

高速飞行器间隙非线性机翼颤振的非线性能量阱抑制

钮耀斌*, 王中伟, 黄伟

(国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073)

摘要:针对间隙非线性机翼颤振系统的亚临界问题,引入了非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)技术来提高系统发生极限环振荡的临界速度。建立了具有NES控制的间隙非线性机翼颤振系统动力学模型,并分析了质量比、频率比、阻尼比、相对位置等NES参数对颤振系统极限环振荡的抑制效果,以及NES参数对颤振系统极限环振荡临界速度的影响规律。结果表明,阻尼比越大,可以在越小的自振频率比情况下使系统进入稳定区,但需要更苛刻的NES位置要求,即越靠近机翼前缘;而阻尼比越小,则使颤振系统极限环振荡响应进入稳定区所需的NES质量越小。在NES位置靠近机翼前缘时,增大自振频率比会使极限环振荡抑制效果有明显的提升,而增大质量比可以显著提高极限环振荡的抑制效果和临界速度。此外,NES的阻尼比越小,其颤振系统的极限环振荡抑制效果越好。

关键词:非线性能量阱;间隙非线性;机翼;极限环振荡;颤振抑制

中图分类号:V215.3 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2024)02-079-07

Suppression of nonlinear flutter for a wing with freeplay of high speed aircraft using nonlinear energy sink

NIU Yaobin*, WANG Zhongwei, HUANG Wei

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The subcritical problem of wing flutter system with freeplay nonlinearity was addressed by introducing the NES (nonlinear energy sink) technology to improve the critical velocity of the system's limit cycle oscillation. A dynamic model of flutter system with NES control for wings with freeplay nonlinearity was established, and the suppression effects of NES parameters such as mass ratio, frequency ratio, damping ratio, and relative position on the limit cycle oscillation of the flutter system were analyzed. The influence of NES parameters on the critical speed of the limit cycle oscillation of the flutter system was also investigated. The results show that a larger damping ratio can stabilize the system at a smaller natural frequency ratio but required a more stringent location requirement for the NES, i. e., closer to the leading edge of the wing. On the other hand, a smaller damping ratio results in a smaller NES mass required to stabilize the limit cycle response of the flutter system. When the NES location is closer to the leading edge of the wing, increasing the natural frequency ratio significantly improve the suppression effect of limit cycle oscillation, and increasing the mass ratio also significantly improve the suppression effect and critical speed of limit cycle oscillation. Additionally, a smaller damping ratio of the NES results in better suppression of limit cycle oscillation in the flutter system.

Keywords: nonlinear energy sink; freeplay nonlinearity; wing; limit cycle oscillation; flutter suppression

机翼颤振是飞行器设计中的关键问题之一,直接关系到飞行器的飞行安全性。间隙配合常存在于空气舵与舵机等活动部件的连接结构中,会使连接支撑存在一段零刚度区域,导致机翼的支撑刚度呈现间隙非线性,改变机翼颤振的发生条件^[1-3]。

机翼的间隙非线性颤振问题最早是在1980年由Laurenson等^[4]展开研究,其分析了亚音速情况下导弹控制面的间隙非线性颤振特性。随后,研究者们逐步开始重视间隙非线性颤振问题,

进行了较为广泛的研究^[5-10]。Tang等^[11-12]针对间隙非线性机翼颤振系统,研究了其极限环振荡(limit cycle oscillation, LCO)特性。Vasconcellos等^[13-14]针对三自由度机翼的间隙非线性颤振问题展开研究,分析了间隙大小对非线性极限环的影响。与此同时,很多学者开始关注极限环振荡的临界速度与颤振临界速度的定量关系。2005年,Marsden等^[15]对间隙非线性机翼的颤振响应进行研究,发现飞行速度大于线性颤振速度的80%时,极限环振荡幅值会迅速增大。

2016 年, Vasconcellos 等^[16]研究发现, 具有间隙非线性的操纵面出现非线性极限环的临界速度为颤振临界速度的 0.9 倍; Asjes 等^[17]对间隙非线性的二维机翼颤振问题进行研究, 发现出现极限环振荡的临界速度仅为线性颤振速度的 0.69 倍。2019 年, Chen 等^[18]研究发现非线性极限环颤振速度为线性颤振速度的 0.82 倍。可以看出, 具有间隙非线性刚度的机翼颤振系统会呈现亚临界状态, 即在小于颤振临界速度的情况下就会发生极限环振荡的不稳定现象, 降低颤振系统的稳定性, 从而影响飞行器的安全性。因此, 如何减小间隙非线性对颤振系统的影响, 提升间隙非线性颤振系统的极限环振荡临界速度成为事关飞行器安全的重要问题。

非线性能量阱 (nonlinear energy sink, NES) 技术是采用一类具有强非线性刚度的特殊吸振器, 将振动能从主动结构单向传递给耗能元件, 从而降低或抑制振动^[19-23]。采用 NES 的振动控制技术, 相比于传统的振动被动控制技术, 其减振频带宽、鲁棒性好, 现已广泛应用于各个领域^[24-28], 并开始逐渐应用到飞行器机翼颤振抑制中。2007 年, LEE 等^[29]首先采用 NES 对范德堡尔自激振荡进行抑制研究, 发现对自激振荡系统失稳的抑制具有可行性; 接着又将 NES 引入机翼的颤振系统, 采用立方非线性弹簧将 NES 耦合到机翼的沉浮自由度上, 对气动弹性系统的非线性振荡进行抑制, 发现 NES 对极限环振荡有一定的削弱作用, 机翼颤振临界速度也有一定的提高^[30]。在这之后, NES 被逐步应用于各类壁板及机翼的颤振抑制研究中。Pacheco^[31]和 Zhou^[32]等将 NES 技术用于壁板的非线性颤振抑制。Tian 等^[33]针对高超声速气流中悬臂梯形板结构, 采用 NES 对其非线性颤振的抑制进行了研究。Zhou 等^[34]针对 NES 对超声速流中复合材料层板颤振的抑制效果展开了研究。张文帆等^[35]采用 NES 研究了二维机翼的颤振不稳定性抑制。陈恒^[36]和 Guo^[37]等研究了 NES 对带控制面三元机翼的颤振抑制。

本文将 NES 技术应用于高速飞行器间隙非线性机翼的颤振抑制中, 开展 NES 对非线性颤振系统极限环振荡的抑制研究, 旨在提高其非线性极限环振荡的临界速度, 减小间隙非线性对颤振系统稳定性的负面影响。首先, 建立具有 NES 的机翼间隙非线性颤振系统动力学模型, 考虑沉浮和俯仰方向刚度均具有间隙非线性特性。其次, 分析 NES 对极限环振荡幅值的抑制效果, 研究

NES 参数对特定飞行速度时颤振系统的极限环振荡抑制影响规律。最后, 研究 NES 参数对颤振系统极限环振荡临界速度的抑制效果及影响规律。

1 模型与动力学方程

1.1 简化模型

选取单位展长的二元机翼, 其力学模型如图 1 所示。2 个自由度分别为: 沉浮方向自由度 h , 向下为正; 俯仰自由度 α , 机翼前缘抬头为正。 b 为半弦长, 弹性轴到重心的距离为 $x_a b$, 弹性轴到机翼中点的距离为 ab , 自由来流速度为 U_∞ 。

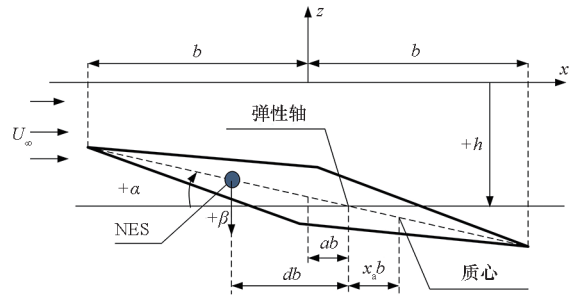


图 1 采用 NES 控制的二元机翼模型

Fig. 1 The 2-D wing model with NES

采用 NES 对机翼颤振系统进行非线性颤振抑制, NES 与机翼弹性轴距离为 db (其中 d 为 NES 与机翼弹性轴的相对距离), 运动自由度为 β , 向下为正。

1.2 动力学方程

由拉格朗日方程得到带有立方非线性刚度 NES 的二元机翼的颤振动力学方程为:

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + K_h F(h) + c_s (\dot{h} + bd\dot{\alpha} - \dot{\beta}) + k_s (h + bd\alpha - \beta)^3 = -L \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha G(\alpha) + bdc_s (\dot{h} + bd\dot{\alpha} - \dot{\beta}) + bdk_s (h + bd\alpha - \beta)^3 = M \\ m_s \ddot{\beta} + c_s (\dot{\beta} - \dot{h} - bd\dot{\alpha}) + k_s (\beta - h - bd\alpha)^3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: m 为单位展长机翼的质量; $S_\alpha = mx_a b$ 为机翼对弹性轴的质量静矩; $I_\alpha = m(r_a b)^2$ 为机翼对弹性轴的质量惯矩, r_a 为机翼对弹性轴的无量纲回转半径; c_h 、 c_α 为结构的阻尼系数; K_h 、 K_α 为结构刚度系数; m_s 、 c_s 、 k_s 分别为 NES 的质量、阻尼系数和刚度系数; $F(h)$ 和 $G(\alpha)$ 分别为沉浮和俯仰两个自由度的间隙非线性函数, 可表示为

$$F(h) = \begin{cases} h - h_f & h < h_f \\ 0 & h_f \leq h \leq h_f + \delta_1 \\ h - h_f - \delta_1 & h > h_f + \delta_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$G(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \alpha_f & \alpha < \alpha_f \\ 0 & \alpha_f \leq \alpha \leq \alpha_f + \delta_2 \\ \alpha - \alpha_f - \delta_2 & \alpha > \alpha_f + \delta_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中, h_f, α_f 分别为沉浮、俯仰两个方向间隙的起始点, δ_1, δ_2 分别为两个方向间隙的大小。

L, M 为作用在机翼上的气动力和气动力矩, 可以采用活塞理论进行计算:

$$\begin{cases} L = \frac{-4\rho U_\infty b(\dot{h} - ab\dot{\alpha} + U_\infty \alpha)}{Ma} \\ M = \frac{4\rho U_\infty b^2}{Ma} \left[\left(\frac{1}{3}b + a^2b \right) \dot{\alpha} - a\dot{h} - aU_\infty \alpha \right] \end{cases} \quad (4)$$

其中, ρ 为来流空气密度, Ma 为马赫数。

令 $\xi = h/b, \tau = U_\infty t/b, \omega_h = \sqrt{K_h/m}, \omega_\alpha = \sqrt{K_\alpha/I_\alpha}, \bar{\omega} = \omega_h/\omega_\alpha, \mu = m/(4\rho_\infty b^2), V = U_\infty/(b\omega_\alpha), \zeta_h = c_h/\sqrt{mK_h}, \zeta_\alpha = c_\alpha/\sqrt{I_\alpha K_\alpha}, \mu_s = m_s/m, \omega_s = \sqrt{k_s/m_s}, \xi_s = \beta/b, \zeta_s = c_s/\sqrt{m_s k_s}, \omega_p = \omega_s/\omega_\alpha$, 则机翼的无量纲动力学方程为:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + x_a \ddot{\alpha} + \frac{\bar{\omega}^2 F}{bV^2} + \zeta_h \frac{\bar{\omega}}{2V} \dot{\xi} + \frac{\zeta_s \mu_s \omega_p}{2V} (\dot{\xi} - \dot{\xi}_s + d\dot{\alpha}) + \frac{b^2 \mu_s \omega_p^2}{V^2} (\xi - \xi_s + d\alpha)^3 + \frac{1}{Ma \cdot \mu} (\dot{\xi} - a\dot{\alpha} + \alpha) = 0 \\ \ddot{\alpha} + \frac{\zeta_s \mu_s \omega_p d}{2V r_a^2} (\dot{\xi} - \dot{\xi}_s + d\dot{\alpha}) + \frac{b^2 \mu_s \omega_p^2 d}{r_a^2 V^2} (\xi - \xi_s + d\alpha)^3 + \frac{x_a}{r_a^2} \ddot{\xi} + \frac{G}{V^2} + \zeta_\alpha \frac{1}{2V} \dot{\alpha} - \frac{1}{Ma \cdot \mu r_a^2} \left(\frac{\dot{\alpha}}{3} - a\dot{\xi} - a\alpha + a^2 \dot{\alpha} \right) = 0 \\ \ddot{\xi}_s - \frac{\mu_s \omega_p V}{2V^2} (\dot{\xi} - \dot{\xi}_s + d\dot{\alpha}) - \frac{b^2 \omega_p^2}{V^2} (\xi - \xi_s + d\alpha)^3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中, ω_p, μ_s, ζ_s 分别为 NES 的自振频率比、质量比和阻尼比。

2 数值仿真与结果分析

2.1 颤振响应分析

采用 Runge-Kutta 方法对间隙非线性机翼的颤振动力学响应进行分析, 其中 $\mu = 50\,000, x_a = 0.25, r_a = 0.5, a = -0.2, \zeta_h = 0.1, \zeta_\alpha = 0.1, Ma = 5.0, \bar{\omega} = 0.5, \zeta_s = 0.1, \omega_p = 5.0, \mu_s = 0.05, d = -0.7$, 仿真结果如图 2 所示。

由图 2 可以看出, 机翼非线性颤振系统在无量纲飞行速度为 130 时已经处于持续振荡的极限

环状态, 沉浮方向振动的无量纲幅值为 0.025 7, 俯仰方向振动幅值为 0.098 8。在采用 NES 进行振动抑制后, 颤振系统的振动响应迅速收敛并趋于稳定, 沉浮方向振动幅值为 $9.037\,4 \times 10^{-5}$, 俯仰方向振动幅值为 $3.684\,7 \times 10^{-4}$, 说明特定参数下 NES 对颤振极限环振荡具有很好的抑制作用。

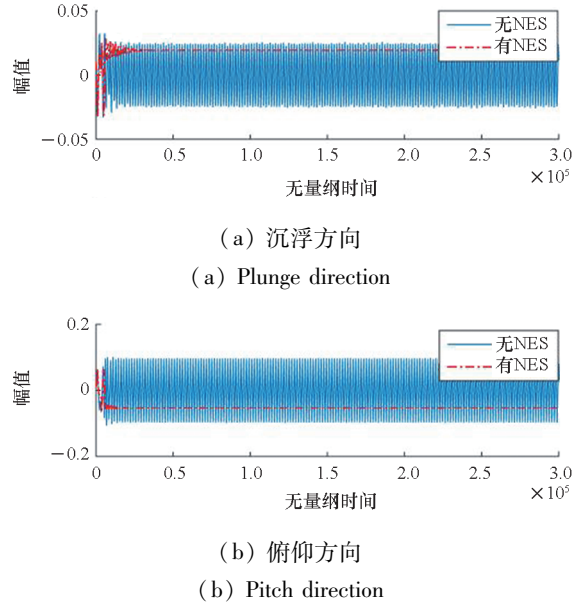


图 2 速度为 130 时颤振系统响应曲线
Fig. 2 Dynamic response curve of flutter system at speed 130

2.2 NES 参数对极限环振荡抑制的影响

NES 参数的选取会对颤振极限环振荡的抑制有一定影响, 本小节分析飞行速度为 130 的情况下, NES 自振频率比 ω_p 、质量比 μ_s 、与弹性轴之间相对距离 d 等参数对极限环振荡抑制效果的影响。

分析了不同阻尼比和自振频率比情况下 NES 对颤振系统极限环振荡的抑制效果, 如图 3 所示。由图 3 可以看出, NES 对极限环振荡的抑制效果可以分为 4 个区, 其中 I 区和 III 区为部分稳定区、II 区为振荡区、IV 区为稳定区。在稳定区, 极限环振荡被完全抑制, 颤振系统为稳定状态。在振荡区, NES 对极限环振荡没有产生抑制效果, 颤振系统在速度为 130 时依然为极限环振荡。在部分稳定区, NES 对极限环振荡的抑制在部分参数下有作用, 系统稳定, 而在部分参数下没有作用, 系统仍为极限环振荡。

在相同的阻尼比情况下, 随着自振频率比的增大, 颤振系统分别经历部分稳定区 I、振荡区 II、部分稳定区 III, 当自振频率比达到一定值时, 极限环振荡被完全抑制, 系统进入稳定区 IV。当阻尼比在 0.02 和 0.04 时, 自振频率大于 4.5 后系统

变为稳定, NES 起到颤振极限环振荡的抑制作用;当阻尼比为 0.06 ~ 0.1 时,自振频率比大于 3.9 即可以起到颤振系统极限环振荡的抑制作用;当阻尼比为 1.2 ~ 1.6 时,自振频率比大于 3.7 即可以起到极限环振荡的抑制作用;而当阻尼比为 0.2 时,自振频率比在大于 3.3 时可以起到极限环振荡的抑制作用。因此,阻尼比越大,可以在越小的自振频率比情况下使系统进入稳定区。

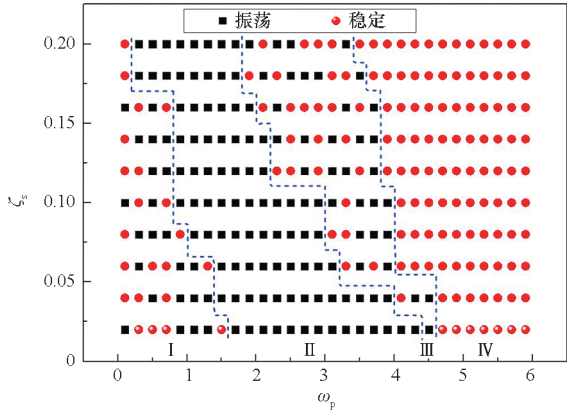


图 3 不同阻尼比和自振频率比时的极限环振荡抑制情况
Fig. 3 LCO suppression under different damping ratios and natural frequency ratios

图 4 给出了不同阻尼比和质量比情况下 NES 对颤振系统极限环振荡的抑制效果。由图 4 可以看出,当质量比较小时,颤振系统极限环振荡处于部分稳定区 I;而随着质量比的增大,系统逐渐过渡到稳定区 II,极限环振荡得到有效的抑制。同时,在不同阻尼比下,使系统进入稳定区 II 所需要的 NES 质量有所不同。当阻尼比在 0.02 时,质量比大于 0.02 即可使系统极限环得到有效控制;当阻尼比为 0.04 和 0.06 时,质量比大于 0.09 后

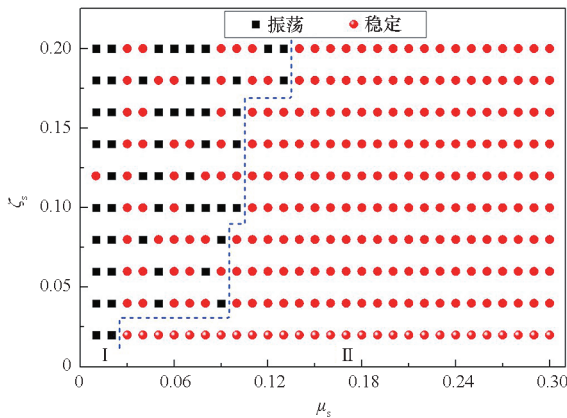


图 4 不同阻尼比和质量比时的极限环振荡抑制情况
Fig. 4 LCO suppression under different damping ratios and mass ratios

系统可以稳定;而当阻尼比为 0.18 和 0.2 时,需要质量比大于 0.13 才能使系统进入稳定区。可以看出,阻尼比越小,使颤振系统极限环振荡进入稳定区所需的 NES 质量越小,系统极限环振荡越容易被有效抑制。

分析了 NES 位置和阻尼比对颤振系统极限环振荡的抑制效果,如图 5 所示。由图 5 可以看出,在 NES 位置比较靠近机翼前缘时,颤振系统处于极限环稳定区 I,即此时 NES 具有比较好的抑制效果。当 NES 的位置逐渐往翼后缘处移动,即相对位置 d 逐渐增大时,颤振系统逐渐由稳定区过渡至部分稳定区 II、振荡区 III 和部分稳定区 IV。因此, NES 位置越靠近机翼前缘越容易使系统稳定。同时,不同阻尼比情况下, NES 位置对系统极限环振荡的抑制作用不同:当阻尼比小于 0.06 时,相对位置 d 小于 -0.01 即可使系统稳定;而当阻尼比在 0.1 ~ 0.16 时,相对位置 d 小于 -0.05 才能使系统稳定。说明阻尼比越大,对于 NES 的位置要求更苛刻,越需要其位置靠近机翼前缘。

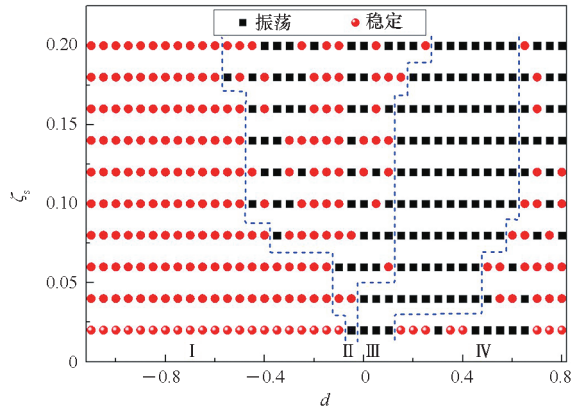


图 5 不同阻尼比和相对位置时的极限环振荡抑制情况
Fig. 5 LCO suppression under different damping ratios and relative positions

2.3 NES 参数对极限环振荡临界点的影响

本小节研究不同飞行速度情况下, NES 对颤振系统极限环振荡的抑制效果,分析 NES 对颤振系统极限环振荡临界速度的抑制作用。

图 6 为颤振系统俯仰方向振动幅值随飞行无量纲速度的变化情况。由图 6 可以看出,在无量纲速度小于 130 时,无控颤振系统的振动响应均接近于零,当速度达到 130 时,系统的振动响应幅值突升至 0.099,系统开始出现不稳定振荡,随着速度的继续增加,系统振动响应幅值逐渐增大,因此颤振系统的极限环振荡临界速度为 130。当采用了 NES ($\omega_p = 5.0, d = -0.9, \mu_s = 0.05, \zeta_s =$

0.1)对颤振系统进行控制后,系统在无量纲速度达到138时才产生极限环振荡,振幅为0.11,因此此时极限环振荡的临界速度为138,相比于原系统提高了约6.2%。

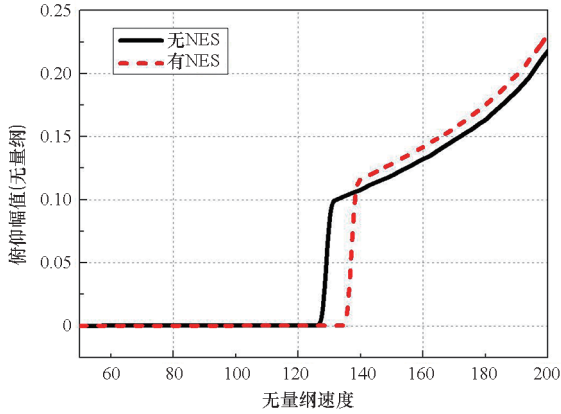


图6 颤振系统振荡幅值随速度的变化曲线
Fig.6 Variation of the oscillation amplitude of the flutter system with velocity

分析了颤振系统的极限环振荡临界速度随NES自振频率比的变化情况,如图7所示。由图7可以看出,极限环振荡临界速度随着NES自振频率比会有一些的变化,且随其位置变化规律有所不同。当NES位于机翼前缘时($d = -1.1$),其极限环振荡临界速度随着自振频率逐渐增大:当NES自振频率比由5.0增大至8.0,其极限环振荡临界速度由161.0增大到178.6,相对于无控系统其临界速度提升幅度逐渐提高,由提升23.8%增大至提升37.4%,极限环振荡抑制效果明显增强。当 $d = -0.9$ 时,随着自振频率比由5.0增大至8.0,其极限环振荡临界速度由141.6增大到151.8,临界速度由提升8.9%增大至提升16.8%。而当NES位于 $d = -0.7$ 和 $d = -0.5$

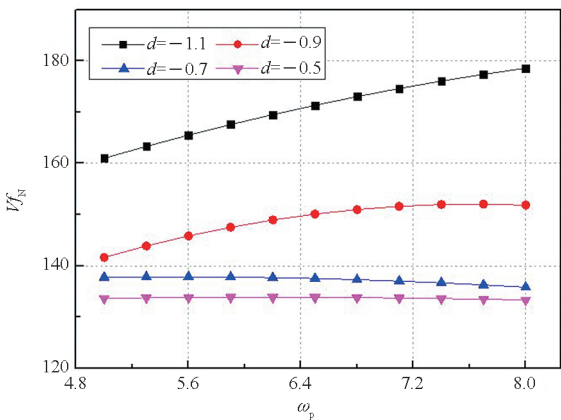


图7 极限环振荡临界速度随NES自振频率比的变化曲线
Fig.7 Variation of the critical velocity of LCO with natural frequency ratio of NES

时,颤振临近速度随着自振频率比的变化并不大。因此,在NES位置靠近机翼前缘($d = -1.1$)时,增大自振频率会使颤振抑制效果有明显的提升,而在NES位置离机翼前缘较远时,改变自振频率比并不能有效提升其抑制效果。

图8给出了极限环振荡临界速度随NES质量比的变化趋势。由图8可以看出,随着质量比的增加,极限环振荡临界速度随之增大,NES的抑制作用更加明显。质量比由0.03逐渐增大至0.2时,在相对位置 $d = -0.5$ 时,极限环振荡临界速度由128.8增大至148.0,临界速度提高了19.2;在相对位置 $d = -0.7$ 时,极限环振荡临界速度由130提升至173.2,提升了33.2%;而当相对位置 $d = -0.9$ 时,极限环振荡临界速度由132.3提升至208.2,相对于无控系统其临界速度由提升1.8%增大至60.2%;当相对位置 $d = -1.1$ 时,极限环振荡临界速度由133.3提升至224.2,相对于无控系统其临界速度由提升2.5%增大至提升72.5%。因此,质量比的增大,可以明显提高颤振抑制的效果,提升颤振系统极限环振荡的临界速度。

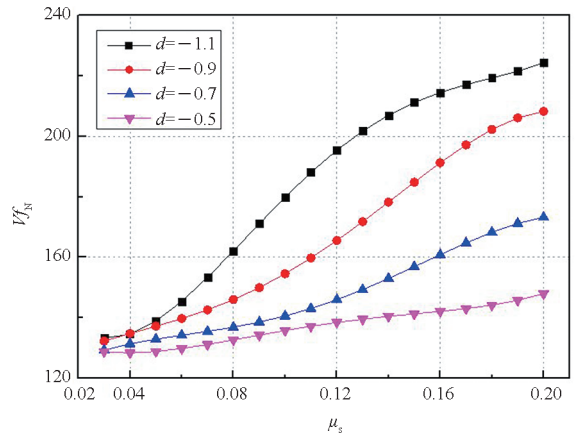


图8 极限环振荡临界速度随NES质量比的变化曲线
Fig.8 Variation of critical velocity of LCO with NES mass ratio

分析了不同阻尼比情况下颤振系统极限环振荡临界速度的变化情况,如图9所示。由图9可以看出,随着阻尼比的增大,非线性颤振临界速度逐渐减小。阻尼比由0.06增大至0.2时,当相对位置 $d = -0.5$ 时,极限环振荡临界速度由137.6下降至132.1,具有NES控制的颤振临界速度提升比例由5.8%下降至1.6%;当 $d = -0.7$ 时,临界速度由144.2下降至134.3,临界速度提升比例由10.9%下降至3.3%;当相对位置 $d = -0.9$ 时,极限环振荡临界速度由160.2下降至141.9,

提升比例由 23.2% 下降至 9.2% ; 当相对位置 $d = -1.1$ 时, 临界速度由 198.7 下降至 160.5, 提升比例由 52.8% 下降至 23.5%。因此, NES 的阻尼比越小, 其颤振系统的极限环振荡抑制效果越好。

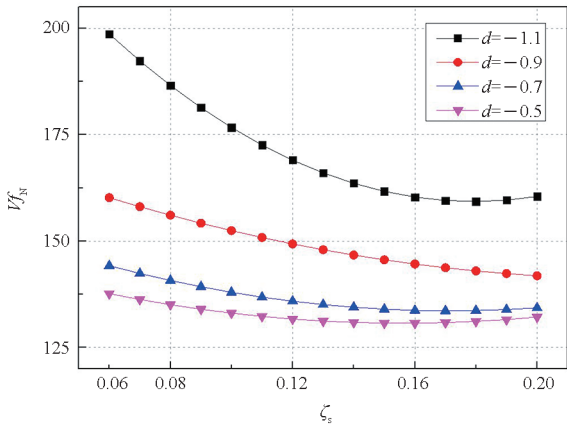


图 9 极限环振荡临界速度随 NES 阻尼比的变化曲线

Fig. 9 Variation of critical velocity of LCO with NES damping ratio

3 结论

本文将非线性能量阱技术应用于间隙非线性机翼颤振系统的极限环振荡抑制中, 研究了 NES 参数对极限环振荡临界速度的提升效果及影响规律, 主要得出以下结论:

1) 在特定参数情况下, NES 对极限环振荡有很好的抑制效果, 可以将原本产生极限环振荡的不稳定系统变为稳定, 使其振动响应迅速收敛。

2) 在不同的 NES 参数情况下, 颤振系统的振动响应会呈现稳定区、部分稳定区和振荡区三种情况。阻尼比越大, 可以在越小的自振频率比情况下使系统进入稳定区, 但对于 NES 的位置要求更苛刻, 越需要其位置靠近机翼前缘。而阻尼比越小, 使颤振系统极限环振荡进入稳定区所需的 NES 质量越小。

3) NES 参数对极限环振荡临界速度有较大影响。在 NES 位置靠近机翼前缘时, 增大自振频率可以使颤振系统极限环振荡临界速度有明显提升。而增大 NES 质量比以及减小阻尼比, 均可以提高极限环振荡临界速度, 提高颤振系统稳定裕度。

非线性能量阱技术在间隙非线性机翼颤振抑制方面具有较好的效果, 为机翼的结构设计以及颤振设计提供了新的思路, 在超音速飞行器、高超声速飞行器等领域具有广阔的应用前景。后续研

究可瞄准非线性能量阱在高速机翼颤振抑制时的具体形式和具体结构, 开展一定的试验验证, 为其最终应用奠定基础。

参考文献 (References)

- [1] PADMANABHAN M A, DOWELL E H. Computational study of aeroelastic response due to freeplay and flight loads [J]. AIAA Journal, 2021, 59(7): 2793–2799.
- [2] PADMANABHAN M A, DOWELL E H. Gust response computations with control surface freeplay using random input describing functions [J]. AIAA Journal, 2020, 58(7): 2899–2908.
- [3] HE H N, TANG H, YU K P, et al. Nonlinear aeroelastic analysis of the folding fin with freeplay under thermal environment [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(9): 2357–2371.
- [4] LAURENSEN R M, TRN R M. Flutter analysis of missile control surfaces containing structural nonlinearities [J]. AIAA Journal, 1980, 18(10): 1245–1251.
- [5] TANG D M, DOWELL E H. Experimental and theoretical study for nonlinear aeroelastic behavior of a flexible rotor blade [J]. AIAA Journal, 1993, 31(6): 1133–1142.
- [6] KOUSEN K A, BENDIKSEN O O. Limit cycle phenomena in computational transonic aeroelasticity [J]. Journal of Aircraft, 1994, 31(6): 1257–1263.
- [7] LEE I, KIM S H. Aeroelastic analysis of a flexible control surface with structural nonlinearity [J]. Journal of Aircraft, 1995, 32(4): 868–874.
- [8] ALIGHANBARI H, PRICE S J. The post-Hopf-bifurcation response of an airfoil in incompressible two-dimensional flow [J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 10: 381–400.
- [9] KIM S H, LEE I. Aeroelastic analysis of a flexible airfoil with a freeplay non-linearity [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 193(4): 823–846.
- [10] LEE B H K, PRICE S J, WONG Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos [J]. Progress in Aerospace Sciences, 1999, 35(3): 205–334.
- [11] TANG D M, DOWELL E H. Flutter and limit-cycle oscillations for a wing-store model with freeplay [J]. Journal of Aircraft, 2006, 43(2): 487–503.
- [12] TANG D M, DOWELL E H. Aeroelastic response induced by free play, part 1: theory [J]. AIAA Journal, 2011, 49(11): 2532–2542.
- [13] VASCONCELLOS R, ABDELKEFI A, HAJJ M R, et al. Grazing bifurcation in aeroelastic systems with freeplay nonlinearity [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(5): 1611–1625.
- [14] VASCONCELLOS R, ABDELKEFI A, MARQUES F D, et al. Representation and analysis of control surface freeplay nonlinearity [J]. Journal of Fluids and Structures, 2012, 31: 79–91.
- [15] MARSDEN C C, PRICE S J. The aeroelastic response of a wing section with a structural freeplay nonlinearity: an experimental investigation [J]. Journal of Fluids and Structures, 2005, 21(3): 257–276.
- [16] VASCONCELLOS R M, ABDELKEFI A, HAJJ M R, et al. Airfoil control surface discontinuous nonlinearity experimental assessment and numerical model validation [J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 22(6): 1633–1644.

- [17] ASJES D, DIWADKAR A, VAIDYA U, et al. Development and system analysis of a two-dimensional rotational freeplay nonlinearity model[J]. *Journal of Aircraft*, 2016, 53(3): 860–865.
- [18] CHEN Y M, CHEN D H, LIU J K. Subcritical limit cycle in airfoil aeroelastic system with freeplay: prediction and mechanism [J]. *AIAA Journal*, 2019, 57(10): 4482–4489.
- [19] DING H, CHEN L Q. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100: 3061–3107.
- [20] WANG J J, WANG B, WIERSCHEM N E, et al. Dynamic analysis of track nonlinear energy sinks subjected to simple and stochastic excitations [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2020, 49(9): 863–883.
- [21] HABIB G, ROMEO F. Tracking modal interactions in nonlinear energy sink dynamics via high-dimensional invariant manifold[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 103: 3187–3208.
- [22] AL-SHUDEIFAT M A, SAEED A S. Frequency-energy plot and targeted energy transfer analysis of coupled bistable nonlinear energy sink with linear oscillator [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 105: 2877–2898.
- [23] TSIATAS G C, KARATZIA D A. Reliability analysis of the hysteretic nonlinear energy sink in shock mitigation considering uncertainties [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2020, 26(23/24): 2261–2273.
- [24] YANG Y, LI Y Y, ZHANG S. Vibration suppression of a dual-rotor-bearing coupled system by using a nonlinear energy sink [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, 35(6): 2303–2312.
- [25] SHAO J W, YANG J M, WU X, et al. Nonlinear energy sink applied for low-frequency noise control inside acoustic cavities: a review [J]. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*, 2021, 40(3): 1453–1472.
- [26] MOSLEMI A, KHADEM S E, KHAZAEI M, et al. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of an axially moving beam with a nonlinear energy sink [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104: 1955–1972.
- [27] BLANCHARD A, BERGMAN L A, VAKAKIS A F. Vortex-induced vibration of a linearly sprung cylinder with an internal rotational nonlinear energy sink in turbulent flow [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99: 593–609.
- [28] JIN Y, HOU S, YANG T Z. Cascaded essential nonlinearities for enhanced vibration suppression and energy harvesting[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 103: 1427–1438.
- [29] LEE Y S, VAKAKIS A F, BERGMAN L A, et al. Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: theory[J]. *AIAA Journal*, 2007, 45(3): 693–711.
- [30] LEE Y S, KERSCHEN G, MCFARLAND D M, et al. Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments [J]. *AIAA Journal*, 2007, 45(10): 2391–2400.
- [31] PACHECO D R Q, MARQUES F D, FERREIRA A J M. Panel flutter suppression with nonlinear energy sinks: numerical modeling and analysis[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, 106: 108–114.
- [32] ZHOU J, XU M L, XIA W. Passive suppression of panel flutter using a nonlinear energy sink[J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020, 2020: 8896744.
- [33] TIAN W, LI Y M, YANG Z C, et al. Suppression of nonlinear aeroelastic responses for a cantilevered trapezoidal plate in hypersonic airflow using an energy harvester enhanced nonlinear energy sink[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 172: 105417.
- [34] ZHOU J, XU M L, YANG Z C, et al. Suppressing nonlinear aeroelastic response of laminated composite panels in supersonic airflows using a nonlinear energy sink[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(2): 376–385.
- [35] 张文帆, 张家忠, 曹盛力. NES对二维机翼气弹不稳定性的抑制作用[J]. *航空学报*, 2016, 37(11): 3249–3262. ZHANG W F, ZHANG J Z, CAO S L. Suppression of aeroelastic instability of 2-D wing by nonlinear energy sinks[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2016, 37(11): 3249–3262. (in Chinese)
- [36] 陈恒, 王扬渝, 金江明. 带控制截面机翼结构基于非线性能量阱的颤振抑制[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(5): 459–466. CHEN H, WANG Y Y, JIN J M. Flutter suppression for a rigid airfoil with a control surface based on nonlinear energy sink[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 459–466. (in Chinese)
- [37] GUO H L, CAO S Q, YANG T Z, et al. Aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(2): 857–872.

(编辑:熊立桃,杨琴)