

## 导弹命中精度的序贯截尾概率圆检验方法

杨华波, 张士峰\*

(国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**针对圆概率偏差检验难以直接计算的问题,提出序贯截尾概率圆检验方法,以目标点为中心,绘制两个同心圆,其中小圆以内区域为接受域,大圆以外区域为拒绝域,中间区域为继续试验域,在此基础上定义了序贯检验的基本决策规则,给出了双方风险及平均试验次数计算模型,提出了两种不同的决策阈值优化计算模型,通过求解优化问题确定接受域及拒绝域半径。利用数值仿真分析了两种不同决策阈值计算方法下检验方案中的各类参数,其中以平均试验次数最小为优化目标的计算模型具有更好的工程实用性。

**关键词:**命中精度;圆概率偏差;序贯截尾概率圆检验;研制方风险;使用方风险;平均试验次数

**中图分类号:** O212.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2024)02-062-08

## Sequential truncated probability circle test for hit accuracy of missile

YANG Huabo, ZHANG Shifeng\*

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** For the calculation difficulty directly of the circular error probability test, a truncated sequential probability circle test method was proposed. Taking the target point as the center, two concentric circles were drawn, in which the area within the small circle was the acceptance domain, the area outside the big circle was the rejection domain, and the middle area was the continuing test domain. On this basis, the basic decision rules in sequential testing were defined, and a calculation model for the risk of both parties and the average number of experiments was provided. Two different decision threshold optimization calculation models were proposed, and the acceptance and rejection domain radii were determined by solving the optimization problem. The various parameters in the inspection scheme under two different decision threshold calculation methods were analyzed using numerical simulation. Among them, the calculation model with the minimum average number of experiments as the optimization objective has better engineering practicality.

**Keywords:** hit accuracy; circular error probability; sequential truncated probability circle test; developer risk; consumer risk; average number of tests

命中精度又称射击精度,指武器命中目标的精确程度,是导弹等武器装备一类关键的战术技术指标。圆概率偏差(circular error probability, CEP)是描述导弹命中精度的一种常用参数,定义为以目标点为圆心,弹头落入概率为50%的圆域半径。通常情况下在武器交付使用之前,需要对命中精度 CEP 指标进行检验,以判断其命中精度是否达到了给定的技术要求。由于 CEP 参数服从何种分布目前没有定论,对于 CEP 的评估与检验难以直接基于分布的方法进行<sup>[1-2]</sup>。同时由于导弹武器昂贵,且飞行试验通常是破坏性的,尽可能减少试验次数是必须遵循的原则。对于导弹武器 CEP 检验尽可能少的子样数,将序贯检验方法

引入武器装备鉴定中。Wald<sup>[3]</sup>最早引入序贯检验的思想用于火炮等装备的试验鉴定,并且证明序贯检验方法的平均试验次数比非序贯方法少。张金槐<sup>[4]</sup>提出了一种序贯检验后加权检验方法,将验前信息引入假设检验中。王康等<sup>[5]</sup>、陈然等<sup>[6]</sup>针对武器装备中的测试性验证方案设计问题,提出了两种以序贯方法为基础的测试性检验方案,并对比分析了几种不同检验方案下的平均样本量。程光显等<sup>[7]</sup>提出了一种针对 CEP 的概率圆检验方法。郑小兵等<sup>[8]</sup>、Peng 等<sup>[9]</sup>进一步讨论了概率圆方法的应用问题。李述清等<sup>[10]</sup>则分析了落点偏差分布中的系统性偏差对概率圆检验效率的影响。Schnuerch 等<sup>[11]</sup>将序贯检验理论用于信

收稿日期:2022-01-06

基金项目:国家自然科学基金联合基金资助项目(U21B2028)

第一作者:杨华波(1980—),男,湖北孝感人,副教授,博士,E-mail:18007311626@189.cn

\*通信作者:张士峰(1971—),男,河南辉县人,教授,博士,博士生导师,E-mail:zhangshifeng@hotmail.com

息处理中的多项式信息数模型的处理。Khanduri等<sup>[12]</sup>提出了一种针对随机变形数据的截尾非参数化序贯检验,可以处理信号数据分布未知的情况。李泽西等<sup>[13]</sup>基于序贯检验思想,结合装备本体特征、经验知识等,设计了可适应不同检验条件的方法库。经典概率圆方法实际上是非序贯的,而且没有拒绝原假设的决策条件,在实际应用中存在一定局限性。对此,本文提出了一种严格意义上的序贯截尾概率圆检验方案,给出了决策规则与决策阈值计算方法。

## 1 导弹落点散布与 CEP 检验

假设打击目标为平面目标,以目标为中心  $O$ ,导弹瞄准方向为纵轴  $OX$ ,垂直于导弹瞄准方向为横轴  $OZ$ ,以  $(x, z)$  表示落点偏差的坐标。理论分析与工程经验表明,落点纵向偏差与横向偏差均服从正态分布。忽略落点纵向偏差与横向偏差之间的相关性<sup>[7]</sup>,其联合分布为:

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (1)$$

式中,  $\mu_x$ 、 $\sigma_x$  分别为落点纵向偏差正态分布的均值与标准差,  $\mu_z$ 、 $\sigma_z$  分别为落点横向偏差正态分布的均值与标准差。则 CEP 可根据式(2)计算。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z} \iint_{x^2+z^2 \leq R_{cep}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-\mu_z)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\} dx dz = 0.5 \quad (2)$$

式中,  $R_{cep}$  即为 CEP 圆半径,注意式(2)没有解析解。

对 CEP 参数进行检验,可采用如下假设检验公式:

$$H_0: R_{cep} = R_{cep0} \leftrightarrow H_1: R_{cep} = R_{cep1} = dR_{cep0} \quad (3)$$

式中:  $H_0$  为原假设;  $H_1$  为备择假设;  $R_{cep0}$  为指标可接受值(检验下限);  $d$  为检出比,一般情况下取  $d \in [1.2, 1.8]$ ,实际中由研制方和使用方共同协商确定。

对 CEP 参数进行假设检验的困难在于无法确定 CEP 的准确分布形式,从而无法直接开展假设检验中的计算,需要将其转换为对落点纵横向偏差的计算。从式(1)中可以看出,落点纵横向偏差分布形式中包含四个参数  $\mu_x$ 、 $\mu_z$ 、 $\sigma_x$  与  $\sigma_z$ ,无法根据式(3)给出的检验参数  $R_{cep0}$  确定上述四个参数,所以在制定 CEP 检验方案时,通常需要对落点纵横向偏差分布进行简化。不失一般性,假定落点纵横向偏差均值都为零,且方差相等<sup>[7]</sup>,即:

$$\begin{cases} \mu_x = \mu_z = 0 \\ \sigma_x = \sigma_z = \sigma \end{cases} \quad (4)$$

此时导弹落点偏差散布为圆散布,其联合概率密度函数简化为:

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

分析表明,上述假设对 CEP 检验方案的设计结果影响并不大。在上述假设下,根据 CEP 参数定义可以得到  $R_{cep}$  的解析解,  $R_{cep} = 1.1774\sigma$ 。

## 2 序贯截尾概率圆检验方案

### 2.1 检验方案决策规则

设计如下的序贯截尾概率圆检验方案:以目标点为圆心画两个同心圆,半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ ,其中  $r_2 > r_1$ ,如图 1 所示。采用标准化半径,令

$$\begin{cases} r_{k1} = \frac{r_1}{R_{cep0}} \\ r_{k2} = \frac{r_2}{R_{cep0}} \end{cases} \quad (6)$$

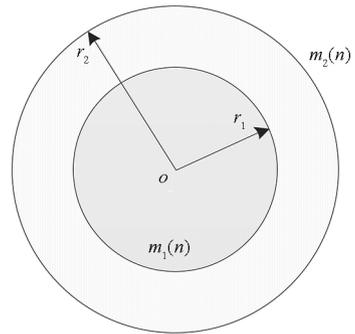


图 1 CEP 序贯概率圆检验图示

Fig. 1 Sketch map of the sequential probability circle test for CEP

当飞行试验进行到第  $n$  次时,定义试验次数阈值:

$$m^*(n) = \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 \quad (7)$$

式中,  $[\cdot]$  表示对实数取整数部分,例如  $[1.4] = 1$ 、 $[2.8] = 2$ 。由于导弹飞行试验次数只能是整数,这一定义方式可以确保不会出现决策区域重合的情况。

在进行  $n$  次试验后,根据如下规则进行决策:

1) 如果落入小圆  $r_1 = r_{k1}R_{cep0}$  内的导弹发数  $m_1(n) \geq m^*(n)$ ,则接受原假设  $H_0$ ,认为导弹的命中精度 CEP 满足原假设要求。

2) 如果落入大圆  $r_2 = r_{k2}R_{cep0}$  外的导弹发数  $m_2(n) \geq m^*(n)$ ,则拒绝原假设,接受备择假设  $H_1$ ,认为导弹的命中精度 CEP 不合格。

3)其他情况表示无法做出决策,继续进行下一次试验。

4)如果直到第  $N$  次飞行试验仍不能做出决策,则需要强制截尾。将双圆合并为单圆,半径为  $r_N = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(r_{k1} + r_{k2})R_{cep0}}{2}$ 。若导弹落入该圆内的发数  $m_3(n) \geq m^*(n)$ ,则接受原假设  $H_0$ ,否则接受备择假设  $H_1$ 。

5)当截尾次数  $N$  为偶数时,有可能出现落在圆  $r_N$  内外的导弹发数恰好相等的情况,此时令  $m^*(N) = N/2$ ,若导弹落入该圆内的发数  $m_3(N) \geq m^*(N)$ ,则接受原假设  $H_0$ ,否则接受备择假设  $H_1$ 。

### 2.2 双方风险计算

上述检验方案是一种序贯截尾检验方法,其中的关键是研制方风险  $\alpha$  与使用方风险  $\beta$  的计算。研制方风险也称为弃真概率或犯第一类错误概率,定义为:

$$\alpha = P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 成立}\} \quad (8)$$

使用方风险也称为采伪概率或犯第二类错误概率,定义为:

$$\beta = P\{\text{接受 } H_0 \mid H_1 \text{ 成立}\} \quad (9)$$

根据研制方风险定义,序贯概率圆检验中研制方风险由式(10)计算。

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{m2H0}(1) + [1 - P_{m1H0}(1) - P_{m2H0}(1)] \cdot \\ &\quad \{P_{m2H0}(2) + [1 - P_{m1H0}(2) - P_{m2H0}(2)] \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \{P_{m2H0}(N-1) + [1 - P_{m1H0}(N-1) - P_{m2H0}(N-1)] \cdot \\ &\quad \{P_{m2H0}(N) + [1 - P_{m1H0}(N) - P_{m2H0}(N)]P_{m3H0}(N)\}\} \} \end{aligned} \quad (10)$$

使用方风险根据式(11)计算。

$$\begin{aligned} \beta &= P_{m1H1}(1) + [1 - P_{m1H1}(1) - P_{m2H1}(1)] \cdot \\ &\quad \{P_{m1H1}(2) + [1 - P_{m1H1}(2) - P_{m2H1}(2)] \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \{P_{m1H1}(N-1) + [1 - P_{m1H1}(N-1) - P_{m2H1}(N)] \cdot \\ &\quad \{P_{m1H1}(N) + [1 - P_{m1H1}(N) - P_{m2H1}(N-1)]P_{m3H1}(N)\}\} \} \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} P_{m1H0}(n) &= P[m_1(n) \geq m^*(n) \mid H_0] \\ &= \sum_{x=m^*(n)}^n C_n^x P_{10}^x (1 - P_{10})^{n-x}, \\ n &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_{m2H0}(n) &= P[m_2(n) \geq m^*(n) \mid H_0] \\ &= \sum_{x=m^*(n)}^n C_n^x P_{20}^x (1 - P_{20})^{n-x}, \\ n &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{m3H0}(N) &= P[m_3(N) < m^*(N) \mid H_0] \\ &= \sum_{x=0}^{m^*(N)-1} C_N^x P_{30}^x (1 - P_{30})^{N-x} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_{m1H1}(n) &= P[m_1(n) \geq m^*(n) \mid H_1] \\ &= \sum_{x=m^*(n)}^n C_n^x P_{11}^x (1 - P_{11})^{n-x}, \\ n &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P_{m2H1}(n) &= P[m_2(n) \geq m^*(n) \mid H_1] \\ &= \sum_{x=m^*(n)}^n C_n^x P_{21}^x (1 - P_{21})^{n-x}, \\ n &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} P_{m3H1}(N) &= P[m_3(N) \geq m^*(N) \mid H_1] \\ &= \sum_{x=m^*(N)}^N C_N^x P_{31}^x (1 - P_{31})^{N-x} \end{aligned} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} P_{10} &= \iint_{x^2+z^2 \leq r_1^2} f(x, z \mid H_0) dx dz \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{r_1^2}{2\sigma_0^2}\right) = 1 - \exp(-0.693r_{k1}^2) \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)表示原假设  $H_0$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_1$  的小圆内的概率。

$$\begin{aligned} P_{20} &= 1 - \iint_{x^2+z^2 \leq r_2^2} f(x, z \mid H_0) dx dz \\ &= \exp\left(-\frac{r_2^2}{2\sigma_0^2}\right) = \exp(-0.693r_{k2}^2) \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)表示原假设  $H_0$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_2$  的大圆外的概率。

$$\begin{aligned} P_{11} &= \iint_{x^2+z^2 \leq r_1^2} f(x, z \mid H_1) dx dz \\ &= 1 - \exp\left(-0.693 \frac{r_{k1}^2}{d^2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)表示备择假设  $H_1$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_1$  的小圆内的概率。

$$\begin{aligned} P_{21} &= 1 - \iint_{x^2+z^2 \leq r_2^2} f(x, z \mid H_1) dx dz \\ &= \exp\left(-\frac{r_2^2}{2d^2\sigma_0^2}\right) = \exp\left(-0.693 \frac{r_{k2}^2}{d^2}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)表示备择假设  $H_1$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_2$  的大圆外的概率。

$$\begin{aligned} P_{30} &= \iint_{x^2+z^2 \leq \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2} f(x, z \mid H_0) dx dz \\ &= 1 - \exp[-0.1733(r_{k1} + r_{k2})^2] \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)表示原假设  $H_0$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_N$  的圆内的概率。

$$P_{31} = \iint_{x^2+z^2 \leq \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2} f(x, z \mid H_1) dx dz$$

$$= 1 - \exp\left[-0.1733\left(\frac{r_{k1} + r_{k2}}{d}\right)^2\right] \quad (23)$$

式(23)表示备择假设  $H_1$  为真时单次试验落点位于半径为  $r_N$  的圆内的概率。

注意,式(14)、式(17)中的  $m^*(N)$  在  $N$  为奇数与偶数时定义是不同的。

### 2.3 序贯检验方案中平均试验次数计算

平均试验次数是衡量一个检验方案优劣的重要因素,Wald 早已证明,序贯检验方案平均试验次数比传统检验方案少。下面分析上述序贯概率圆检验方案的平均试验次数。

当  $H_0$  为真时,序贯概率圆检验方案的平均试验次数为:

$$\begin{aligned} K_0 = & 1 \cdot [P_{m1H0}(1) + P_{m2H0}(1)] + \\ & 2 \cdot [1 - P_{m1H0}(1) - P_{m2H0}(1)][P_{m1H0}(2) + \\ & P_{m2H0}(2)] + \cdots + (N-1) \cdot \\ & \prod_{i=1}^{N-2} [1 - P_{m1H0}(i) - P_{m2H0}(i)] \cdot \\ & [P_{m1H0}(N-1) + P_{m2H0}(N-1)] + \\ & N \cdot \prod_{i=1}^{N-1} [1 - P_{m1H0}(i) - P_{m2H0}(i)] \quad (24) \end{aligned}$$

当  $H_1$  为真时,序贯概率圆检验方案的平均试验次数为:

$$\begin{aligned} K_1 = & 1 \cdot [P_{m1H1}(1) + P_{m2H1}(1)] + \\ & 2 \cdot [1 - P_{m1H1}(1) - P_{m2H1}(1)][P_{m1H1}(2) + \\ & P_{m2H1}(2)] + \cdots + (N-1) \cdot \\ & \prod_{i=1}^{N-2} [1 - P_{m1H1}(i) - P_{m2H1}(i)] \cdot \\ & [P_{m1H1}(N-1) + P_{m2H1}(N-1)] + \\ & N \cdot \prod_{i=1}^{N-1} [1 - P_{m1H1}(i) - P_{m2H1}(i)] \quad (25) \end{aligned}$$

上述计算公式均可以采用递推方式进行计算。

### 2.4 落点偏差分布中系统性偏差的影响

上述双方风险及平均试验次数的计算是在式(4)的基础上完成的,纵横向落点偏差联合概率密度函数为式(5),没有考虑落点偏差中系统性偏差(正态分布均值不为零的情况)的影响。根据式(2)可以计算 CEP,但是根据 CEP 值无法同时得到落点偏差分布中的均值与方差参数。为分析均值对结果的影响,假定式(1)中落点纵向、横向分布中  $\mu_x = \mu_z = \mu_0, \sigma_x = \sigma_z = \sigma_0$ ,对应于式(3)所示假设检验,不妨假定关于分布中均值与方差的假设检验<sup>[7-8]</sup>为:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_z = \mu_0, \sigma_x = \sigma_z = \sigma_0 \\ H_1: \mu_x = \mu_z = \mu_1 = d\mu_0, \sigma_x = \sigma_z = \sigma_1 = d\sigma_0 \end{cases} \quad (26)$$

可以看到,考虑系统性偏差的情况下,上述检验方案主要区别在于式(18)~(23)中  $P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{21}, P_{30}, P_{31}$  的计算,积分没有解析解,需要使用数值积分,例如式(18)的数值积分为:

$$P_{10} = \iint_{x^2+z^2 \leq r_1^2} \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_0)^2 + (z-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right]\right\} dx dz \quad (27)$$

式(20)的数值积分为:

$$P_{11} = \iint_{x^2+z^2 \leq r_1^2} \frac{1}{2\pi d^2\sigma_0^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-d\mu_0)^2 + (z-d\mu_0)^2}{d^2\sigma_0^2}\right]\right\} dx dz \quad (28)$$

其他值的计算根据上述方法进行修改即可。

### 3 序贯截尾概率圆检验中阈值确定

在上述检验方案中,归一化决策阈值  $r_{k1}, r_{k2}$  (大圆半径、小圆半径),检出比  $d$ ,研制方风险  $\alpha$ ,使用方风险  $\beta$ ,截尾次数  $N$  之间相互影响,给定  $r_{k1}, r_{k2}, d, N$  等参数,可得到唯一的研制方风险与使用方风险。按照一般性能参数检验方案的制定流程,事先确定  $d, N, \alpha_m, \beta_m$  等约束条件,然后优化计算  $r_{k1}, r_{k2}$ 。双方风险满足:

$$\begin{cases} \alpha \leq \alpha_m \\ \beta \leq \beta_m \end{cases} \quad (29)$$

在给定  $d, N, \alpha_m, \beta_m$  的情况下,有三种可能:

1) 无法得到  $r_{k1}, r_{k2}$ ,原因是  $N$  太小或者双方风险约束太严格(风险上限太小),无论决策阈值取何值,双方风险都不能满足约束要求,无法得到满足要求的检验方案。

2) 具有唯一解,这种情况是一种由无解过渡至多解的临界情况,工程实际中极少发生。

3) 有无穷多组解,即满足要求的  $r_{k1}, r_{k2}$  有多种组合,这种情况下需要制定合适的规则确定  $r_{k1}, r_{k2}$ 。

下面主要讨论第三种情况,在有多组解的情况下,如何确定决策阈值。根据工程实际需求,考虑下面两种确定方法。

#### 3.1 以平均试验次数最小作为优化目标

该优化问题可描述为在给定  $d, N$ ,以及约束条件为式(29)的情况下,以平均试验次数最小为优化目标,求解决策阈值,即:

$$\begin{aligned} J = & \min((K_0 + K_1)/2) \\ \text{s. t. } & \alpha \leq \alpha_m, \beta \leq \beta_m \end{aligned} \quad (30)$$

上述优化问题中的优化目标等价于  $J = \min(r_{k2} - r_{k1})$ ,其实际意义是图1中的环状区域最小,也就是决策准则中继续下一次试验的可能

性最小,这样可以在满足要求的情况下尽可能快地做出接受或拒绝的决策,所以其平均试验次数也最小。但是该优化目标下双方实际风险并不是最小的。该优化问题的计算策略如下:

1) 研制方与使用方协商确定  $d, N, \alpha_m, \beta_m$  等参数。

2) 根据经验分别给定  $r_{k1}$  与  $r_{k2}$  的搜索范围,其中  $r_{k1} \in [0.1, 1.1], r_{k2} \in [1, 3d]$ 。

3) 根据目标函数,可采用下述搜索策略: $r_{k1}$  按照从大到小搜索,搜索步长设定为 0.01 (或者 0.001);  $r_{k2}$  按照从小到大搜索,搜索步长设定为 0.01 (或 0.001); 搜索过程中始终保证  $r_{k2} > r_{k1}$ 。

4) 根据式(10)、式(11)计算实际研制方风险  $\alpha$  与使用方风险  $\beta$ , 根据式(24)、式(25)计算平均试验次数  $K_0$  与  $K_1$ 。

5) 如果计算得到的双方实际风险满足约束条件,则保存相应的  $r_{k1}$  与  $r_{k2}$  作为可行解。直至  $r_{k1}$  与  $r_{k2}$  的搜索空间遍历完毕。

6) 在满足要求的  $r_{k1}$  与  $r_{k2}$  搜索结果中,求满足目标函数要求的  $r_{k1}$  与  $r_{k2}$ , 作为最终计算结果。

由于上述优化问题变量只有两个,且变量范围已知,求解相对简单。

### 3.2 以实际双方风险最小作为优化目标

以平均试验次数最小作为优化目标得到的

鉴定方案中,计算得到的实际双方风险并不是最小。由于假设检验中研制方风险与使用方风险不能同时达到最小,优化目标中需要同时考虑研制方风险与使用方风险最小化,并使研制方风险与使用方风险尽可能相等。定义优化目标函数为:

$$f = \alpha + \beta + |\alpha - \beta| \tag{31}$$

则优化问题可描述为在给定  $d, N$ , 以及约束条件为式(29)的情况下,以实际双方风险最小为优化目标,求解决策阈值,即:

$$\begin{aligned} J = \min(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|) \\ \text{s. t. } \alpha \leq \alpha_m, \beta \leq \beta_m \end{aligned} \tag{32}$$

该优化问题的计算流程与 3.1 节相同,只是在确定最优解时,需要在可行解中计算式(31)的最小值。

## 4 方案对比分析

下面给出几种不同参数组合下的序贯概率圆检验方案设计结果,将检出比、截尾次数、研制方风险上限、使用方风险上限 4 个参数作为设计输入条件,分别采用式(30)与式(32)作为优化问题,除给出相应的优化目标参数与决策阈值(大小圆半径)外,同时也给出其他对应参数,具体计算结果见表 1。

表 1 平均试验次数最小的检验方案

Tab. 1 Test scheme of minimizing the average number of tests

方案号	检出比	截尾次数	研制方风险上限	使用方风险上限	优化目标: 平均试验次数	优化结果		计算的 研制方风险	计算的 使用方风险
						大圆半径	小圆半径		
1	1.4	10	0.20	0.20	5.83	1.82	0.56	0.198 9	0.196 1
2	1.4	10	0.25	0.25	3.63	1.61	0.75	0.249 2	0.246 8
3	1.4	15	0.20	0.20	6.40	1.77	0.64	0.197 2	0.196 6
4	1.4	15	0.25	0.25	4.08	1.61	0.76	0.243 7	0.246 3
5	1.5	10	0.20	0.20	4.32	1.71	0.72	0.197 6	0.195 6
6	1.5	10	0.25	0.25	2.77	1.56	0.85	0.249 8	0.247 5
7	1.5	15	0.20	0.20	5.03	1.70	0.74	0.195 1	0.199 1
8	1.5	15	0.25	0.25	2.98	1.56	0.85	0.248 3	0.246 6

从表 1 中可以看出,以平均试验次数最小作为优化目标时,平均试验次数受双方风险约束上限的影响最为明显,例如方案 1 与方案 2、方案 3 与方案 4、方案 5 与方案 6 等,而计算得到的双方实际风险基本等于双方风险上限(约束

值)。当然,平均试验次数也与检出比有关,在其他参数相同的情况下,检出比越大,平均试验次数越小,如方案 1 与方案 5、方案 2 与方案 6、方案 3 与方案 7 等,检出比大表示原假设与备择假设的差异性高,区分难度小,所需的平均试验

次数也少。

选择表1中方案1与方案7所对应的参数,分析可行解中平均试验次数与决策阈值之差 $r_{k_2} - r_{k_1}$ 的变化情况,分别如图2、图3所示。

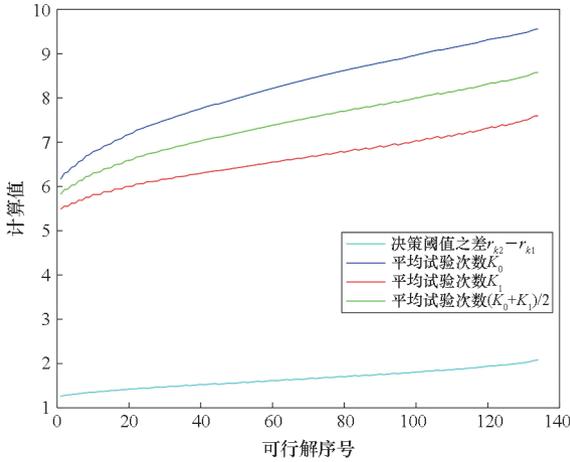


图2 方案1可行解下的平均试验次数与决策阈值之差  
Fig.2 Average number of tests and the difference of the decision threshold for the 1st scheme

从图2中可以看出,平均试验次数最小对应着决策阈值之差 $r_{k_2} - r_{k_1}$ 最小,二者变化规律是相同的,平均试验次数 $K_0$ 与 $K_1$ 的变化规律也是相

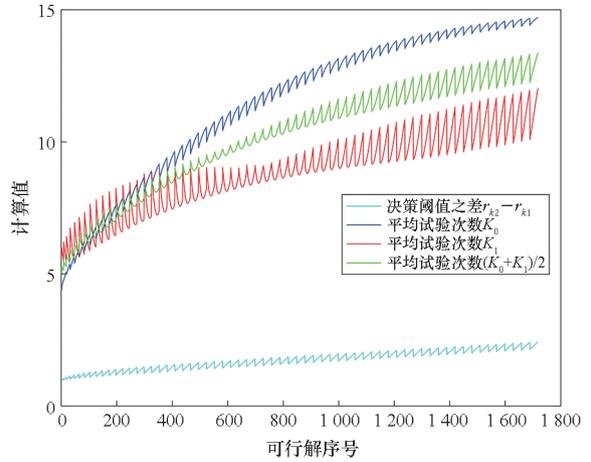


图3 方案7可行解下的平均试验次数与决策阈值之差  
Fig.3 Average number of tests and the difference of the decision threshold for the 7th scheme

同的。图3中的锯齿状是由于离散化的试验次数造成的,其整体变化趋势都是相同的。实际上,根据上述搜索方法给出的满足要求的第一个可行解即为最优解。

表2给出了以双方风险计算值最小作为优化目标的计算结果,其中输入参数检出比、截尾次数、双方风险上限等与表1相同。

表2 双方风险计算值最小的检验方案

Tab.2 Test scheme of minimizing the decision risk of two parties

方案号	检出比	截尾次数	研制方风险上限	使用方风险上限	优化目标		优化结果		平均试验次数
					研制方风险	使用方风险	大圆半径	小圆半径	
1	1.4	10	0.20	0.20	0.187 8	0.187 6	2.00	0.36	7.48
2	1.4	10	0.25	0.25	0.187 8	0.187 6	2.00	0.36	7.48
3	1.4	15	0.20	0.20	0.159 3	0.159 9	2.19	0.24	12.15
4	1.4	15	0.25	0.25	0.159 3	0.159 9	2.19	0.24	12.15
5	1.5	10	0.20	0.20	0.143 2	0.143 1	2.09	0.35	7.64
6	1.5	10	0.25	0.25	0.143 2	0.143 1	2.09	0.35	7.64
7	1.5	15	0.20	0.20	0.114 5	0.114 2	2.29	0.22	12.13
8	1.5	15	0.25	0.25	0.114 5	0.114 2	2.29	0.22	12.13

从表2中可以看出,以实际双方风险计算值最小作为优化目标时,在均存在可行解的情况下,优化结果实际上与双方风险上限无关,只与检出比及截尾次数有关,例如方案1与方案2、方案3与方案4、方案5与方案6、方案7与方案8。这一点不难解释,因为双方风险上限在优化问题中是作为约束条件的,在都存在可行解的情况下,其优化结果是相同的。同时还可以看出,截尾次数越大,检验方案中双方风险计算最小值越小,同样检

出比越大,双方风险计算最小值越小,这与经典检验方案结论是一致的。

同样选择表2中的方案1所对应的参数,分析可行解中双方风险计算值的变化情况,如图4所示。

从图4中可以看出,在可行解中双方风险计算值的最小值不再对应第一个可行解。

对比表1与表2,在两种不同的优化目标下,所得计算结果差异很大,表2中的平均试验次数均

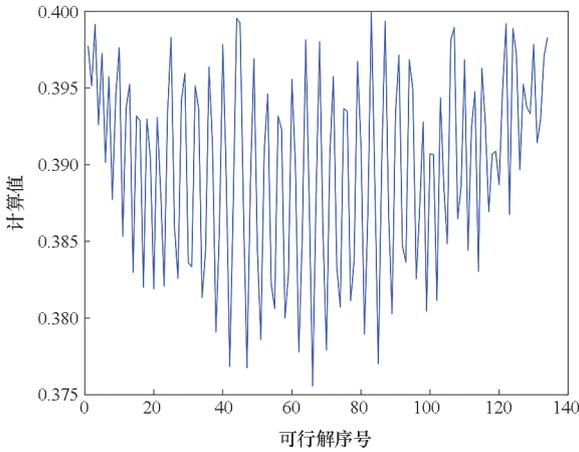


图 4 以双方风险计算值最小作为优化目标的可行解  
Fig. 4 Feasible solution for the objective of minimizing the decision risk of two parties

明显大于表 1, 决策阈值之差(图 1 中的环状区域)也明显大于表 1。显然, 图 1 中的环状区域越小, 完成一次飞行试验后做出决策(接受或拒绝  $H_0$ )的可能性越大, 继续试验的可能性越小, 平均试验次数自然越小。可以看出, 以平均试验次数最小作为优化目标物理意义明确, 计算方便, 工程实用性更好。

下面进一步分析系统性偏差对计算结果的影响。均值与均方差采用标准化值, 定义为:

$$\begin{cases} \mu_{k0} = \frac{\mu_0}{R_{cep0}} \\ \mu_{k1} = \frac{\mu_1}{R_{cep0}} \\ \sigma_{k0} = \frac{\sigma_0}{R_{cep0}} \\ \sigma_{k1} = \frac{\sigma_1}{R_{cep0}} \end{cases} \quad (33)$$

导弹精度检验主要针对 CEP, 从 CEP 反推分布均值与方差存在多解问题, 同时还需要保证假设检验式(26)中对应的 CEP 原假设与备择假设与假设检验式(3)相同。这里选择关于均值与均方差的两个组合来分析系统性偏差的影响, 见表 3、表 4 中的标准化均值与标准化均方差。同时选择表 1 与表 2 中方案 2 与方案 7 作为对比研究。表 3 表示在以平均试验次数最小为目标的情况下系统性偏差对结果的影响, 其中表 4 表示在以实际双方风险最小为目标的情况下系统性偏差对结果的影响。

表 3 系统性偏差影响(以平均试验次数最小为目标)

Tab. 3 Effects of the mean(the scheme of minimizing the average number of tests)

方案号	标准化均值	标准化均方差	对应 CEPO	对应 CEPI	平均试验次数	优化结果		计算的研制方风险	计算的使用方风险
						大圆半径	小圆半径		
2	0.28	0.8	1.000	1.400	3.64	1.61	0.75	0.247 4	0.246 4
2	0.45	0.7	0.997	1.396	3.49	1.57	0.77	0.247 5	0.249 6
7	0.28	0.8	1.000	1.400	5.07	1.69	0.74	0.199 0	0.197 7
7	0.45	0.7	0.997	1.495	5.07	1.65	0.75	0.199 4	0.197 4

表 4 系统性偏差影响(以实际风险最小为目标)

Tab. 4 Effects of the mean(the scheme of minimizing the decision risk of two parties)

方案号	标准化均值	标准化均方差	对应 CEPO	对应 CEPI	优化目标		优化结果		平均试验次数
					计算研制方风险	计算使用方风险	大圆半径	小圆半径	
2	0.28	0.8	1.000	1.400	0.187 0	0.186 9	1.99	0.37	7.43
2	0.45	0.7	0.997	1.396	0.181 1	0.181 3	1.95	0.39	7.36
7	0.28	0.8	1.000	1.400	0.113 5	0.114 0	2.28	0.23	12.08
7	0.45	0.7	0.997	1.495	0.108 7	0.108 7	2.30	0.18	12.53

对比表 3 与表 1、表 4 与表 2 中相同方案号下的结果, 当标准化均值  $\mu_{k0} = 0.28$ 、标准化均方差  $\sigma_{k0} = 0.8$  时(与 CEP 的原假设及备择假设对应较好)的计算结果与不考虑系统性偏差时(对应

式(4))的结果基本相同, 偏差很小, 相对误差均在 1% 以内。当标准化均值  $\mu_{k0} = 0.45$ 、标准化均方差  $\sigma_{k0} = 0.7$  时的计算结果与不考虑系统性偏差时(对应式(4))的结果相对误差均在 5% 以

内,这组参数与 CEP 原假设及备择假设对应的程度要差一些(在相同的检出比情况下),系统性偏差越大,这种对应程度越差,计算结果相差也越大。对于导弹武器而言,这种系统性偏差不会太大,否则会认为系统设计存在缺陷<sup>[10]</sup>。

## 5 结论

本文针对命中精度 CEP 检验问题,提出了一种序贯截尾检验方案,给出了检验方案的决策规则、双方风险计算方法、平均试验次数计算方法,以及两种不同决策阈值的确定方法,并分析了两种方法中决策阈值、平均试验次数、双方风险计算值的变化情况。本文提出的序贯截尾概率圆检验方法给出了命中精度 CEP 检验的决策规则,以平均试验次数最小作为优化目标的求解方法物理意义明确,计算方便,具有更好的工程应用性。在实际应用中,可以根据设计参数(检出比、截尾次数、研制方风险上限、使用方风险上限)的不同组合,计算出相应结果,制作成表格,供查询使用。

## 参考文献 (References)

[1] LEVY L J. Systems analysis and test and evaluation at APL[J]. Johns Hopkins APL Technical Digest, 2003, 24(1): 8-18.

[2] GREGORIOU G. CEP calculations for a rocket with different control systems[J]. Journal of Guidance Control Dynamics, 1988, 11(3): 193-198.

[3] WALD A. Sequential tests of statistical hypotheses[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1945, 16(2): 117-186.

[4] 张金槐. 利用验前信息的一种序贯检验方法: 序贯后加权检验方法[J]. 国防科技大学学报, 1991, 13(2): 1-13.

ZHANG J H. A sequential testing method with prior information: sequential posterior weighted testing method (SPOT method) [J]. Journal of National University of Defense Technology, 1991, 13(2): 1-13. (in Chinese)

[5] 王康, 史贤俊, 秦亮, 等. 基于 Bayes 小子样理论和序贯网图检验的武器装备测试性验证试验方案设计[J]. 兵工

学报, 2019, 40(11): 2319-2328.

WANG K, SHI X J, QIN L, et al. Design of BSST-SMT-based weaponry testability verification test scheme [J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(11): 2319-2328. (in Chinese)

[6] 陈然, 连光耀, 张西山. 基于序贯回归的小样本测试性验证试验方案 [J]. 航空动力学报, 2018, 33(2): 305-312.

CHEN R, LIAN G Y, ZHANG X S. A small sample testability verification test scheme based on sequential and regression analysis [J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(2): 305-312. (in Chinese)

[7] 程光显, 张士峰. 导弹落点精度的鉴定方法: 概率圆方法 [J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(5): 13-16.

CHENG G X, ZHANG S F. Assessment for the accuracy of the fall points-probability circle method [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2001, 23(5): 13-16. (in Chinese)

[8] 郑小兵, 孙翱, 雷刚, 等. 小子样试验条件下的序贯概率圆精度检验方法 [J]. 中国惯性技术学报, 2017, 25(5): 566-570.

ZHENG X B, SUN A, LEI G, et al. Sequential probability circle method for accuracy evaluation in small sample case [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(5): 566-570. (in Chinese)

[9] PENG W S, FANG Y W, ZHAN R J, et al. Weapon systems accuracy evaluation using the error spectrum [J]. Aerospace Science and Technology, 2016, 58: 369-379.

[10] 李述清, 张志利, 魏玉淼, 等. 导弹精度评估方法仿真分析 [J]. 系统仿真学报, 2021, 33(8): 1825-1831.

LI S Q, ZHANG Z L, WEI Y M, et al. Simulation analysis of assessment method for missile accuracy [J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(8): 1825-1831. (in Chinese)

[11] SCHNUERCH M, ERDFELDER E, HECK D W. Sequential hypothesis tests for multinomial processing tree models [J]. Journal of Mathematical Psychology, 2020, 95: 102326.

[12] KHANDURI P, PASTOR D, SHARMA V, et al. Truncated sequential non-parametric hypothesis testing based on random distortion testing [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2019, 67(15): 4027-4042.

[13] 李泽西, 孟晨, 王成. 基于本体技术的装备智能检验验收方法研究 [J]. 兵工学报, 2020, 41(3): 595-607.

LI Z X, MENG C, WANG C. Research on intelligent inspection and acceptance method of equipment based on ontology technology [J]. Acta Armamentarii, 2020, 41(3): 595-607. (in Chinese)

(编辑: 梁慧, 罗茹馨)