

采用重组模板的权重优化 WENO-Z 格式

柴得林¹, 王强^{1,2}, 易贤^{1,2*}, 刘宇¹

(1. 中国空气动力研究与发展中心 结冰与防除冰重点实验室, 四川 绵阳 621000;

2. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000)

摘要:针对精确模拟含激波等复杂流动结构的流场对高精度格式的低耗散低色散要求,基于5阶有限差分 WENO-Z 格式,提出一种模板重组技术。在计算 WENO 非线性权时,引入一个由3点模板重新组合的4点模板,优化原格式中各模板的权重分配,进而提出了两种改进 WENO-Z 格式。采用近似色散关系分析方法对改进前后格式色散与耗散特性进行了对比与分析。分析表明:两种改进格式耗散有不同程度的降低。数值实验表明:改进格式具有更优越的激波捕捉性能,对小尺度流场结构具有更高的分辨率。

关键词:模板重组;权重;WENO 格式

中图分类号:V211; O241 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2024)01-187-11

听
语
音
聊
科
研
与
作
者
互
动

Weight-optimized WENO-Z schemes with reorganized stencil

CHAI Delin¹, WANG Qiang^{1,2}, YI Xian^{1,2*}, LIU Yu¹

(1. Key Laboratory of Icing and Anti/De-Icing, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China;

2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract: For developing high-order scheme with low dissipation and low dispersion to accurately simulate the flow field with complex structures such as shock wave, a method of stencil reorganization was proposed based on the fifth-order finite difference WENO-Z scheme. A four-point central stencil recombined by three-point stencils is introduced in the calculation of WENO nonlinear weight in order to optimize the weight allocation of each template in the original format, and two improved WENO-Z schemes were proposed. The dispersion and dissipation properties of the schemes were compared and analyzed via the approximate dispersion relation analysis, which shows that the dissipation of the two improved schemes decreases at different extent. The numerical experiments show that the improved schemes have better shock capture property and higher resolution for small-scale flow structures.

Keywords: stencil reorganization; weight; WENO scheme

随着电子计算机技术的飞速发展,计算流体力学在流体力学领域的理论与工程应用中起到越来越大的作用。作为计算流体力学的基础之一,离散格式的性能对流场数值模拟具有重要影响。特别地,加权本质无振荡(weighted essentially non-oscillatory, WENO)格式的提出极大地推进了含激波等复杂流动结构的流场的精确数值模拟。

Liu 等^[1]在本质无振荡(essentially non-oscillatory, ENO)^[2-3]格式的基础上创造性地提出了 WENO 格式,采用子模板上的低阶格式的非线性凸组合使得格式兼具高精度与本质无振荡特性,并设计了有限体积形式的3阶、4阶精度

WENO 格式。Jiang 等^[4]对 WENO 格式进行理论分析,将 WENO 格式拓展至有限差分形式,系统地设计了任意阶有限差分形式格式的光滑因子与非线性权计算方法,他们提出的5阶 WENO 格式成为最经典的 WENO 格式之一,一般记为 WENO-JS 格式。

尽管 WENO-JS 格式具有优越的激波捕捉性能,但仍存在耗散过大,极值点处精度降阶等不足。围绕 WENO-JS 格式,学者们开展了大量的性能优化研究。在非线性权计算方面,Henrick 等^[5]指出5阶 WENO-JS 格式在求解双曲守恒律时并未完全满足5阶精度,在极值点附近发生降阶。为此,他们在非线性权的计算中引入了一个非线

收稿日期:2021-10-10

基金项目:国家科技重大专项资助项目(J2019-III-0010-0054);国家自然科学基金资助项目(12172372)

第一作者:柴得林(1991—),男,山西临汾人,工程师,博士,E-mail:chaidelin@cardc.cn

*通信作者:易贤(1977—),男,四川金堂人,研究员,博士,博士生导师,E-mail:yixian@cardc.cn

性权映射函数,设计了一种完全满足 5 阶精度的改进 WENO 格式,记为 WENO-M 格式。根据 WENO-M 格式的思想,多种新型映射函数被提出并应用于 WENO 格式的优化^[6-8]。Borges 等^[9]从增大间断子模板的权重分配的角度开展研究,指出增大非线性加权时间断子模板的权重,可降低格式耗散,优化格式性能;在这一理论上,他们设计了一个高阶光滑因子,构造了新的非线性权,提出了耗散更低、分辨率更高的 5 阶 WENO-Z 格式。

在 WENO-Z 格式的基础上,Liu 等^[10]改进了 5 阶 WENO-Z 格式的高阶光滑因子及其在非线性的应用,使得格式既满足 5 阶精度充分条件,又具有较低耗散。Castro 等^[11]给出了高阶光滑因子的通用公式,将 WENO-Z 格式拓展至任意奇数阶。Acker 等^[12]在 WENO-Z 格式的非线性权公式中增加了光滑因子比值相关项,提出 WENO-Z+ 格式,进一步提高了格式中间断子模板的权重,改善了格式对高频波的分辨率,并指出在通常的应用中,间断子模板上的权重对 WENO 格式实际计算性能的影响起主要因素。文献[13-16]均引入光滑因子比值优化了格式权重,文献[17-20]对光滑因子进行了重新设计与构造。徐维铮等^[21]则对 3 阶 WENO-Z 格式的光滑因子进行了多种设计与系统研究,研究表明格式在连续解非极值点处的理论精度对实际计算性能起决定性的作用,极值点处的精度影响则较小。上述研究表明改进非线性权计算方法可有效实现 WENO-Z 格式耗散降低,性能提升。

与上述仅改进非线性权计算方法的研究不同,模板优化是 WENO 格式改进的另一重要方法。Martín 等^[22]和 HU 等^[23]通过在 WENO 构造模板中引入下迎风模板,优化权重,分别提出了 WENO-SYMO 和 WENO-CU6 格式;Zhu 等^[24]则创造性地设计了一个 5 点模板和两个 2 点模板加权得到的 5 阶有限差分 WENO 格式,该格式对线性权的选择更为灵活,实现更为简单。这些研究在优化模板的基础上,对非线性权计算方法,包括线性权的选取、光滑因子的计算等,进行了一定改进,最终实现了格式性能的提升。

尽管上述研究已经实现了 WENO 格式性能的大幅改善,模板优化方法也往往伴随着非线性权计算方法的重新设计,但鲜有研究对非线性权计算方法改进与模板优化之间的关系进行研究,鲜有研究提出可以转化为改进非线性权计算方法的模板优化方法。

本文以 5 阶 WENO-Z 格式为研究对象,借鉴文献[22-24]的优化模板思路,在 WENO-Z 格式构造中引入一个由 3 点模板重新组合形成的 4 点模板,取其上重构格式为对应 3 点模板格式的线性组合,通过这种模板重组方法实现了格式的非线性权调节与性能提升;同时借助子模板的线性组合特性将所提模板优化方法等效转化为格式的改进非线性权计算方法;采用一系列基准问题对改进格式性能提升进行数值验证。

1 WENO-Z 格式

以一维双曲守恒律为研究对象

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

式中, u 为守恒变量, $f=f(u)$ 为通量函数。将计算区域 $[a, b]$ 划分为 N 个等间距网格,各网格单元长度为 $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$,且 $a = x_{1/2}$, $b = x_{N+1/2}$,网格中心 $x_i = \frac{1}{2}(x_{i+1/2} + x_{i-1/2})$,网格单元 $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 。在上述网格上进行空间离散,可得式(1)的半离散形式

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{h(x_{i+1/2}) - h(x_{i-1/2})}{\Delta x} \quad (2)$$

式中, $h(x)$ 为数值通量函数,其隐式定义为

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi \quad (3)$$

根据式(3),则可在给定模板 $S_i = \{I_{i-r}, I_{i-r+1}, \dots, I_i, \dots, I_{i+s}\}$ 上得到 $h(x)$ 的唯一的 $r+s$ 次多项式逼近函数 $\hat{f}(x)$,该函数满足

$$\hat{f}(x) = h(x) + O(\Delta x^{r+s+1}) \quad (4)$$

记 $\hat{f}(x)$ 在 $x_{i+1/2}$ 处的值为 $\hat{f}_{i+1/2}$,则 $\hat{f}_{i+1/2}$ 即为数值通量对应的线性格式。

5 阶 WENO-JS 格式或 WENO-Z 格式的重构模板如图 1 所示。

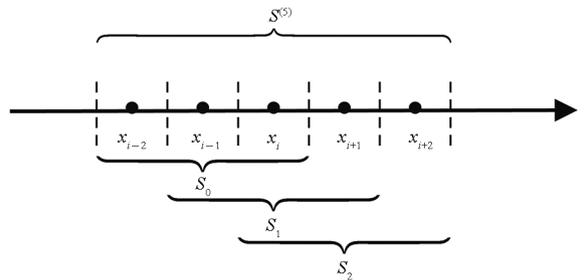


图 1 5 阶 WENO-JS/WENO-Z 格式重构模板

Fig. 1 Reconstruction stencils of fifth-order WENO-JS/WENO-Z

$S^{(5)} = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ 为构造大模板,可划分为 3 个互有重叠的 3 点子模板,即 $S_0 =$

$\{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}$ 、 $S_1 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ 和 $S_2 = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ 。在各子模板上计算数值通量对应的线性格式,可得

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+1/2}^0 = \frac{1}{6}(2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i) \\ \hat{f}_{i+1/2}^1 = \frac{1}{6}(-f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1}) \\ \hat{f}_{i+1/2}^2 = \frac{1}{6}(2f_i + 5f_{i+1} - f_{i+2}) \end{cases} \quad (5)$$

而大模板上数值通量对应的 5 阶线性格式为

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2}^{\text{linear}} &= \frac{1}{60}(2f_{i-2} - 13f_{i-1} + 47f_i + 27f_{i+1} - 3f_{i+2}) \\ &= \sum_{m=0}^2 d_m \hat{f}_{i+1/2}^m \end{aligned} \quad (6)$$

式中: d_m 为线性权重, $d_0 = 0.1, d_1 = 0.6, d_2 = 0.3$; $m = 0, 1, 2$ 。引入与其相对应的非线性权 ω_m , 则可得 WENO 格式的一般形式

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{m=0}^2 \omega_m \hat{f}_{i+1/2}^m \quad m = 0, 1, 2 \quad (7)$$

5 阶 WENO-JS 格式的非线性权计算公式为

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{\alpha_m}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l} \\ \alpha_m = \frac{d_m}{(\beta_m + \varepsilon)^2} \end{cases} \quad (8)$$

式中, β_m 为光滑因子,表征相应模板上变量的光滑程度, ε 为一正数小量,防止分母为 0。文献[4]给出的 k 阶 WENO 格式的光滑因子 β_m 通用计算公式为

$$\beta_m = \sum_{l=1}^{k-1} \Delta x_i^{2l-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d^l}{dx^l} \hat{f}_i^m(x) \right)^2 dx \quad (9)$$

对于 5 阶 WENO-JS 格式各光滑因子为

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \\ \beta_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 \\ \beta_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2 \end{cases} \quad (10)$$

而 ε 则取经验值 10^{-6} 。

5 阶 WENO-Z 格式的非线性权计算公式为

$$\begin{cases} \omega_m^Z = \frac{\alpha_m^Z}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z} \\ \alpha_m^Z = d_m \left[1 + \left(\frac{\tau_5}{\beta_m + \varepsilon^Z} \right)^p \right] \end{cases} \quad (11)$$

式中: β_m 为式(10)所示的 WENO-JS 光滑因子; $\tau_5 = |\beta_0 - \beta_2|$ 为高阶光滑因子; p 为度量光滑因子

对非线性权的影响的指数,一般取 1; ε^Z 为一正数小量,防止分母为 0。参考文献[9],本文 ε^Z 取一极小量 10^{-40} 使其仅起到防止分母为 0 的作用。较之 WENO-JS 格式,WENO-Z 格式增大了间断模板的非线性权,降低了格式耗散,提高了格式分辨率。

2 重组模板 WENO-Z 格式

2.1 模板重组

图 1 中 WENO-Z 格式计算 $x_{i+1/2}$ 处的值时所用整体模板是上迎风的,为了降低格式耗散,应使得模板更接近中心模板,因而本文在 WENO 格式的构造中引入中心模板 $S_3 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$, 如图 2 所示。则改进格式含有 4 个子模板,记改进格式为 WENO-ZF, F 为单纯记号,则新模板组合下,对应加权公式为

$$\hat{f}_{i+1/2}^{\text{ZF}} = \sum_{m=0}^3 \omega_m^{\text{ZF}} \hat{f}_{i+1/2}^m \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (12)$$

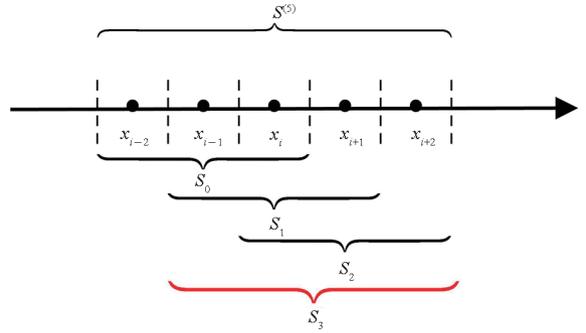


图 2 5 阶 WENO-ZF 格式重构模板

Fig. 2 Reconstruction stencils of fifth-order WENO-ZF

2.2 线性权 d_m^{ZF} 与子模板 S_3 参数计算

由图 2 可知子模板 S_3 为 S_1, S_2 的组合,假设 S_3 上线性格式为 S_1, S_2 对应线性格式的线性组合,即

$$\hat{f}_{i+1/2}^3 = \alpha \hat{f}_{i+1/2}^1 + (1 - \alpha) \hat{f}_{i+1/2}^2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (13)$$

由 WENO-Z 格式的非线性权计算式(11) 易知,WENO-Z 格式中 S_0, S_1, S_2 三个子模板上非线性权的差异受各模板线性权和光滑因子两个因素影响。假设在 WENO-ZF 格式中子模板 S_0, S_1, S_2 上线性权完全相同,即 $d_0^{\text{ZF}} = d_1^{\text{ZF}} = d_2^{\text{ZF}}$,这使得其非线性权完全表示原格式中模板光滑因子的差异对非线性权的影响;而 4 点子模板 S_3 的非线性权则主要表示原格式中子模板上线性权的不同对非线性权的影响。此外,为了计算稳定,改进格式应为各子模板对应格式的凸组合,即各线性权应为

非负数。综上根据改进前后子模板的线性权对应关系,易得

$$\begin{cases} d_0^{ZF} = d_1^{ZF} = d_2^{ZF} = 0.1 \\ d_3^{ZF} = 0.7 \end{cases} \quad (14)$$

同时有

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2}^3 &= \frac{5}{7}\hat{f}_{i+1/2}^1 + \frac{2}{7}\hat{f}_{i+1/2}^2 \\ &= \frac{1}{42}(-5f_i + 29f_{i+1} + 20f_{i+1} - 2f_{i+2}) \end{aligned} \quad (15)$$

由数值通量线性格式精度式(4)得

$$\hat{f}_{i+1/2}^m = h_{i+1/2} + O(\Delta x^3) \quad m = 0, 1, 2 \quad (16)$$

将式(16)代入 $\hat{f}_{i+1/2}^3$ 的定义式,即式(13)或式(15),可得

$$\hat{f}_{i+1/2}^3 = h_{i+1/2} + O(\Delta x^3) \quad (17)$$

即 $\hat{f}_{i+1/2}^3$ 为一个 3 阶格式。需说明的是,调整模板 S_3 上通量格式的线性组合式(13)中的系数 α ,可使得通量格式最高达到 4 阶,形成 4 阶中心格式。为了一定程度上分离子模板上线性权和光滑因子对非线性权的影响,基于 WENO-ZF 格式中子模板 S_0, S_1, S_2 上线性权 $d_0^{ZF} = d_1^{ZF} = d_2^{ZF}$ 的假设,本文取 $\alpha = 5/7$ 得到 3 阶精度通量格式,如式(15)所示。

在单元 $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 上采用与式(15)相同的线性组合,则有

$$\begin{aligned} \hat{f}^3(x) &= \frac{5}{7}\hat{f}^1(x) + \frac{2}{7}\hat{f}^2(x) \\ &= \frac{-5f_{i-1} + 176f_i - f_{i+1} - 2f_{i+2}}{168} + \\ &\quad \frac{-5f_{i-1} - 6f_i + 13f_{i+1} - 2f_{i+2}}{14\Delta x}x + \\ &\quad \frac{5f_{i-1} - 8f_i + f_{i+1} + 2f_{i+2}}{14\Delta x^2}x^2 \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)代入光滑因子的定义式(9)可得 S_3 上光滑因子计算式为

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{13}{3} \left(\frac{5f_{i-1} - 8f_i + f_{i+1} + 2f_{i+2}}{14} \right)^2 + \\ &\quad \left(\frac{-5f_{i-1} - 6f_i + 13f_{i+1} - 2f_{i+2}}{14} \right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

2.3 非线性加权与简化

参考 WENO-Z 格式的加权方法,仍将 WENO-ZF 格式的非线性权取为

$$\begin{cases} \omega_m^{ZF} = \frac{\alpha_m^{ZF}}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZF}} \\ \alpha_m^{ZF} = d_m^{ZF} \left[1 + \left(\frac{\tau_5}{\beta_m + \varepsilon^{ZF}} \right)^p \right] \end{cases} \quad (20)$$

其中: $m = 0, 1, 2, 3$;参考文献[9],取 $\tau_5 = |\beta_0 - \beta_2|, p = 1, \varepsilon^{ZF} = 10^{-40}$ 。

子模板线性格式计算式(5)和式(15)、WENO 加权计算式(12)、子模板光滑因子计算式(10)和式(19)和非线性权计算式(20)组成 5 阶 WENO-ZF 格式的整个计算过程。显然,当式(12)中非线性权 ω_m^{ZF} 取为线性权 d_m^{ZF} 时,WENO-ZF 格式变为 5 阶线性格式,具有 5 阶精度。

对比 WENO-ZF 格式与 WENO-Z 格式计算过程,前者引入更多计算环节,尤其是权重 β_3 的计算。为了保证格式效率,下面对 WENO-ZF 格式做一定的简化。因 $\hat{f}_{i+1/2}^3$ 为 $\hat{f}_{i+1/2}^1, \hat{f}_{i+1/2}^2$ 的线性组合,则 WENO-ZF 经过化简仍可表示为 3 个子模板 S_0, S_1, S_2 上加权所得函数,化简过程省略, WENO-ZF 格式等效计算公式为

$$\begin{cases} \alpha_0^{ZF1} = d_0 \left(1 + \frac{\tau_5}{\beta_0 + \varepsilon^{ZF}} \right) \\ \alpha_1^{ZF1} = d_1 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_5}{\beta_1 + \varepsilon^{ZF}} + \frac{5}{6} \frac{\tau_5}{\beta_3 + \varepsilon^{ZF}} \right) \\ \alpha_2^{ZF1} = d_2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\tau_5}{\beta_2 + \varepsilon^{ZF}} + \frac{2}{3} \frac{\tau_5}{\beta_3 + \varepsilon^{ZF}} \right) \\ \omega_m^{ZF1} = \frac{\alpha_m^{ZF1}}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZF1}} \\ \hat{f}_{i+1/2}^{ZF1} = \sum_{m=0}^2 \omega_m^{ZF1} \hat{f}_{i+1/2}^m \quad m = 0, 1, 2 \end{cases} \quad (21)$$

式(21)中, $\tau_5, \beta_m, \varepsilon^{ZF}$ 与 WENO-ZF 格式中式(20)中的定义及取值相同。对比式(20)和式(21)可知,重组模板的模板优化方案最终等效为非线性权计算方法的优化。为减少计算量,后续数值实验中采用式(21)进行 WENO-ZF 格式的计算。

接下来尝试对 β_3 进行简化计算, S_1, S_2 上逼近多项式函数 $\hat{f}^1(x), \hat{f}^2(x)$ 可表示为

$$\begin{cases} \hat{f}^1(x) = b_{10} + b_{11}x + b_{12}x^2 \\ \hat{f}^2(x) = b_{20} + b_{21}x + b_{22}x^2 \end{cases} \quad (22)$$

将其代入式(18)得

$$\begin{aligned} \hat{f}^3(x) &= \left(\frac{5}{7}b_{10} + \frac{2}{7}b_{20} \right) + \left(\frac{5}{7}b_{11} + \frac{2}{7}b_{21} \right)x + \\ &\quad \left(\frac{5}{7}b_{12} + \frac{2}{7}b_{22} \right)x^2 \end{aligned} \quad (23)$$

将式(22)、式(23)代入光滑因子的定义式(9),可得

$$\begin{aligned}
 \beta_3 &= \left(\frac{5}{7}b_{11} + \frac{2}{7}b_{21} \right)^2 \Delta x^2 + \frac{13}{3} \left(\frac{5}{7}b_{12} + \frac{2}{7}b_{22} \right)^2 \Delta x^4 \\
 &= \frac{5}{7} \left(b_{11}^2 \Delta x^2 + \frac{13}{3} b_{12}^2 \Delta x^4 \right) - \frac{10}{49} (b_{11} - b_{21})^2 \Delta x^2 + \\
 &\quad \frac{2}{7} \left(b_{21}^2 \Delta x^2 + \frac{13}{3} b_{22}^2 \Delta x^4 \right) - \frac{130}{147} (b_{12} - b_{22})^2 \Delta x^4 \\
 &= \frac{5}{7} \beta_1 + \frac{2}{7} \beta_2 + k_1 f^{m^2} \Delta x^6 + k_2 f^{m^2} \Delta x^6 + O(\Delta x^7) \\
 &= \frac{5}{7} \beta_1 + \frac{2}{7} \beta_2 + O(\Delta x^6) \tag{24}
 \end{aligned}$$

因而,计算非线性项时可取

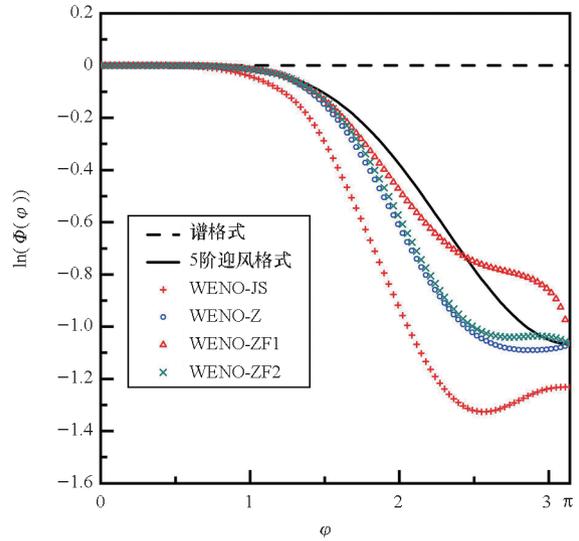
$$\beta_3 = \frac{5}{7} \beta_1 + \frac{2}{7} \beta_2 \tag{25}$$

这样可以减少计算量。为便于表示,下文中式(19)和式(25)计算 β_3 的改进格式分别记为 WENO-ZF1、WENO-ZF2。

2.4 近似色散关系分析

近似色散关系 (approximate dispersion relation, ADR) 分析方法^[25]可有效分析非线性格式的谱特性,即色散耗散特性,广泛应用于非线性格式的设计与优化。采用该方法计算所得 WENO-ZF1、WENO-ZF2 格式的色散耗散特性如图 3 所示。图中 $\Phi(\varphi)$ 为波数 φ 对应的修正波数,其实部和虚部分别反映格式的色散与耗散。

比较图 3 中各格式色散与耗散特性:低频波范围内,所有格式均有理想的色散耗散;中高频波范围内,WENO-ZF1 与 WENO-ZF2 格式的色散与耗散均小于 WENO-Z 格式,而 WENO-JS 格式的色散和耗散则明显大于这三种格式,这表明采用模板重组引入模板 S_3 改进 WENO 格式的方法可以有效降低格式色散与耗散。对比 WENO-ZF1



(b) 耗散

(b) Dissipation

图 3 各格式 ADR 分析色散耗散特性

Fig. 3 ADR dispersion and dissipation of the schemes

与 WENO-ZF2 格式的色散与耗散特性,WENO-ZF2 格式除对部分中频波的色散略小于 WENO-ZF1 格式外,其他情况下对中高频波的色散和耗散均大于 WENO-ZF1 格式。

3 数值实验

本节采用 5 阶 WENO-JS、WENO-Z、WENO-ZF1 和 WENO-ZF2 格式对一系列经典的数值算例进行模拟,以验证格式的精度及其色散耗散特性、分辨率等方面的性能。需说明的是,算例中变量如无特别说明,均为无量纲量;各算例的时间离散均采用 3 阶 TVD Runge-Kutta 格式计算。

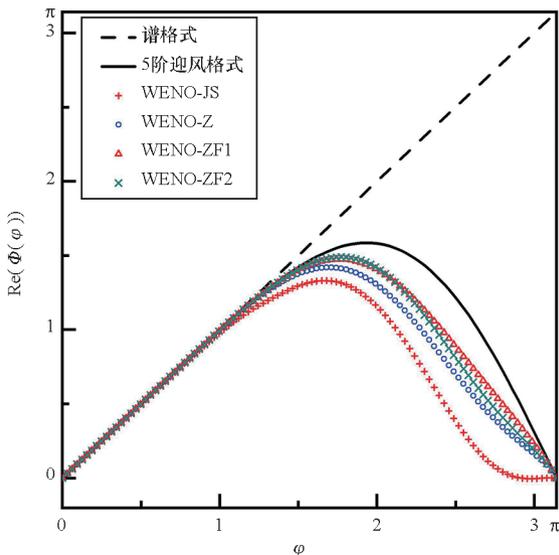
3.1 线性对流方程

对线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad -1 < x \leq 1 \tag{26}$$

取初始条件 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, 在网格数为 20 至 320 的均匀网格上进行计算,结束时间取 $t = 2$, 计算所得 L_1 、 L_∞ 误差与精度如表 1 所示。

由表 1 中数据可得,四种 WENO 格式均可达到设计的 5 阶精度;相同网格数下,WENO-Z、WENO-ZF1、WENO-ZF2 三种格式误差较为接近,较 WENO-JS 格式小一个数量级。比较 WENO-Z、WENO-ZF1、WENO-ZF2 三种格式误差,对于 L_∞ 误差,相同网格下,WENO-ZF1 格式与 WENO-ZF2 格式误差相当,均小于 WENO-Z 格式。对于 L_1 误差,相同粗网格下,WENO-ZF1 格式与 WENO-ZF2 格式误差相当,均小于 WENO-Z 格式;相同细网



(a) 色散

(a) Dispersion

表 1 $t=2$ 时线性对流方程各 WENO 格式的误差与精度

Tab.1 Difference WENO scheme error and order of the linear transport equation at $t=2$

格式	网格数	L_1		L_∞	
		误差	精度	误差	精度
WENO-JS	20	1.4347×10^{-3}		2.5806×10^{-3}	
	40	4.3928×10^{-5}	5.03	8.9845×10^{-5}	4.84
	80	1.3803×10^{-6}	4.99	2.7886×10^{-6}	5.01
	160	4.3315×10^{-8}	4.99	8.6251×10^{-8}	5.01
	320	1.3579×10^{-9}	5.00	2.5632×10^{-9}	5.07
WENO-Z	20	2.0712×10^{-4}		3.4392×10^{-4}	
	40	6.2542×10^{-6}	5.05	1.0236×10^{-5}	5.07
	80	1.9707×10^{-7}	4.99	3.1461×10^{-7}	5.02
	160	6.1923×10^{-9}	4.99	9.7990×10^{-9}	5.00
	320	1.9732×10^{-10}	4.97	3.1088×10^{-10}	4.98
WENO-ZF1	20	2.0170×10^{-4}		3.2591×10^{-4}	
	40	6.2449×10^{-6}	5.01	1.0029×10^{-5}	5.02
	80	1.9705×10^{-7}	4.99	3.1343×10^{-7}	5.00
	160	6.1923×10^{-9}	4.99	9.7897×10^{-9}	5.00
	320	1.9732×10^{-10}	4.97	3.1079×10^{-10}	4.98
WENO-ZF2	20	2.0159×10^{-4}		3.2477×10^{-4}	
	40	6.2449×10^{-6}	5.01	1.0026×10^{-5}	5.02
	80	1.9705×10^{-7}	4.99	3.1342×10^{-7}	5.00
	160	6.1923×10^{-9}	4.99	9.7897×10^{-9}	5.00
	320	1.9732×10^{-10}	4.97	3.1079×10^{-10}	4.98

格下,三种格式误差基本相同。综上,该算例中 WENO-ZF1 和 WENO-ZF2 格式可达到设计收敛精度,且有较 WENO-Z 格式更高的分辨率。

3.2 一维欧拉方程

求解欧拉方程时,为了计算的稳定性,将方程投影至特征空间,对特征变量进行求解,并采用 Lax-Friedrichs 通量分裂方法对通量进行分裂,采用 Roe 平均方法计算网格单元界面上的变量。

对一维欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (27)$$

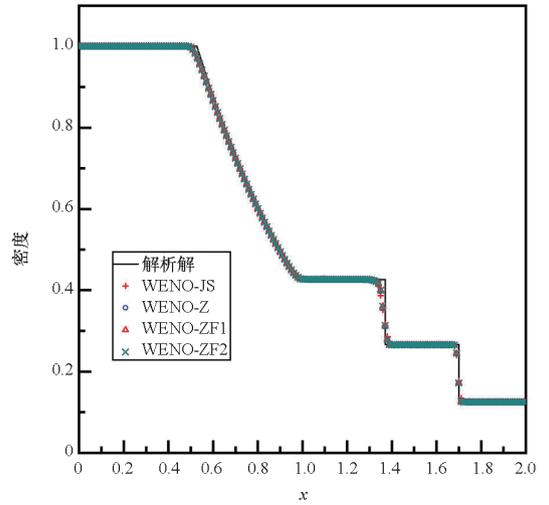
进行计算,式(27)中守恒变量 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho E]^T$, 通量 $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T$ 。

3.2.1 Sod 激波管

计算 Sod 激波管问题,其初始条件为

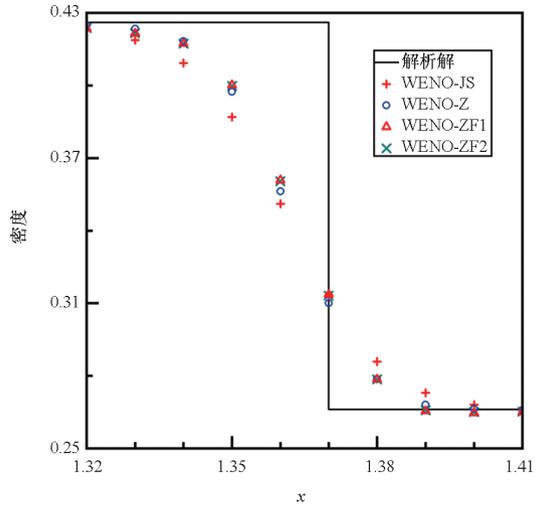
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0, 1.0) & 0 \leq x \leq 1 \\ (0.125, 0, 0.1) & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (28)$$

左右边界设置为零梯度边界条件,取 200 个均匀网格进行计算,模拟该问题至 $t=0.4$, 计算结果密度分布及激波与接触间断附近的密度分布放大图如图 4 所示。



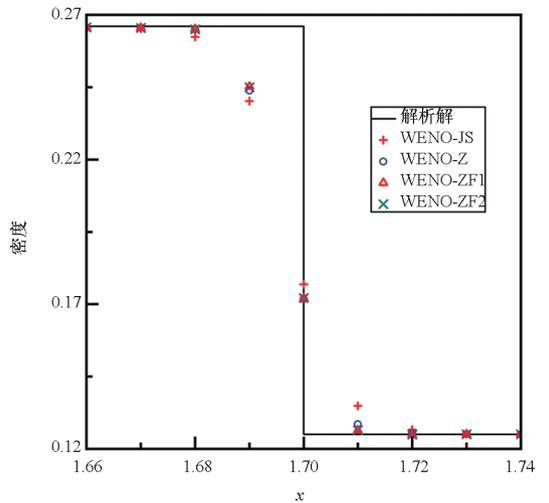
(a) 密度分布

(a) Density distributions



(b) 接触间断附近局部放大图

(b) Locally enlarged plot near the contact discontinuity



(c) 激波附近局部放大图

(c) Locally enlarged plot near the shock

图 4 $t=0.4$ 时 Sod 激波管密度分布
Fig.4 Density distributions of the Sod shock tube at $t=0.4$

图 4 表明各格式均可无振荡计算得到激波与接触间断。但比较图 4(b)和图 4(c)中各格式在接触间断与激波附近的结果,WENO-ZF1、WENO-ZF2 格式结果接近,略优于 WENO-Z 格式,而 WENO-JS 格式抹平较大。这表明,基于模板重组的 WENO-ZF1、WENO-ZF2 格式耗散低于 WENO-Z 格式。

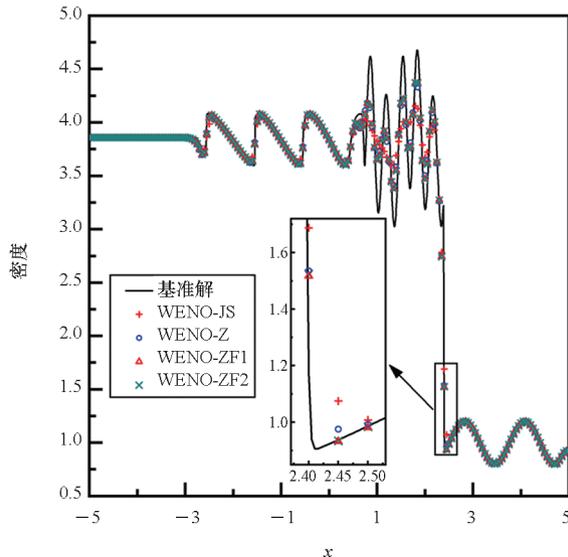
3.2.2 激波 - 密度波相互作用问题

计算激波 - 密度波相互作用问题,即 Shu-Osher 问题,该问题的初始条件为

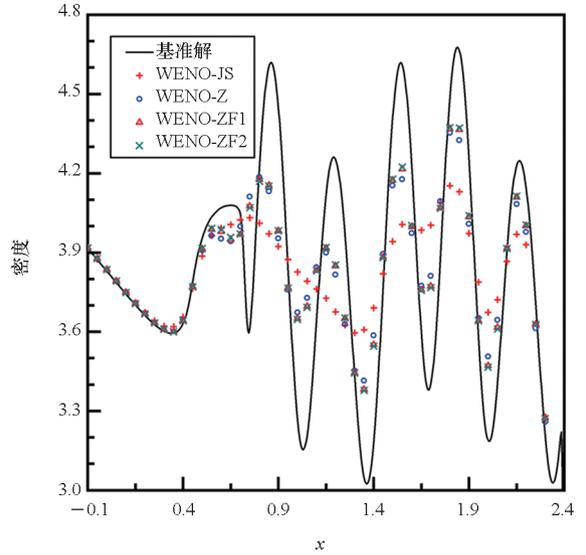
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857\ 143, 2.629\ 369, 10.333\ 333) & -5 \leq x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1.0) & -4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (29)$$

计算中左右边界设置为零梯度边界条件,取 200 个均匀网格进行计算,模拟该问题至 $t = 1.8$ 。由于该问题无解析解,故将在网格数为 2 000 的均匀网格上采用 WENO-JS 格式计算所得结果作为基准解。图 5 为网格数为 200 时各格式计算结果的密度分布。

图 5 中各格式对锯齿状的声波形成的一系列小激波及 $x = 2.4$ 附近的激波都有较好的捕捉效果,但对高频振荡的折射熵波计算效果较差。对比激波附近放大图,就所得激波陡峭程度而言,WENO-ZF1、WENO-ZF2 格式结果接近,优于 WENO-Z 格式,且优于 WENO-JS 格式。对比折射熵波附近放大图,在对幅值的计算上,WENO-ZF2 结果接近甚至优于 WENO-ZF1 格式,两者均优于 WENO-Z 格式,WENO-JS 格式则最差。可见,改进格式的色散耗散特性得到了优化。



(a) 密度分布
(a) Density distributions



(b) 图(a)局部放大图
(b) Locally enlarged plot of graph (a)

图 5 $t = 1.8$ 时激波 - 密度波相互作用密度分布
Fig. 5 Density distributions of the shock-density wave interaction problem at $t = 1.8$

3.3 二维欧拉方程

对二维欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (30)$$

做计算,式(30)中守恒变量 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T$, 各方向通量 $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p)u]^T$, $\mathbf{G} = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho E + p)v]^T$. 特征投影、Lax-Friedrichs 通量分裂等处理方法与求解一维欧拉方程相同。

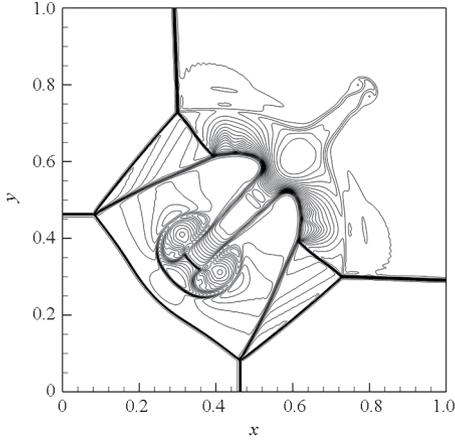
3.3.1 二维黎曼问题

该问题中取计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初场为

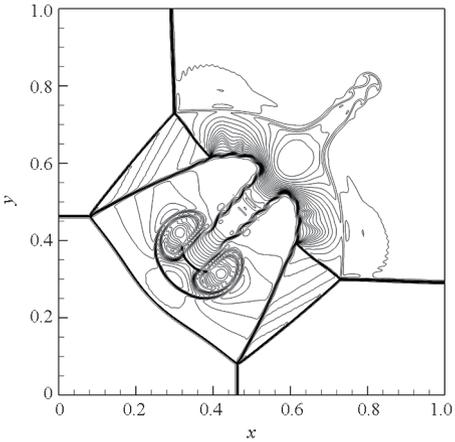
$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5) & 0.8 \leq x \leq 1, 0.8 \leq y \leq 1 \\ (0.532\ 3, 1.206, 0, 0.3) & 0 \leq x < 0.8, 0.8 \leq y \leq 1 \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029) & 0 \leq x < 0.8, 0 \leq y < 0.8 \\ (0.532\ 3, 0, 1.206, 0.3) & 0.8 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 0.8 \end{cases} \quad (31)$$

计算区域划分为 400×400 的均匀网格,各边界均采用零梯度边界条件,计算至 $t = 0.8$ 。计算结果中含一道射流和四道激波等复杂结构,可以有效校验数值格式的色散耗散特性和激波捕捉特性。各格式计算结果密度分布如图 6 所示,图中展示 0.14 到 1.70 均匀分布的 40 条密度等值线。

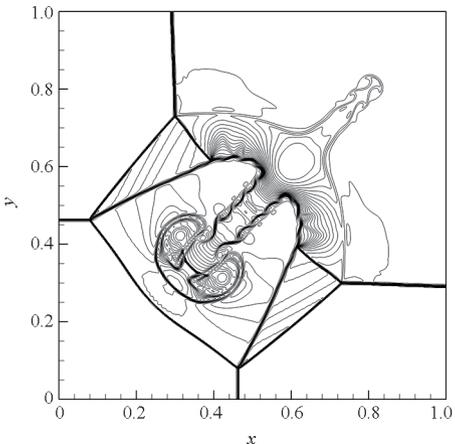
由图 6 可得,四种 WENO 格式计算结果均可正确反映流场分布,实现对激波的有效捕捉。但对比滑移线附近的流场,在对复杂离散涡的计算上,WENO-ZF1 和 WENO-ZF2 格式计算得到了更多细节结构,WENO-Z 格式次之,WENO-JS 更次之。这表明,四种格式中,WENO-ZF1 与 WENO-ZF2 格式耗散最小,WENO-Z 格式次之,WENO-JS 格式耗散最大。



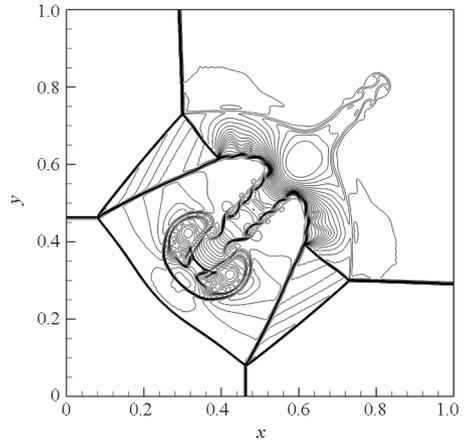
(a) WENO-JS



(b) WENO-Z



(c) WENO-ZF1



(d) WENO-ZF2

图 6 $t=0.8$ 时二维黎曼问题密度分布

Fig. 6 Density distributions of 2D Riemann problem at $t=0.8$

3.3.2 激波 - 涡相互作用

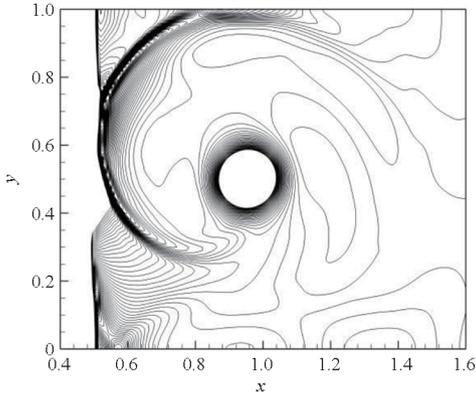
激波 - 涡相互作用问题描述二维空间下运动的涡穿过静止的马赫数为 1.1 的激波时,二者相互作用的问题。计算区域为 $[0,2] \times [0,1]$ 。初始条件为:在 $x=0.5$ 处给定一道垂直于 x 轴的静止的激波,激波左侧物理量为

$$(\rho, u, v, p) = (1.0, 1.1\sqrt{\gamma}, 0, 1.0) \quad (32)$$

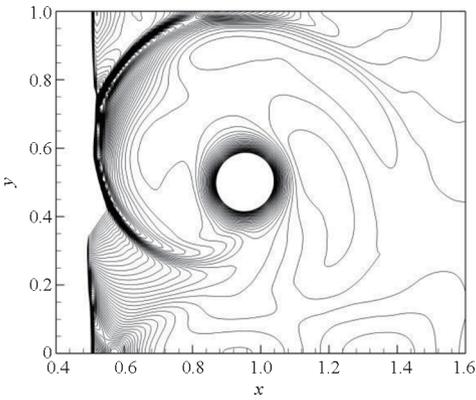
激波右侧物理量由 Rankine-Hugoniot 条件计算得出。同时,激波左侧叠加一个以 $(0.25, 0.5)$ 为中心的涡,即在激波左侧速度、温度和熵给定值上施加涡对应的脉动量,各脉动量为

$$\begin{cases} \tilde{u} = \varepsilon_c \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin\theta \\ \tilde{v} = -\varepsilon_c \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos\theta \\ \tilde{T} = -\frac{(\gamma-1)\varepsilon_c^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\gamma} \\ \tilde{S} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

其中, $\tau = r/r_c$, $r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$, $\varepsilon_c = 0.3$, $\alpha = 0.204$, $r_c = 0.05$, $x_c = 0.25$, $y_c = 0.5$ 。上下边界取反射边界条件,左右边界取零梯度边界条件。取 250×100 的均匀网格计算该问题,结束时间 $t = 0.6$ 。同时取 $1\,000 \times 400$ 均匀网格上 WENO-JS 的计算结果为基准解。因各格式计算结果流场分布接近,图 7 仅给出 WENO-ZF1、WENO-ZF2 对应结果压力分布(图中显示从 1.19 到 1.37 均匀分布的 90 条压力等值线)。图 8 给出通过涡核的直线 $y = 0.5$ 上的压力分布。图 9 为图 8 压力分布局部放大图。

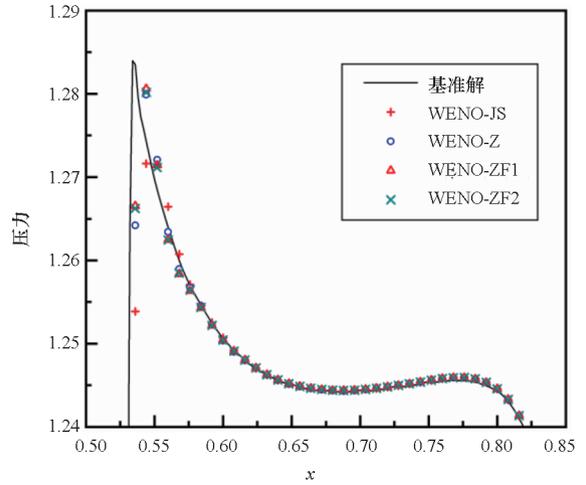


(a) WENO-ZF1



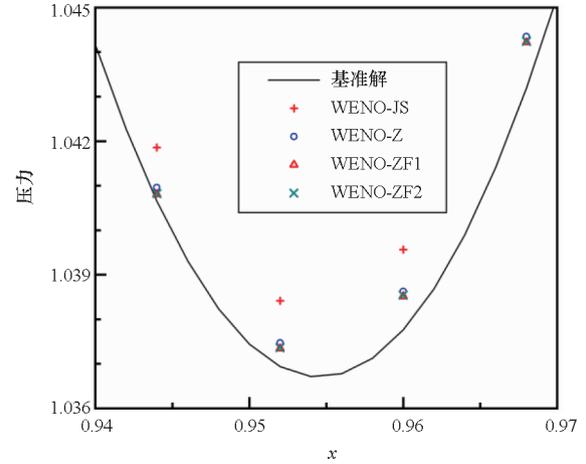
(b) WENO-ZF2

图 7 $t=0.6$ 时激波 - 涡相互作用压力分布
Fig. 7 Pressure distributions of the shock-vortex interaction problem at $t=0.6$



(a) 激波附近压力分布

(a) Pressure distributions near the shock wave



(b) 涡核附近压力分布

(b) Pressure distributions near the vortex core

图 9 图 8 局部放大图

Fig. 9 Locally enlarged plot of Fig. 8

的计算上, WENO-ZF1 格式与 WENO-ZF2 格式计算结果相当, 优于 WENO-Z 格式, WENO-JS 格式计算结果的偏差最大。综上, 改进的 WENO-ZF1 格式、WENO-ZF2 格式对激波的捕捉特性和小尺度流场结构的分辨率均优于 WENO-Z 格式与 WENO-JS 格式。

表 2 给出采用不同 WENO 格式计算上述算例中线性对流方程(初始分布为正弦波, 网格数为 320)、二维黎曼问题、激波 - 涡相互作用问题的相对用时, 其他算例由于耗时较短, 难以精确统计, 未予列出。表 2 中分别以各算例对应 WENO-Z 格式所用时间作为单位时间对其他格式所用时间进行无量纲化, 其中 WENO-ZF 格式表示采用最初的 4 个子模板加权公式计算的 WENO-ZF 格式(该格式与 WENO-ZF1 格式完全等价, 计算结果完全相同, 故在各算例结果中没有列出)。由

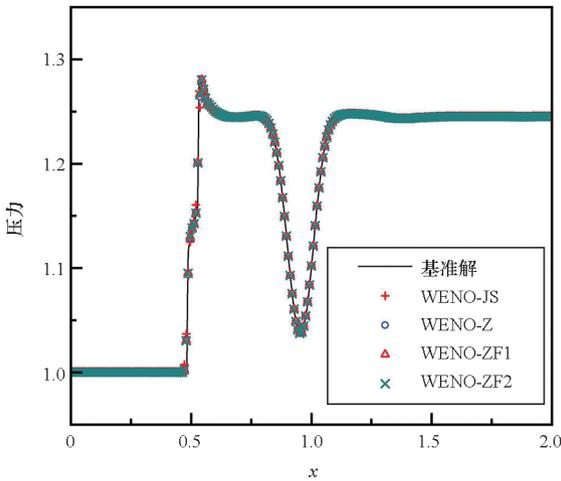


图 8 $t=0.6$ 时激波 - 涡相互作用 $y=0.5$ 压力分布
Fig. 8 Pressure distributions of the shock-vortex interaction problem on central line $y=0.5$ at $t=0.6$

图 7 与图 8 中计算结果表明 WENO-ZF1、WENO-ZF2 格式均可较好地模拟这一问题, 得到基本的流场分布, 得到正确的激波结构和涡核处的低压区。比较图 9 中激波附近和涡核附近的压力分布局部放大图, 在对激波的捕捉和涡核压力

表中数据可得,最初的 WENO-ZF 格式较 WENO-Z 格式用时长 7% ~ 19%, WENO-ZF1 格式较 WENO-Z 格式用时长 4% ~ 16%, WENO-ZF2 格式较 WENO-Z 格式用时长 1% ~ 4%。可见, WENO-ZF1 格式的等效转化较 WENO-ZF 格式提高了格式效率, WENO-ZF2 格式的 β_3 计算简化则进一步提高了格式效率。

表 2 计算不同算例时各 WENO 格式所用相对时间
Tab.2 Relative time of different WENO schemes spent on different cases

格式	线性对流方程	二维黎曼问题	激波 - 涡相互作用
WENO-JS	0.99	0.94	1.00
WENO-Z	1.00	1.00	1.00
WENO-ZF	1.19	1.19	1.07
WENO-ZF1	1.16	1.11	1.04
WENO-ZF2	1.04	1.05	1.01

4 结论

本文在 5 阶有限差分 WENO-Z 格式的基础上,提出一种模板重组技术:将原格式中的子模板组合得到一中心子模板 S_3 , S_3 上逼近函数取对应原始子模板的线性组合;在包括 S_3 的 4 个子模板上采用 WENO-Z 格式加权方法得到 WENO-ZF 格式。通过数学运算将 WENO-ZF 格式转换为原始子模板上的改进非线性权计算方法的 WENO-ZF1 格式。WENO-ZF 和 WENO-ZF1 格式的构建首次实现了格式模板优化与非线性权改进二者的等价转换。

为简化计算,提高格式效率,本文又将 WENO-ZF1 中 S_3 上光滑因子 β_3 简化为原始子模板光滑因子的线性组合,得到了计算更为简洁的 WENO-ZF2 格式。

ADR 分析表明, WENO-ZF1 格式和 WENO-ZF2 格式色散耗散特性得到不同程度的优化。数值实验表明, WENO-ZF1 格式和 WENO-ZF2 格式可达到理想的设计精度;较 WENO-Z 格式、WENO-JS 格式,具有更低的耗散,对激波有更优的捕捉特性,对小尺度流场结构有更高的分辨率。格式效率上, WENO-ZF2 格式效率高于 WENO-ZF1 格式,又高于采用 4 个子模板加权公式计算的最初 WENO-ZF 格式。

参考文献 (References)

[1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-

oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200 - 212.

[2] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439 - 471.

[3] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 83(1): 32 - 78.

[4] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202 - 228.

[5] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 542 - 567.

[6] FENG H, HU F X, WANG R. A new mapped weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2012, 51(2): 449 - 473.

[7] FENG H, HUANG C, WANG R. An improved mapped weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 232: 453 - 468.

[8] WANG R, FENG H, HUANG C. A new mapped weighted essentially non-oscillatory method using rational mapping function [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 67(2): 540 - 580.

[9] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191 - 3211.

[10] LIU S P, SHEN Y Q, ZENG F J, et al. A new weighting method for improving the WENO-Z scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2018, 87(6): 271 - 291.

[11] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(5): 1766 - 1792.

[12] ACKER F, DE R BORGES R B, COSTA B. An improved WENO-Z scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 313: 726 - 753.

[13] 骆信, 吴颂平. 改进的五阶 WENO-Z + 格式 [J]. *力学学报*, 2019, 51(6): 1927 - 1939.

LUO X, WU S P. An improved fifth-order WENO-Z + scheme [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(6): 1927 - 1939. (in Chinese)

[14] SHEN Y Q, ZHA G C. Improvement of the WENO scheme smoothness estimator [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 64(6): 653 - 675.

[15] 侯中喜, 易仕和, 李桦. 高精度高分辨率 WENO 格式分析与改进 [J]. *国防科技大学学报*, 2003, 25(1): 17 - 20.

HOU Z X, YI S H, LI H. Analysis and improvement of high precision, high resolution WENO schemes [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2003, 25(1): 17 - 20. (in Chinese)

- [16] 柴得林, 李雨润, 孙中国, 等. WENO 格式权重分析与改进[J]. 国防科技大学学报, 2016, 38(4): 39–45.
CHAI D L, LI Y R, SUN Z G, et al. Analysis and improvement of weights in WENO schemes [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2016, 38(4): 39–45. (in Chinese)
- [17] BHISE A A, GANDE N R, SAMALA R. An efficient hybrid WENO scheme with a problem independent discontinuity locator[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2019, 91(1): 1–28.
- [18] RATHAN S, GANDE N R, BHISE A A. Simple smoothness indicator WENO-Z scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, 157: 255–275.
- [19] WANG Y H, DU Y L, ZHAO K L, et al. A low-dissipation third-order weighted essentially nonoscillatory scheme with a new reference smoothness indicator[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2020, 92(9): 1212–1234.
- [20] FARDIPOUR K, MANSOUR K. A modified seventh-order WENO scheme with new nonlinear weights for hyperbolic conservation laws [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 78(12): 3748–3769.
- [21] 徐维铮, 孔祥韶, 郑成, 等. 一种三阶 WENO-Z 格式改进方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(12): 2400–2405.
XU W Z, KONG X S, ZHENG C, et al. An improved method for third-order WENO-Z scheme [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(12): 2400–2405. (in Chinese)
- [22] MARTÍN M P, TAYLOR E M, WU M, et al. A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 220(1): 270–289.
- [23] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(23): 8952–8965.
- [24] ZHU J, QIU J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 318: 110–121.
- [25] PIROZZOLI S. On the spectral properties of shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 219(2): 489–497.

(编辑: 梁慧, 杨琴)