

表 1 主要比较算法

Tab. 1 Main compared algorithms

参考文献	主要原理
文献[20]	通过诱导矩阵和判断矩阵之间的关系进行矩阵偏差最大的元素修正
文献[11]	约束最大改变量大小, 使得判断矩阵调整后差异最小
文献[13]	采用边界优化理论, 将降低 CR 为效益, 判断矩阵最大改变量为成本, 将问题转化为效益/成本分析问题
文献[17]	通过构造基本回路, 找出判断矩阵中逻辑不一致元素, 同步进行逻辑一致性和数值一致性修正

3.1 算例 1

文献[20]、文献[11]和文献[13]均通过算例 1 进行算法性能的比较, 其初始判断矩阵为:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5/2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 9 & 2 \\ 2/5 & 1/9 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.1 文献[20]方法

文献[20]所述方法得到的调整后的判断矩阵为:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5/2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 & 2 \\ 2/5 & 1/9 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

计算得到权重及对应的完全一致矩阵为:

$$\mathbf{w}_1 = [0.483\ 8 \quad 0.246\ 4 \quad 0.123\ 0 \quad 0.146\ 9]^T$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1.000\ 0 & 1.963\ 5 & 3.933\ 3 & 3.2934 \\ 0.509\ 3 & 1.000\ 0 & 2.003\ 3 & 1.677\ 3 \\ 0.254\ 2 & 0.499\ 2 & 1.000\ 0 & 0.837\ 3 \\ 0.303\ 6 & 0.596\ 2 & 1.194\ 3 & 1.000\ 0 \end{bmatrix}$$

将其与原始判断矩阵进行比较, 总的改变量为 54.981 7, 最大改变量为 6.996 7($a_{2,3}$)。

3.1.2 文献[11]方法

采用文献[11]所述方法得到的调整后的判断矩阵为:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 1.632 & 6 & 3.173 & 6 & 4.862 & 1 \\ 0.612 & 5 & 1.000 & 0 & 8.894 & 4 & 2.206 & 4 \\ 0.315 & 1 & 0.112 & 4 & 1.000 & 0 & 0.511 & 2 \\ 0.205 & 7 & 0.453 & 2 & 1.956 & 2 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

计算得到权重及对应的完全一致矩阵为:

$$w_2 = [0.437 \ 3 \ 0.366 \ 1 \ 0.074 \ 0 \ 0.122 \ 6]^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 1.194 & 5 & 5.909 & 5 & 3.566 & 9 \\ 0.837 & 3 & 1.000 & 0 & 4.947 & 3 & 2.986 & 1 \\ 0.169 & 2 & 0.202 & 1 & 1.000 & 0 & 0.603 & 6 \\ 0.280 & 4 & 0.334 & 9 & 1.656 & 8 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

将其与原始判断矩阵进行比较,总的改变量为 32.061 5,最大改变量为 4.052 7($a_{2,3}$)。

3.1.3 文献[13]方法

采用文献[13]得到调整后的判断矩阵为:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 1.626 & 0 & 2.874 & 0 & 4.626 & 0 \\ 0.615 & 0 & 1.000 & 0 & 8.626 & 0 & 2.374 & 0 \\ 0.347 & 9 & 0.115 & 9 & 1.000 & 0 & 0.615 & 0 \\ 0.216 & 2 & 0.421 & 2 & 1.626 & 0 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

计算得到权重及对应的完全一致矩阵为:

$$w_3 = [0.424 \ 6 \ 0.377 \ 8 \ 0.080 \ 6 \ 0.116 \ 9]^T$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 1.123 & 9 & 5.268 & 0 & 3.632 & 2 \\ 0.889 & 8 & 1.000 & 0 & 4.687 & 3 & 3.231 & 8 \\ 0.189 & 8 & 0.213 & 3 & 1.000 & 0 & 0.689 & 5 \\ 0.275 & 3 & 0.309 & 4 & 1.450 & 4 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

将其与原始判断矩阵进行比较,总的改变量为 31.003 3,最大改变量为 4.312 7($a_{2,3}$)。

3.1.4 本文方法

设小常数 δ 为 10^{-7} ,循环停止条件 ε 为 10^{-5} ,本文方法不同条件计算得到的结果如表 2 所示。

表 2 算例 1 本文方法计算结果

Tab.2 Calculation results of the example 1 by the proposed method

起始值	学习率 γ	结果		
		迭代次数	矩阵改变量	最大改变量
原始判断矩阵次对角元素	0.25	335	20.255 3	2.848 6
	0.10	496	20.259 5	2.856 3
	0.05	1 282	20.260 1	2.846 3
全 1 起始	0.25	991	20.270 5	2.822 8
	0.10	6 096	20.261 8	2.822 7
	0.05	19 405	20.283 6	2.804 6

从表 2 中结果看,不同的初值对最终的结果影响较小;随着学习率的下降,迭代次数增加。其总的矩阵改变量相比其他方法显著减小,最大改

变量为 $a_{1,4}$ 。这里以表中条件 1(起始值为原始判断矩阵次对角元素, $\gamma=0.25$)和条件 4(起始值为全 1 矩阵, $\gamma=0.25$)的结果进行分析,其余条件下计算结果与之相似。

第 1 种条件下,对应完全一致矩阵为:

$$B_{4,1} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0.577 & 8 & 4.524 & 0 & 2.151 & 4 \\ 1.730 & 6 & 1.000 & 0 & 7.829 & 3 & 3.723 & 2 \\ 0.221 & 0 & 0.127 & 7 & 1.000 & 0 & 0.475 & 5 \\ 0.464 & 8 & 0.268 & 6 & 2.102 & 8 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

计算得到权重为:

$$w_{4,1} = [0.292 \ 7 \ 0.506 \ 5 \ 0.064 \ 7 \ 0.136 \ 1]^T$$

参数收敛情况如图 3 所示。

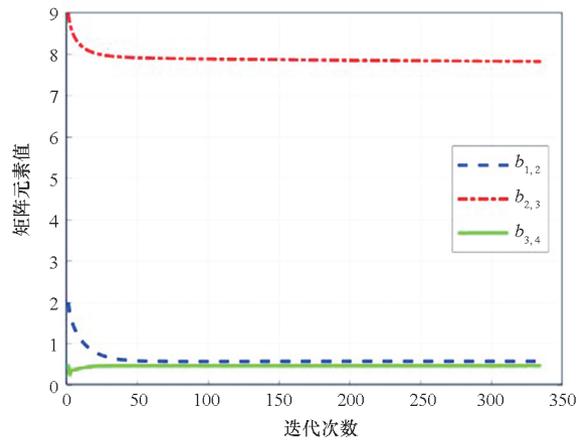


图 3 条件 1 参数收敛情况

Fig.3 Convergence of parameters in case 1

第 4 种条件下,对应完全一致矩阵为:

$$B_{4,2} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0.589 & 1 & 4.516 & 7 & 2.177 & 2 \\ 1.697 & 4 & 1.000 & 0 & 7.666 & 5 & 3.695 & 5 \\ 0.221 & 4 & 0.130 & 4 & 1.000 & 0 & 0.482 & 0 \\ 0.459 & 3 & 0.270 & 6 & 2.074 & 5 & 1.000 & 0 \end{bmatrix}$$

计算得到权重为:

$$w_{4,2} = [0.296 \ 0 \ 0.502 \ 5 \ 0.065 \ 5 \ 0.1360]^T$$

参数收敛情况如图 4 所示。

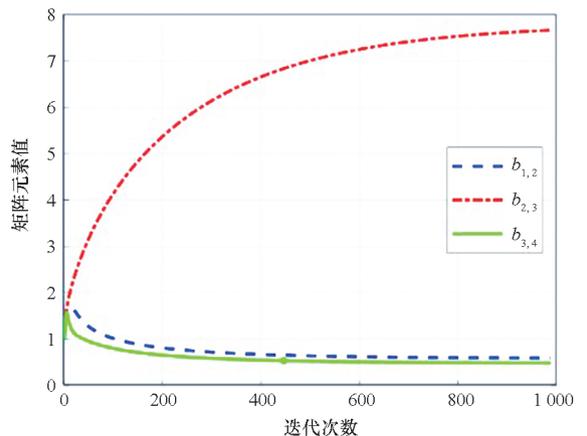


图 4 条件 4 参数收敛情况

Fig.4 Convergence of parameters in case 4

取不同起始值时权重差值为:

$$\delta w = [0.003\ 3 \quad -0.004\ 0 \quad 0.000\ 8 \quad -0.000\ 1]^T$$

可以看出,不同的起始值条件下,随着迭代计算, b 逐渐收敛到最终结果,两种情况下最终得到的权重差异很小。但采用全 1 列向量作为初始值

时,其与收敛结果的差距较大,迭代次数较多。

3.2 算例 2

以参考文献[13]和文献[17]采用的算例进行算法的比较。原始判断矩阵为 A_2 。下面对几种典型方法的计算结果进行比较。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.000\ 0 & 5.000\ 0 & 3.000\ 0 & 7.000\ 0 & 6.000\ 0 & 6.000\ 0 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 \\ 0.200\ 0 & 1.000\ 0 & 0.333\ 3 & 5.000\ 0 & 3.000\ 0 & 3.000\ 0 & 0.200\ 0 & 0.142\ 9 \\ 0.333\ 3 & 3.000\ 0 & 1.000\ 0 & 6.000\ 0 & 3.000\ 0 & 4.000\ 0 & 6.000\ 0 & 0.200\ 0 \\ 0.142\ 9 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 & 1.000\ 0 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 & 0.142\ 9 & 0.125\ 0 \\ 0.166\ 7 & 0.333\ 3 & 0.333\ 3 & 3.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.500\ 0 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 \\ 0.166\ 7 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 & 4.000\ 0 & 2.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 \\ 3.000\ 0 & 5.000\ 0 & 0.166\ 7 & 7.000\ 0 & 5.000\ 0 & 5.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.500\ 0 \\ 4.000\ 0 & 7.000\ 0 & 5.000\ 0 & 8.000\ 0 & 6.000\ 0 & 6.000\ 0 & 2.000\ 0 & 1.000\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.1 基本回路法^[17]

根据文献[17],采用基本回路法对判断矩阵进行修改,得到修改后的矩阵为 C_5 ,该矩阵的 $CR=0.082\ 2$,满足一致性要求,矩阵总的改变量

为 34.642 9,最大改变量为 5.537 4($a_{3,7}$);利用此矩阵,计算得到权重,再得到对应的完全一致矩阵 B_5 ,将其与原始判断矩阵进行比较,总的改变量为 224.428 1,最大改变量为 9.854 7($a_{8,4}$)。

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1.000\ 0 & 5.000\ 0 & 3.000\ 0 & 7.000\ 0 & 6.000\ 0 & 6.000\ 0 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 \\ 0.200\ 0 & 1.000\ 0 & 0.333\ 3 & 5.000\ 0 & 3.000\ 0 & 3.000\ 0 & 0.200\ 0 & 0.142\ 9 \\ 0.333\ 3 & 3.000\ 0 & 1.000\ 0 & 6.000\ 0 & 3.000\ 0 & 4.000\ 0 & 0.462\ 6 & 0.200\ 0 \\ 0.142\ 9 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 & 1.000\ 0 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 & 0.142\ 9 & 0.125\ 0 \\ 0.166\ 7 & 0.333\ 3 & 0.333\ 3 & 3.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.500\ 0 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 \\ 0.166\ 7 & 0.333\ 3 & 0.250\ 0 & 4.000\ 0 & 2.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.200\ 0 & 0.166\ 7 \\ 3.000\ 0 & 5.000\ 0 & 2.161\ 7 & 7.000\ 0 & 5.000\ 0 & 5.000\ 0 & 1.000\ 0 & 0.500\ 0 \\ 4.000\ 0 & 7.000\ 0 & 5.000\ 0 & 8.000\ 0 & 6.000\ 0 & 6.000\ 0 & 2.000\ 0 & 1.000\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1.000\ 0 & 2.812\ 8 & 1.706\ 8 & 9.035\ 4 & 5.155\ 8 & 4.230\ 0 & 0.784\ 4 & 0.506\ 1 \\ 0.355\ 5 & 1.000\ 0 & 0.606\ 8 & 3.212\ 3 & 1.833\ 0 & 1.503\ 9 & 0.278\ 9 & 0.179\ 9 \\ 0.585\ 9 & 1.648\ 0 & 1.000\ 0 & 5.293\ 7 & 3.020\ 7 & 2.478\ 3 & 0.459\ 5 & 0.296\ 5 \\ 0.110\ 7 & 0.311\ 3 & 0.188\ 9 & 1.000\ 0 & 0.570\ 6 & 0.468\ 2 & 0.086\ 8 & 0.056\ 0 \\ 0.194\ 0 & 0.545\ 6 & 0.331\ 1 & 1.752\ 5 & 1.000\ 0 & 0.820\ 4 & 0.152\ 1 & 0.098\ 2 \\ 0.236\ 4 & 0.665\ 0 & 0.403\ 5 & 2.136\ 0 & 1.218\ 8 & 1.000\ 0 & 0.185\ 4 & 0.119\ 6 \\ 1.274\ 9 & 3.586\ 1 & 2.176\ 1 & 11.519\ 5 & 6.573\ 3 & 5.393\ 0 & 1.000\ 0 & 0.645\ 2 \\ 1.976\ 1 & 5.558\ 3 & 3.372\ 8 & 17.854\ 7 & 10.188\ 2 & 8.358\ 9 & 1.550\ 0 & 1.000\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.2 边界优化法^[13]

采用边界优化法进行修改后的矩阵为 C_6 ,此时,矩阵的 $CR=0.099\ 8$,满足一致性要求,总的改变量为 13.103 8,最大改变量为 0.718 6($a_{8,2}$);虽然矩阵的改变量很小,但此时的 CR 是相对较大的,说明此矩阵存在较大的不一致性,

即判断存在一定的矛盾,以此得出的权重可靠性不高。此外还可以看出,调整后 $a_{3,7}$ 逻辑不一致并未改善。以此矩阵计算权重,得到其对应的等效完全一致矩阵 B_6 ,相对于原始判断矩阵,总的改变量为 242.358 5,最大改变量为 10.228 7($a_{8,4}$)。

$$C_6 = \begin{bmatrix} 1.000 0 & 4.282 0 & 2.282 0 & 7.718 0 & 5.282 0 & 5.282 0 & 0.438 2 & 0.304 7 \\ 0.233 5 & 1.000 0 & 0.336 4 & 4.282 0 & 2.282 0 & 2.282 0 & 0.233 5 & 0.159 2 \\ 0.438 2 & 2.972 7 & 1.000 0 & 6.718 0 & 3.718 0 & 4.328 0 & 5.282 0 & 0.233 5 \\ 0.129 6 & 0.233 5 & 0.148 9 & 1.000 0 & 0.438 2 & 0.304 7 & 0.148 3 & 0.114 7 \\ 0.189 3 & 0.438 2 & 0.269 0 & 2.282 1 & 1.000 0 & 0.780 0 & 0.233 5 & 0.148 9 \\ 0.189 3 & 0.438 2 & 0.231 1 & 3.281 9 & 1.282 1 & 1.000 0 & 0.233 5 & 0.148 9 \\ 2.282 1 & 4.282 7 & 0.189 3 & 6.743 1 & 4.282 7 & 4.282 7 & 1.000 0 & 0.380 2 \\ 3.281 9 & 6.281 4 & 4.282 7 & 8.718 4 & 6.715 9 & 6.715 9 & 2.630 2 & 1.000 0 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 1.000 0 & 3.119 8 & 0.887 2 & 8.981 5 & 5.099 8 & 4.648 1 & 1.116 8 & 0.492 7 \\ 0.320 5 & 1.000 0 & 0.284 4 & 2.878 9 & 1.634 7 & 1.489 9 & 0.358 0 & 0.157 9 \\ 1.127 2 & 3.516 6 & 1.000 0 & 10.123 7 & 5.748 4 & 5.239 3 & 1.258 8 & 0.555 4 \\ 0.111 3 & 0.347 4 & 0.098 8 & 1.000 0 & 0.567 8 & 0.517 5 & 0.124 3 & 0.054 9 \\ 0.196 1 & 0.611 8 & 0.174 0 & 1.761 1 & 1.000 0 & 0.911 4 & 0.219 0 & 0.096 6 \\ 0.215 1 & 0.671 2 & 0.190 9 & 1.932 3 & 1.097 2 & 1.000 0 & 0.240 3 & 0.106 0 \\ 0.895 4 & 2.793 6 & 0.794 4 & 8.042 3 & 4.566 5 & 4.162 1 & 1.000 0 & 0.441 2 \\ 2.029 6 & 6.331 9 & 1.800 6 & 18.228 7 & 10.350 5 & 9.433 8 & 2.266 6 & 1.000 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3 本文方法

本文计算了不同参数条件下本文方法的计算结果,得到对应的迭代次数、矩阵改变量以及完全一致矩阵。其中设小常数 δ 为 10^{-7} , 循环停止条件 ε 为 10^{-5} 。结果如表 3 所示。

不同条件下计算结果近似,仅迭代次数随学习率的减小而增加,这里取条件 1(起始值为原始判断矩阵次对角元素, $\gamma = 0.100$) 和条件 4(起始值为全 1 矩阵, $\gamma = 0.100$) 的结果进行分析,其余条件下的结果不再赘述。

条件 1 下,计算得到的完全一致矩阵如下 $B_{7,1}$ 所示;条件 4 下,计算得到的完全一致矩阵如下 $B_{7,2}$ 所示。

表 3 算例 2 本文方法计算结果

Tab. 3 Calculation results of the example 2 by the proposed method

起始值	学习率 γ	结果		
		迭代次数	矩阵改变量	最大改变量
原始判断	0.100	5 709	92.117 4	5.263 5
矩阵次对	0.050	10 632	92.130 1	5.262 7
角元素	0.025	22 104	92.163 8	5.260 7
	0.100	3 926	92.111 7	5.269 8
全 1 起始	0.050	12 034	92.126 5	5.276 5
	0.025	36 612	92.181 4	5.288 5

$$B_{7,1} = \begin{bmatrix} 1.000 0 & 4.703 1 & 1.474 1 & 7.599 2 & 5.375 0 & 5.259 2 & 1.085 8 & 0.819 4 \\ 0.212 6 & 1.000 0 & 0.313 4 & 1.615 8 & 1.142 9 & 1.118 2 & 0.230 9 & 0.174 2 \\ 0.678 4 & 3.190 4 & 1.000 0 & 5.155 0 & 3.646 2 & 3.567 6 & 0.736 5 & 0.555 9 \\ 0.131 6 & 0.618 9 & 0.194 0 & 1.000 0 & 0.707 3 & 0.692 1 & 0.142 9 & 0.107 8 \\ 0.186 0 & 0.875 0 & 0.274 3 & 1.413 8 & 1.000 0 & 0.978 4 & 0.202 0 & 0.152 5 \\ 0.190 1 & 0.894 3 & 0.280 3 & 1.444 9 & 1.022 0 & 1.000 0 & 0.206 4 & 0.155 8 \\ 0.921 0 & 4.331 7 & 1.357 7 & 6.999 1 & 4.950 5 & 4.843 8 & 1.000 0 & 0.754 7 \\ 1.220 3 & 5.739 3 & 1.798 9 & 9.273 6 & 6.559 3 & 6.417 9 & 1.325 0 & 1.000 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{7,2} = \begin{bmatrix} 1.000 0 & 4.712 2 & 1.488 1 & 7.601 2 & 5.344 6 & 5.301 8 & 1.086 6 & 0.820 6 \\ 0.212 2 & 1.000 0 & 0.315 8 & 1.613 1 & 1.134 2 & 1.125 1 & 0.230 6 & 0.174 1 \\ 0.672 0 & 3.166 5 & 1.000 0 & 5.107 9 & 3.591 5 & 3.562 7 & 0.730 2 & 0.551 4 \\ 0.131 6 & 0.619 9 & 0.195 8 & 1.000 0 & 0.703 1 & 0.697 5 & 0.143 0 & 0.108 0 \\ 0.187 1 & 0.881 7 & 0.278 4 & 1.422 2 & 1.000 0 & 0.992 0 & 0.203 3 & 0.153 5 \\ 0.188 6 & 0.888 8 & 0.280 7 & 1.433 7 & 1.008 1 & 1.000 0 & 0.204 9 & 0.154 8 \\ 0.920 3 & 4.336 6 & 1.369 5 & 6.995 4 & 4.918 6 & 4.879 3 & 1.000 0 & 0.755 2 \\ 1.218 7 & 5.742 5 & 1.813 5 & 9.263 3 & 6.513 3 & 6.461 2 & 1.324 2 & 1.000 0 \end{bmatrix}$$

可以看出,选择不同的迭代初值,对最终收敛结果影响较小,以等效完全一致矩阵的改变量为衡量标准,用本文方法计算得到的矩阵总的改变量约为 92,最大改变量约为 5.3,远小于基本回路法和边界优化法的结果,可见本文方法更能保留原矩阵的信息。

4 结论

本方法通过权重构建一个完全一致矩阵,将其与初始判断矩阵进行拟合,采用梯度下降法求得矩阵调整量最小的完全一致矩阵,最大程度保留了原始判断矩阵信息。该方法在限定最终得到的矩阵为完全一致矩阵的条件下进行,得到的结果同时满足逻辑一致性和数值一致性。而且在计算过程中,不需要反复检验判断矩阵是否满足一致性要求,计算更为便捷。

参考文献 (References)

- [1] SAATY T L. The analytic hierarchy process: planning, setting priorities, resource allocation [M]. New York: McGraw-Hill International Book Co., 1980.
- [2] 申佳美,王拥兵. 层次分析法在智慧农业信息化技术的应用[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2019, 35(4): 436-438, 457.
SHEN J M, WANG Y B. Application of analytic hierarchy process in intelligent agricultural information technology[J]. Journal of Harbin University of Commerce (Natural Sciences Edition), 2019, 35(4): 436-438, 457. (in Chinese)
- [3] SRDJEVIC B. Linking analytic hierarchy process and social choice methods to support group decision-making in water management[J]. Decision Support Systems, 2007, 42(4): 2261-2273.
- [4] AHMAD S, TAHAR R M. Selection of renewable energy sources for sustainable development of electricity generation system using analytic hierarchy process: a case of Malaysia[J]. Renewable Energy, 2014, 63: 458-466.
- [5] 刘帅,王瑞,张宏江,等. 装甲装备在沙漠环境下的适用性评估技术[J]. 火力与指挥控制, 2021, 46(10): 164-169, 176.
LIU S, WANG R, ZHANG H J, et al. Study on applicability evaluation technology of armored equipment in desert environment[J]. Fire Control & Command Control, 2021, 46(10): 164-169, 176. (in Chinese)
- [6] 赵倩,邓咏梅. 基于层次分析法的三维人体扫描仪的选择[J]. 纺织学报, 2021, 42(4): 155-161.
ZHAO Q, DENG Y M. Selection of three-dimensional body scanner based on analytic hierarchy process[J]. Journal of Textile Research, 2021, 42(4): 155-161. (in Chinese)
- [7] 路永鑫,魏云冰,赵启承,等. 基于层次分析法和改进 A* 算法的电力应急机器人路径规划[J]. 电力系统保护与控制, 2021, 49(9): 82-89.
LU Y X, WEI Y B, ZHAO Q C, et al. Path planning of a power emergency robot based on an analytic hierarchy process and improved A* algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2021, 49(9): 82-89. (in Chinese)
- [8] GOVINDAN K, KALIYAN M, KANNAN D, et al. Barriers analysis for green supply chain management implementation in Indian industries using analytic hierarchy process [J]. International Journal of Production Economics, 2014, 147: 555-568.
- [9] TSENG T Y, LIN S W, HUANG C L, et al. Inconsistency adjustment in the AHP using the complete transitivity convergence algorithm[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2006.
- [10] PONIS S T, GAYIALIS S P, TATSIPOULOS I P, et al. An application of AHP in the development process of a supply chain reference model focusing on demand variability [J]. Operational Research, 2015, 15(3): 337-357.
- [11] 吴诗辉,刘晓东,贾月岭,等. 一种调整 AHP 不一致判断矩阵的优化方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(11): 2106-2112.
WU S H, LIU X D, JIA Y L, et al. Optimization method to improve inconsistent comparison matrix in analytic hierarchy process[J]. Control and Decision, 2016, 31(11): 2106-2112. (in Chinese)
- [12] XU Z S, WEI C P. A consistency improving method in the analytic hierarchy process [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 116(2): 443-449.
- [13] WU S H, XIE J, LIU X D, et al. Marginal optimization method to improve the inconsistent comparison matrix in the analytic hierarchy process[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2017, 28(6): 1141-1151.
- [14] 叶跃祥,糜仲春,王宏宇,等. AHP 判断矩阵一致性调整的前瞻算法[J]. 系统工程, 2006, 24(10): 117-121.
YE Y X, MI Z C, WANG H Y, et al. A foresight method of consistency regulation for AHP judgment matrix[J]. Systems Engineering, 2006, 24(10): 117-121. (in Chinese)
- [15] 李伟,张明生,陈德强. 基于 AHP 判断矩阵一致性调整的一种新方法[J]. 海南热带海洋学院学报, 2019, 26(2): 67-72.
LI W, ZHANG M S, CHEN D Q. A new method for consistency adjustment based on AHP judgment matrix[J]. Journal of Hainan Tropical Ocean University, 2019, 26(2): 67-72. (in Chinese)
- [16] 江正华. AHP 中正互反判断矩阵一致性调整的新方法[J]. 南京大学学报(数学半年刊), 2013, 30(2): 224-237.
JIANG Z H. A new consistency regulating method of judgment matrix in AHP[J]. Journal of Nanjing University (Mathematical Biquarterly), 2013, 30(2): 224-237. (in Chinese)
- [17] 解江,吴诗辉. 基于基本回路修正的 AHP 一致性调整方法研究[J]. 运筹与管理, 2020, 29(4): 147-157.
XIE J, WU S H. Research on consistency modification method for AHP decision making based on basic loops analysis[J]. Operations Research and Management Science, 2020, 29(4): 147-157. (in Chinese)
- [18] 朱建军. 层次分析法的若干问题研究及应用[D]. 沈阳: 东北大学, 2005.
ZHU J J. Research on some problems of the analytic hierarchy process and its application [D]. Shenyang: Northeastern University, 2005. (in Chinese)
- [19] DUCHI J C, HAZAN E, SINGER Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization [J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12: 2121-2159.
- [20] 郭竹梅. AHP 中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2010, 26(6): 84-86.
GUO Z M. A new method for improving the consistency of the judgement matrix in AHP[J]. Journal of Qiqihar University (Natural Science Edition), 2010, 26(6): 84-86. (in Chinese)