

碳纳米管增强复合材料 Timoshenko 梁弯曲和屈曲行为分析

吴栋^{1,2}, 张大鹏^{1,2}, 于宝石^{1,2}, 雷勇军^{1,2,3*}

(1. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073;

2. 空天任务智能规划与仿真湖南省重点实验室, 湖南长沙 410073; 3. 火箭军工程大学, 陕西西安 710025)

摘要: 考虑碳纳米管 (carbon nanotubes, CNTs) 的尺度效应, 研究宏观尺度下碳纳米管增强复合材料 (carbon nanotubes reinforced composites, CNTRCs) 梁的弯曲和屈曲行为。在 EMT (Eshelby-Mori-Tanaka) 方法的基础上, 利用非局部理论提出了可表征 CNTs 尺度效应的非局部 EMT 本构模型。根据 Timoshenko 梁理论, 采用哈密顿原理得到 CNTRCs 梁的静力学微分方程和边界条件。求解简支边界条件下 CNTRCs 梁的弯曲响应和极限屈曲载荷, 并与文献进行对比验证所建模型和求解方法的正确性。分析了 CNTs 的尺度效应参数和体积分数以及复合材料梁的长细比等因素对简支 CNTRCs 梁弯曲响应和极限屈曲载荷的影响规律。结果表明, 考虑 CNTs 的尺度效应会削弱结构等效刚度, 且 CNTs 体积分数和尺度效应参数对大长细比 CNTRCs 梁的弯曲响应和极限屈曲载荷的影响幅度较大。

关键词: 非局部理论; Eshelby-Mori-Tanaka 方法; 弯曲; 屈曲; 碳纳米管增强复合材料

中图分类号: O345 文献标志码: A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1001-2486(2024)03-070-09



听语音
与作者互动
聊科研

Bending and buckling behavior analysis of the carbon nanotubes reinforced composites Timoshenko beams

WU Dong^{1,2}, ZHANG Dapeng^{1,2}, YU Baoshi^{1,2}, LEI Yongjun^{1,2,3*}

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Hunan Key Laboratory of Intelligent Planning and Simulation for Aerospace Missions, Changsha 410073, China;

3. Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: Bending and buckling behavior of the macro CNTRCs (carbon nanotubes reinforced composites) beam was studied considering the scale effect of CNTs (carbon nanotubes). Based on the EMT (Eshelby-Mori-Tanaka) method and using nonlocal theory to characterize the scale effect of CNTs, the nonlocal EMT constitutive model was established. According to the Timoshenko beam theory, the static differential equations and boundary conditions of CNTRCs beams were derived through Hamilton principle. Bending response and ultimate buckling load of CNTRCs beams at S-S (simply supported) edges were obtained and compared with the literature to verify the correctness of the proposed model and solution method. Influences of the scale effect parameters and volume fraction of CNTs and the slenderness ratio of composite beams on the bending response and ultimate buckling load of S-S CNTRCs beams were analyzed. Results show that the equivalent stiffness of the CNTRCs beam is weakened by considering the scale effect of CNTs, and the volume fraction of CNTs and the scale effect parameter both have a great impact on the bending response and ultimate buckling load of the CNTRCs beam with a large slenderness ratio.

Keywords: nonlocal theory; Eshelby-Mori-Tanaka method; bending; buckling; carbon nanotubes reinforced composites

碳纳米管 (carbon nanotubes, CNTs) 的发现开启了纳米复合材料领域的新时代^[1], 因其具有优异的力学、化学和物理性能, 被业界认为是复合材料的理想增强相材料^[2]。在基体中掺入 CNTs 制成碳纳米管增强复合材料 (carbon nanotubes reinforced composites, CNTRCs) 可显著提高基体的

强度、刚度、韧性、导电性和热稳定性^[1], 因此 CNTRCs 在几乎所有的工业领域都有广阔的应用前景^[3], 同时具有巨大的潜在经济价值。采用理论方法对 CNTRCs 的力学行为开展研究可对其在工业上的应用做出指导, 并进一步促进其推广应用。

收稿日期: 2022-03-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11902348, 11872372); 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5650); 国防科技大学科研计划资助项目(ZK20-27); 国防科技大学自主创新科学基金资助项目(22-ZZCX-077)

第一作者: 吴栋(1997—), 男, 安徽阜阳人, 博士研究生, E-mail: wudongzhuqiu19@163.com

*通信作者: 雷勇军(1968—), 男, 湖南常德人, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: leiyj108@nudt.edu.cn

CNTRCs 理论研究的主要方法有连续介质力学建模法和分子动力学仿真法,其中当结构尺寸较大时,分子动力学仿真所需的计算资源和时间成本较高^[4],因此国内外学者多基于分子动力学仿真结果建立 CNTRCs 结构的连续介质力学模型。CNTs 等纳米材料具有明显的尺度效应^[5],经典的连续介质力学模型未考虑纳米材料的尺度效应而无法准确描述 CNTs 增强相的力学行为。为此,学者们对经典的连续介质力学模型进行改进,提出了非局部理论^[6]、表面弹性理论^[7]、应变梯度理论^[8]和修正的偶应力理论^[9]等。其中,非局部理论与分子动力学仿真结果吻合较好^[10],被广泛应用于研究纳米结构的振动^[11-12]、弯曲^[13-14]、屈曲^[15-16]以及波的传播^[17-18]等力学行为。

研究 CNTRCs 结构的力学行为主要有两种方法^[19]:EMT (Eshelby-Mori-Tanaka) 方法和混合法则。Shen^[20]通过将传统的混合法则得到的 CNTs 弹性模量与分子动力学仿真结果进行匹配建立了用于 CNTRCs 力学行为研究的混合法则模型,该方法因具有显著的简便性被广大学者用于研究 CNTRCs 的力学特性^[21-22]。然而,混合法则的缺陷是未考虑到 CNTs 的固有特性,如团聚效应、波纹和尺度效应等。以 Eshelby 所建立的等效弹性夹杂理论为基础,Mori 和 Tanaka 提出了复合材料内部的平均应力计算方法,构成了 EMT 方法理论和求解框架,使其计算更为简便,从而促进其在复合材料领域的推广应用。Odegard 等^[23]首次将 EMT 方法运用到分析 CNTRCs 结构的力学行为,并与实验结果进行对比验证了该方法的正确性。自此以后,EMT 方法被广大学者应用于 CNTRCs 结构的力学行为研究中,特别是与非局部理论相结合研究 CNTRCs 纳米结构的力学特性。Daghigh 等利用 EMT 方法得到了 CNTRCs 的等效弹性参数,在此基础上基于非局部理论研究了黏弹性地基上 CNTRCs 纳米矩形板的自由振动^[24]和静力学响应特性^[25]。Arani 等^[26]则基于非局部理论和 EMT 方法研究了 CNTRCs 微米板的非线性振动问题。Ebrahimi 等^[27]采用 EMT 方法获得了功能梯度 CNTRCs 的等效弹性参数,并基于非局部应变梯度理论研究了热载荷下功能梯度 CNTRCs 纳米梁的波传播特性。

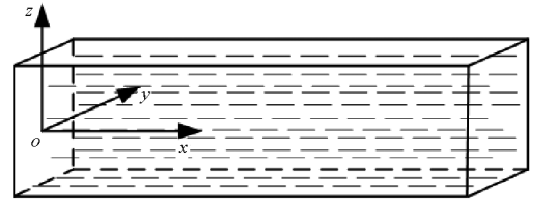
然而,目前考虑 CNTs 的尺度效应研究宏观 CNTRCs 结构力学行为的报道相对较少。本文采用非局部理论考虑 CNTs 的尺度效应,将其与 EMT 方法相结合建立适用于 CNTRCs 力学行为分析的非局部 EMT 本构模型。在此基础上,基于

Timoshenko 梁模型和哈密顿原理建立 CNTRCs 梁的静力学微分方程和边界条件。最后,分析 CNTs 的尺度效应和体积分数以及复合材料梁的长细比对两端简支 CNTRCs Timoshenko 梁弯曲和屈曲行为的影响。一方面利用非局部理论对经典的 EMT 方法进行改进,使其能计及宏观复合材料中纳米增强相的尺度效应;另一方面相关研究成果可为 CNTRCs 的应用和优化设计提供理论指导。

1 CNTRCs Timoshenko 梁静力学建模

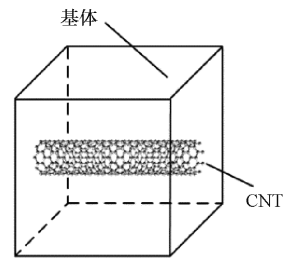
1.1 非局部 EMT 本构模型

假设基体中均布大量单向对齐的 CNTs, CNTs 的方向均垂直于 CNTRCs 的左端面,建立如图 1 所示的 CNTRCs 的代表性体积元 (representative volume element, RVE) 模型,该 RVE 模型相对于宏观 CNTRCs 无限小,相对于 CNTs 无限大。



(a) 宏观 CNTRCs 梁

(a) Macroscopic CNTRCs beam



(b) RVE 模型

(b) RVE model

图 1 CNTRCs 梁及其 RVE 模型

Fig. 1 CNTRCs beam and its RVE model

基于非局部理论^[6]和 EMT 方法原理^[28]可得 CNTs 和基体的本构方程分别为

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{C}_r \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{\sigma}_r$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_m$ 分别表示 CNTs 的非局部应力张量和基体的局部应力张量; \mathbf{C}_r 和 \mathbf{C}_m 分别表示 CNTs 和基体的刚度矩阵; $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 分别表示 CNTs 和基体的应变张量; e_0 为材料常数,可通过实验或分子动力学仿真的方法得到; a 为材料的内部特征

尺寸; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子。

基体的平均应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 CNTRCs 的平均应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间的关系^[29]为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (f_r \mathbf{A}_{\text{EMT}} + f_m \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

其中: \mathbf{A}_{EMT} 是四阶 EMT 张量, 且有 $\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_{\text{EMT}} \boldsymbol{\varepsilon}_m$, 详见文献[30]; \mathbf{I} 为单位矩阵; f_m 和 f_r 分别表示 CNTRCs 中基体和 CNTs 的体积分, 且有 $f_m + f_r = 1$ 。

假设基体与 CNTs 之间完美结合, 根据 EMT 方法可将 CNTRCs 的平均应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和平均应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = f_m \boldsymbol{\sigma}_m + f_r \boldsymbol{\sigma}_r \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = f_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + f_r \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (5)$$

将式(1)~(3)代入式(4)和式(5), 可得考虑尺度效应的非局部 EMT 本构模型为

$$\begin{aligned} & [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \boldsymbol{\sigma} \\ &= [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] f_m \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + f_r \mathbf{C}_r \boldsymbol{\varepsilon}_r \\ &= (f_m \mathbf{C}_m + f_r \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{\text{EMT}}) \boldsymbol{\varepsilon}_m - (e_0 a)^2 \nabla^2 f_m \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - (e_0 a)^2 \mathbf{C}_n \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{C} = (f_m \mathbf{C}_m + f_r \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{\text{EMT}}) (f_r \mathbf{A}_{\text{EMT}} + f_m \mathbf{I})^{-1}$, $\mathbf{C}_n = f_m \mathbf{C}_m (f_r \mathbf{A}_{\text{EMT}} + f_m \mathbf{I})^{-1}$; 且有^[31]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k+m & l & k-m & 0 & 0 & 0 \\ l & n & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & l & k+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, k, l, m, n 和 p 为 CNTRCs 的 Hill 弹性模量。

值得注意的是, 本节以 CNTRCs 为对象对非局部 EMT 本构模型的构建过程进行了阐述, 该模型同样可适用于其他纳米纤维增强复合材料的力学行为研究。

1.2 静力学微分方程

图 2 所示为 CNTRCs 梁的几何模型示意图, 采用 Timoshenko 梁模型模拟 CNTRCs 梁, 其长、宽和高分别为 L, b 和 h 。以 CNTRCs 梁左端面中点为原点建立笛卡儿坐标系 $o-xyz$, 其中 x 轴沿 CNTRCs 的中性轴并指向其右端面, z 轴指向 CNTRCs 梁的上端面并与 x 轴正交, y 轴遵循右手螺旋法则。

基于 Timoshenko 梁理论, CNTRCs 梁的位移场可表示为

$$\begin{cases} u_1 = u(x, t) - z\varphi(x, t) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = w(x, t) \end{cases} \quad (8)$$

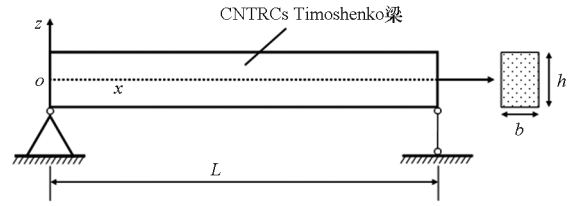


图 2 CNTRCs 梁的几何模型

Fig. 2 Geometric model of CNTRCs beam

其中: $\varphi(x, t)$ 和 $w(x, t)$ 分别表示 CNTRCs 梁横截面绕 y 轴的转角和梁中性轴的横向位移; $u(x, t)$ 为梁中面位移沿 x 轴和 z 轴的分量。

由式(8)可得 CNTRCs 梁的应变场为

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(6), 可得

$$\begin{aligned} & [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xx} \\ &= (e_0 a)^2 c_{n,11} z \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - c_{11} z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (e_0 a)^2 c_{n,11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xz} \\ &= kc_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + (e_0 a)^2 c_{n,13} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $c_{11} = \mathbf{C}(1, 1)$, $c_{13} = \mathbf{C}(5, 5)$, $c_{n,11} = \mathbf{C}_n(1, 1)$, $c_{n,13} = \mathbf{C}_n(5, 5)$; k 取 $\frac{5}{6}$, 为 Timoshenko 梁的剪切修正系数^[32]。

通过哈密顿原理推导得 CNTRCs 梁的静力学微分方程和边界条件, 其解析表达式为

$$\delta \int_0^T [K - (U - W)] dt = 0 \quad (12)$$

式中: K 表示 CNTRCs 梁的动能; U 表示 CNTRCs 梁的应变能; W 表示施加在 CNTRCs 梁上外力所做的功。

CNTRCs 梁的动能在时域 $[0, T]$ 内的一阶变分可表示为

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T K dt &= \int_0^T \int_0^L \rho \left(I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi + A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dx dt + \\ & \int_0^T \int_0^L \rho \left(A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u \right) dx dt \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $I = I_y = \int_A z^2 dA$ 为 CNTRCs 梁横截面相对于 y 轴的惯性矩; A 为 CNTRCs 梁的横截面积; ρ 为 CNTRCs 梁的密度。

CNTRCs 梁的应变能在时域 $[0, T]$ 内的一阶变分可表示为

$$\delta \int_0^T U dt = \int_0^T \int_0^L \left[\left(-Q + \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta \varphi \right] dx dt - \int_0^T \int_0^L \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \delta w + \frac{\partial N}{\partial x} \delta u \right] dx dt + \int_0^T (N \delta u + Q \delta w - M \delta \varphi) \Big|_{x=0}^{x=L} dt \quad (14)$$

式中,

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA \\ M = \int_A \sigma_{xx} z dA \\ Q = \int_A \sigma_{xz} dA \end{cases} \quad (15)$$

外力对 CNTRCs 所做的功在时域 $[0, T]$ 内的一阶变分可表示为

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta W dt &= \int_0^T \int_0^L (q \delta w + f \delta u) dx dt - \int_0^T \int_0^L \bar{N} \frac{d^2 w}{dx^2} \delta w dx dt + \int_0^T \left(\bar{N} \frac{dw}{dx} \delta w - \bar{M} \delta \varphi \right) \Big|_0^L dt + \int_0^T (\bar{N} \delta u + \bar{V} \delta w) \Big|_0^L dt \end{aligned} \quad (16)$$

式中: f 和 q 分别表示单位长度载荷沿 x 轴和 z 轴的分量; \bar{N} 和 \bar{V} 分别表示施加在 CNTRCs 梁上的轴向力和横向剪切力; \bar{M} 表示施加在 CNTRCs 梁两端的弯矩。

将式(13)、式(14)和式(16)代入式(12),并考虑 $\delta \varphi$ 和 δw 在 $x \in [0, L]$ 和 $t \in [0, T]$ 内的任意性,可得 CNTRCs 梁的静力学微分方程为

$$\delta u: \frac{\partial N}{\partial x} + f = 0 \quad (17)$$

$$\delta w: \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x) - \bar{N} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (18)$$

$$\delta \varphi: Q - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

同时可得边界条件为

$$\begin{cases} Q - \bar{N} \frac{dw}{dx} = \bar{V} \text{ 或 } w = w_0 & x = 0, L \\ M = \bar{M} \text{ 或 } \varphi = \varphi_0 & x = 0, L \\ N = \bar{N} \text{ 或 } u = u_0 & x = 0, L \end{cases} \quad (20)$$

其中,下标“0”表示各物理量的初始值。

由式(10)、式(11)和式(15)可得

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] N = c_{11} A \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 c_{n,11} A \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (21)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] M = (e_0 a)^2 c_{n,11} I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - c_{11} I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (22)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] Q = k c_{13} A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + (e_0 a)^2 c_{n,13} A \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (23)$$

为了简化计算和分析,引入以下无量纲参数:

$$\alpha = \frac{e_0 a}{L}, \eta = \frac{L}{h}, \bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{u} = \frac{u}{L}, \bar{b} = \frac{b}{L}, \bar{c}_{13} = \frac{c_{13}}{c_{11}}, \bar{c}_{n,11} = \frac{c_{n,11}}{c_{11}}, \bar{c}_{n,13} = \frac{c_{n,13}}{c_{11}}, \bar{q} = \frac{q}{c_{11} L}, \bar{f} = \frac{f}{c_{11} L}, \bar{N}_{nd} = \frac{\bar{N}}{c_{11} L^2} \circ$$

将式(21)~(23)及上述参数代入式(17)~(19),可得 CNTRCs 梁静力学微分方程的无量纲表达式为

$$\frac{\bar{b}}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\bar{b} \alpha^2 \bar{c}_{n,11}}{\eta} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x}^4} + \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \right) \bar{f} = 0 \quad (24)$$

$$\left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \right) \left(\bar{q} - \bar{N}_{nd} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{k \bar{b} \bar{c}_{13}}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{k \bar{b} \bar{c}_{13}}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{b} \alpha^2 \bar{c}_{n,13}}{\eta} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{k \bar{b} \bar{c}_{13}}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \varphi \right) + \frac{\bar{b} \alpha^2 \bar{c}_{n,13}}{\eta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} \right) + \frac{\bar{b}}{12 \eta^3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} - \alpha^2 \bar{c}_{n,11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \bar{x}^4} \right) = 0 \quad (26)$$

2 简支 CNTRCs 梁的弯曲和屈曲响应求解

2.1 弯曲响应求解

对于 CNTRCs 梁的弯曲问题,其长度方向受到均布载荷 \bar{q} 且载荷方向平行于 z 轴,即 $f = \bar{N} = \bar{V} = \bar{M} = 0$;此外,由式(24)可知 $\bar{u}(\bar{x}) = 0$ 恒成立。

由式(20)可得简支 CNTRCs 梁的边界条件为

$$\begin{cases} \bar{w} \Big|_{\bar{x}=0} = \bar{w} \Big|_{\bar{x}=1} = 0 \\ M \Big|_{\bar{x}=0} = M \Big|_{\bar{x}=1} = 0 \\ \bar{u} \Big|_{\bar{x}=0} = \bar{u} \Big|_{\bar{x}=1} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

可将式(25)和式(26)的解写为傅里叶级数的形式:

$$\bar{w}(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin(\beta \bar{x}) \quad (28)$$

$$\varphi(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \cos(\beta \bar{x}) \quad (29)$$

其中: Φ_n 和 W_n 为傅里叶系数; $\beta = n\pi$ 。

同样地,可将均布载荷 $\bar{q}(\bar{x})$ 表示为

$$\bar{q}(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\beta \bar{x}) \quad (30)$$

式中, Q_n 为傅里叶系数,其表达式^[33]为

$$Q_n = \frac{2q_0}{\beta L c_{11}} [1 - \cos(n\pi)] \quad (31)$$

将式(28) ~ (30) 代入式(25) 和式(26), 可得

$$\begin{bmatrix} D_{11}^d & D_{12}^d \\ D_{21}^d & D_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = -Q_n \begin{bmatrix} M_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

式中:上标“d”表示 CNTRCs 梁的弯曲问题;且有

$$\begin{cases} D_{11}^d = -\frac{\bar{b}\beta^2}{\eta} f_1 \\ D_{12}^d = D_{21}^d = \frac{\bar{b}\beta}{\eta} f_1 \\ D_{22}^d = -\frac{\bar{b}}{\eta} \left(f_1 + \frac{\beta^2}{12\eta^2} f_2 \right) \\ M_{11} = f_3 \end{cases} \quad (33)$$

其中,

$$\begin{cases} f_1 = k\bar{c}_{13} + \alpha^2\beta^2\bar{c}_{n,13} \\ f_2 = 1 + \alpha^2\beta^2\bar{c}_{n,11} \\ f_3 = 1 + \alpha^2\beta^2 \end{cases} \quad (34)$$

通过求解式(32), 可得

$$W_n = \frac{\eta Q_n f_3 (\beta^2 f_2 + 12\eta^2 f_1)}{\bar{b}\beta^4 f_2 f_1} \quad (35)$$

$$\Phi_n = \frac{12\eta^3 Q_n f_3}{\bar{b}\beta^3 f_2} \quad (36)$$

将式(35) 和式(36) 代入式(28) 和式(29), 可得 CNTRCs 梁不同位置上的挠度和转角。

2.2 屈曲响应求解

对于 CNTRCs 梁的屈曲问题, 其受到轴向压力 \bar{N} 的作用, 即 $f = q = \bar{V} = \bar{M} = 0$ 。CNTRCs 梁屈曲问题的微分方程可表示为

$$\begin{bmatrix} D_{11}^k & D_{12}^k \\ D_{21}^k & D_{22}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

式中:上标“k”表示 CNTRCs 梁的屈曲问题;且有

$$\begin{cases} D_{11}^k = \beta^2 \bar{N}_{nd} f_3 - \frac{\bar{b}\beta^2}{\eta} f_1 \\ D_{12}^k = D_{21}^k = \frac{\bar{b}\beta}{\eta} f_1 \\ D_{22}^k = -\frac{\bar{b}}{\eta} \left(f_1 + \frac{\beta^2}{12\eta^2} f_2 \right) \end{cases} \quad (38)$$

通过求解式(37), 可得

$$\bar{N}_{nd}(\beta) = \frac{\bar{b}f_1 f_2 \beta^2}{\eta f_3 (f_2 \beta^2 + 12\eta f_1)} \quad (39)$$

式(39) 中的最小值表示 CNTRCs 梁的极限屈曲载荷。

2.3 数值求解及验证

本小节中将上述模型与文献中结果进行对比

以验证模型和求解方法的正确性。

由式(28) 和式(29) 可以看出, 弯曲和屈曲响应求解的精确度受求和项 n 的影响。表 1 所示为不同的求和项 n 对应的 CNTRCs 梁中点的挠度和端面的转角, 由表 1 可以看出式(28) 和式(29) 收敛。此外, 当求和项 n 取 90 时, CNTRCs 梁挠度和转角的解具有足够的精度, 因此在后续的分析中取求和项 $n = 90$ 。

表 1 不同求和项 n 对应的 CNTRCs 梁中点的挠度和端面的转角

Tab. 1 Deflection of midpoint and rotation of end face of CNTRCs beam corresponding to different summation term n

n	w/mm	φ
30	34.097 0	$5.175\ 62 \times 10^{-2}$
50	34.097 0	$5.175\ 67 \times 10^{-2}$
70	34.097 0	$5.175\ 68 \times 10^{-2}$
90	34.097 0	$5.175\ 68 \times 10^{-2}$

Şimşek 等^[34] 和 Aydogdu^[35] 得到了 CNTRCs Timoshenko 梁的弯曲和屈曲响应并分析了相关参数的影响, 但均未考虑 CNTs 尺度效应的影响。当尺度效应参数 $\alpha = 0$ 时, 本文所建模型可退化为文献[34] 和文献[35] 中的 CNTRCs Timoshenko 梁模型。表 2 和表 3 所示分别为均布载荷下 CNTRCs 梁中点的无量纲挠度 \bar{w}_{ref} 和轴向载荷下 CNTRCs 梁的无量纲极限屈曲载荷 \bar{N}_{ref} 。其中, 无量纲挠度和无量纲极限屈曲载荷的表达式为

$$\begin{cases} \bar{w}_{\text{ref}} = \frac{100wE_m I}{q_0 L^4} \\ \bar{N}_{\text{ref}} = \bar{N}_{\text{cri}} \frac{L^2}{E_m I} \end{cases} \quad (40)$$

其中: w 为 CNTRCs 梁中点的挠度; q_0 为均布载荷; E_m 为 CNTRCs 的模量; \bar{N}_{cri} 为 CNTRCs 梁的极限屈曲载荷, 由于对参数进行无量纲化处理, 其具体数值不影响最终结果。

表 2 均布载荷下 CNTRCs 梁中点的无量纲挠度

Tab. 2 Dimensionless deflection at midpoint of CNTRCs beams under uniform load

η	\bar{w}_{ref}		
	文献[34]	文献[35]	本文模型
10	1.334 5	1.348 3	1.345 8
20	1.310 2	1.321 8	1.313 0
50	1.303 3	1.314 4	1.303 8

表3 轴向载荷下 CNTRCs 梁的无量纲极限屈曲载荷

Tab.3 Dimensionless limit buckling load of CNTRCs beams under axial load

η	\bar{N}_{ref}		
	文献[34]	文献[35]	本文模型
10	9.622 6	9.622 7	9.540 1
20	9.806 6	9.806 7	9.785 1
50	9.859 4	9.859 5	9.856 0

由表2和表3可知,本文研究求解的弯曲和屈曲响应与文献[34-35]中解最大相对误差绝对值分别为0.846 8%和0.858 4%,足以说明本文所建模型和求解方法的正确性。

3 参数对简支 CNTRCs 梁弯曲、屈曲响应的影晌分析

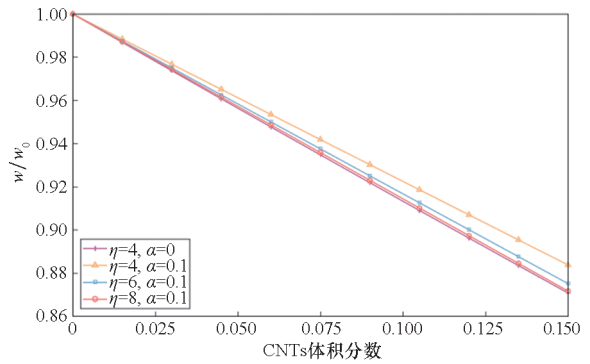
本节分析长细比、尺度效应参数和 CNTs 的体积分数等因素对 CNTRCs 梁弯曲和屈曲响应的影晌规律。基体选用聚苯乙烯树脂^[31],其弹性模量 E_m 和泊松比 ν_m 分别为 1.9 GPa 和 0.3。CNTs 的物理参数^[31]为: $n_r = 450$ GPa, $k_r = 30$ GPa, $m_r = p_r = 1$ GPa, $l_r = 10$ GPa;此外,如无特别说明取 CNTs 体积分数为 0.1。CNTRCs 梁的长 L 、宽 b 和高 h 分别为 1 m、0.2 m 和 0.2 m;均布载荷 $q_0 = -100$ kN/m。

结果的合理性较大程度上取决于尺度效应参数的选取,尺度效应参数的数值可通过将理论计算结果与实验、分子动力学仿真结果进行匹配确定,其数值受到载荷、工况和结构形状等因素的耦合影晌^[36]。目前国内外学者研究结构的尺度效应时,较多分析其选取不同数值时对结构力学响应的影晌,此处参考前人的研究^[37],取尺度效应参数 $\alpha = 0.1$ 。

3.1 体积分数的影晌

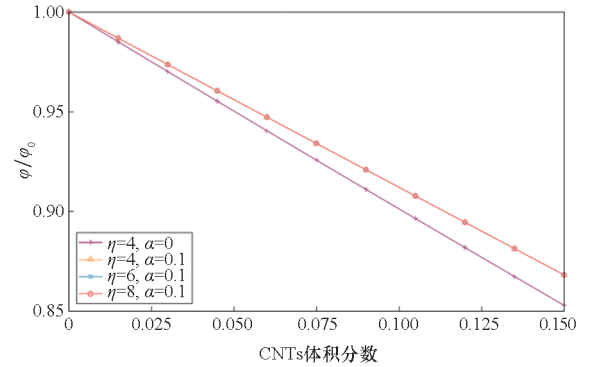
图3所示为 CNTs 的体积分数对 CNTRCs 梁中点挠度比和端面转角比的影响曲线,其中 w_0 和 ϕ_0 分别表示 CNTs 的体积分数为 0 时 CNTRCs 梁中点的挠度和端面的转角。

由于在聚苯乙烯树脂基体中加入 CNTs 后,材料的等效刚度得到增强,因此图3(a)中 CNTRCs 梁中点的挠度随 CNTs 体积分数的增大近似呈线性减小,且最大减幅达到了 12.93% ($\eta = 4, \alpha = 0$)。由图3(a)还可以看出,CNTRCs 梁中点挠度比随尺度效应参数 α 的增大而明显增大,表明考虑 CNTs 的尺度效应后会降低



(a) 中点挠度比

(a) Midpoint deflection ratio



(b) 端面转角比

(b) End face rotation ratio

图3 CNTs 体积分数的影晌曲线

Fig.3 Influence curve of CNTs volume fraction

CNTRCs 梁的等效刚度,为了建立 CNTRCs 结构的精确力学模型,有必要考虑 CNTs 尺度效应的影响。根据式(35)可知,CNTRCs 梁最大挠度正比于 η^3 且反比于其模量,因此当长细比 η 增加时,挠度比 w/w_0 的下降幅度增大,同时表明了 CNTs 体积分数对大长细比 CNTRCs 梁弯曲响应的影晌幅度较大。

由图3(b)可以看出,CNTRCs 梁端面的转角比同样随 CNTs 体积分数的增大近似呈线性减小。图3(b)中 $\alpha = 0.1$ 时, $\eta = 4$ 、 $\eta = 6$ 和 $\eta = 8$ 的曲线重合,是由于转角比与长细比 η 无关(见式(36)),即相同尺度参数下,不同长细比 CNTRCs 梁端面的转角比变化曲线具有相同的变化趋势。

图4所示为 CNTRCs 梁的极限屈曲载荷随 CNTs 体积分数的变化曲线,其中 \bar{N}_{crit0} 表示横轴变量为 0 时梁的极限屈曲载荷。由图4可以看出,CNTRCs 梁的极限屈曲载荷随 CNTs 体积分数的增加近似呈线性增大,但随尺度效应参数 α 的增大而减小。综合图3和图4可知,CNTs 的体积分数对大长细比 CNTRCs 梁的弯曲响应和极限屈曲载荷的影晌幅度较大。

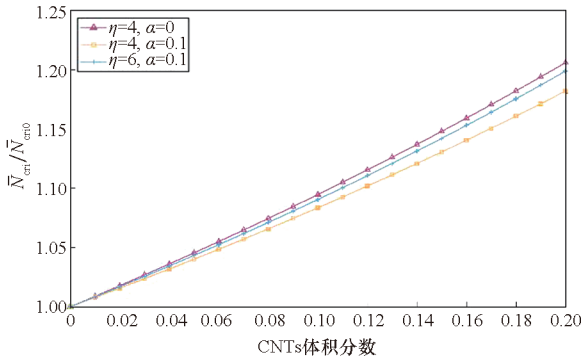
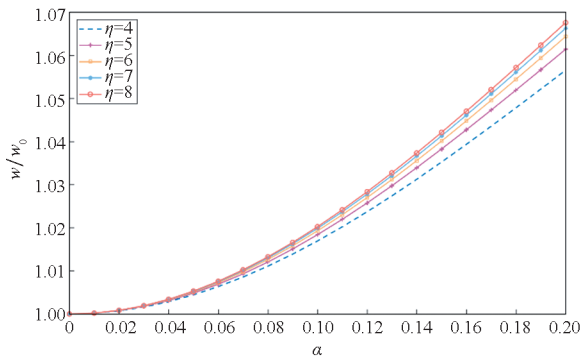


图 4 CNTRCs 梁极限屈曲载荷随 CNTs 体积分数的变化曲线

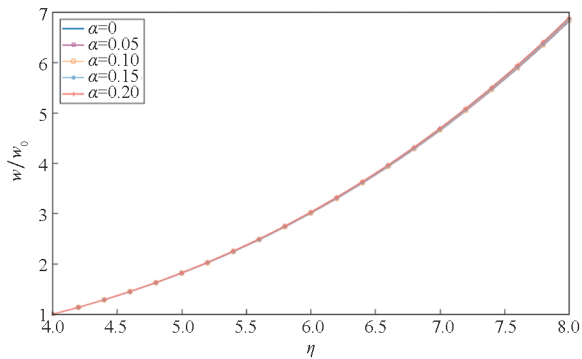
Fig. 4 Variation curves of limit buckling load of CNTRCs beams with CNTs volume fraction

3.2 尺度效应参数和长细比的影响

图 5 所示为 CNTRCs 梁中点的挠度比随尺度效应参数 α 和长细比 η 的变化曲线,其中 w_0 为横坐标值为 0 时对应的 CNTRCs 梁中点的挠度。由图 5 可以看出,CNTRCs 梁中点的挠度比随尺度效应参数和长细比的增大而增大,且增大速度逐渐加快。不同长细比下,当尺度效应参数从 0



(a) 尺度效应参数
(a) Scale effect parameters

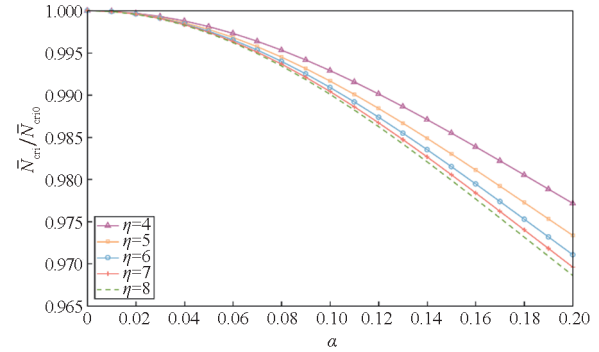


(b) 长细比
(b) Slenderness ratio

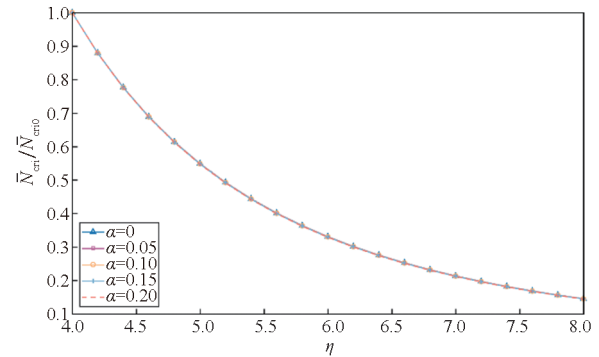
图 5 CNTRCs 梁中点挠度比的变化曲线
Fig. 5 Variation curves of deflection ratio at midpoint of CNTRCs beam

增至 0.2 时,中点挠度比的最小增幅为 5.650% ($\eta=4$),最大增幅为 6.752% ($\eta=8$)。不同尺度效应参数下,长细比对中点挠度比的影响曲线相差较小,但仍可以看出:尺度效应参数对大长细比 CNTRCs 梁弯曲响应的影响幅度较大。

图 6 所示为 CNTRCs 梁的极限屈曲载荷比随尺度效应参数 α 和长细比 η 的变化曲线。由图 6 可以看出,CNTRCs 梁的极限屈曲载荷比随尺度效应参数和长细比的增大而减小,且减小速度随尺度效应参数的增大而增加但随长细比的增大而减小。



(a) 尺度效应参数
(a) Scale effect parameters



(b) 长细比
(b) Slenderness ratio

图 6 CNTRCs 梁的极限屈曲载荷比的变化曲线
Fig. 6 Variation curves of ultimate buckling load ratio of CNTRCs beam

此外,对于不同的长细比,当尺度效应参数从 0 增至 0.2 时,极限屈曲载荷的最小减幅和最大减幅分别为 2.284% ($\eta=4$)和 3.139% ($\eta=8$);不同尺度效应参数下,长细比对极限屈曲载荷的影响幅度基本相同。综合图 5 和图 6 可知,尺度效应参数对大长细比 CNTRCs 梁的弯曲响应和极限屈曲载荷的影响幅度较大。

4 结论

首先考虑 CNTs 的尺度效应建立了 CNTRCs 宏观结构力学行为分析的非局部 EMT 本构模型,

在此基础上,运用 Timoshenko 梁模型和哈密顿原理建立了 CNTRCs 梁的静力学微分方程和边界条件,并求解了简支 CNTRCs 梁的弯曲和屈曲响应。通过与文献结果进行对比验证了所建模型和求解方法的正确性。最后分析 CNTs 的体积分数、尺度效应参数和复合材料梁的长细比对简支 CNTRCs 梁弯曲和屈曲响应的影响规律,主要结论如下:

1) 基体中加入 CNTs 可提高结构等效刚度,但当考虑 CNTs 的尺度效应时会削弱结构等效刚度。

2) CNTRCs 梁的挠度比随尺度效应参数和长细比的增大而增大,且增大速度逐渐加快;其极限屈曲载荷随尺度效应参数和长细比的增大而减小,且减小速度随尺度效应参数的增大而增加但随长细比的增大而减小。

3) CNTs 体积分数和尺度效应参数对大长细比 CNTRCs 梁的弯曲响应和极限屈曲载荷的影响幅度较大;此外,CNTRCs 梁的端面转角比不受长细比的影响。

参考文献 (References)

[1] NURAZZI N M, ASYRAF M R M, KHALINA A, et al. Fabrication, functionalization, and application of carbon nanotube-reinforced polymer composite: an overview [J]. *Polymers*, 2021, 13(7): 1047.

[2] 沈惠申. 功能梯度碳纳米管增强复合材料结构建模与分析研究进展[J]. *力学进展*, 2016, 46(1): 478-505.
SHEN H S. Modeling and analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite structures: a review[J]. *Advances in Mechanics*, 2016, 46(1): 478-505. (in Chinese)

[3] IMTIAZ S, SIDDIQ M, KAUSAR A, et al. A review featuring fabrication, properties and applications of carbon nanotubes (CNTs) reinforced polymer and epoxy nanocomposites [J]. *Chinese Journal of Polymer Science*, 2018, 36(4): 445-461.

[4] CHOWDHURY R, ADHIKARI S, WANG C Y, et al. A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes [J]. *Computational Materials Science*, 2010, 48(4): 730-735.

[5] PONCHARAL P, WANG Z L, UGARTE D, et al. Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes[J]. *Science*, 1999, 283(5407): 1513-1516.

[6] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9): 4703-4710.

[7] GURTIN M E, WEISSMÜLLER J, LARCHÉ F. A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium[J]. *Philosophical Magazine A*, 1998, 78(5): 1093-1109.

[8] MINDLIN R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, 1(4): 417-438.

[9] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(10): 2731-2743.

[10] PHUNG-VAN P, FERREIRA A J M, NGUYEN-XUAN H, et al. An isogeometric approach for size-dependent geometrically nonlinear transient analysis of functionally graded nanoplates[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2017, 118: 125-134.

[11] 张大鹏, 雷勇军. 基于非局部理论的黏弹性基体中压电纳米梁热-机电振动特性[J]. *国防科技大学学报*, 2020, 42(6): 142-149.
ZHANG D P, LEI Y J. Thermo-electro-mechanical vibration analysis of piezoelectric nanobeams embedded in viscoelastic medium based on nonlocal elasticity theory [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2020, 42(6): 142-149. (in Chinese)

[12] 张大鹏, 吴栋, 雷勇军. 黏弹性基体中挠曲电 Timoshenko 纳米梁振动特性分析[J]. *国防科技大学学报*, 2021, 43(6): 8-16.
ZHANG D P, WU D, LEI Y J. Vibration characteristics analysis of flexoelectric Timoshenko nano-beam in viscoelastic medium [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2021, 43(6): 8-16. (in Chinese)

[13] FENG W J, YAN Z, LIN J, et al. Bending analysis of magneto-electro-elastic nanoplates resting on Pasternak elastic foundation based on nonlocal theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(12): 1769-1786.

[14] ZHANG B, SHEN H M, LIU J, et al. Deep postbuckling and nonlinear bending behaviors of nanobeams with nonlocal and strain gradient effects [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(4): 515-548.

[15] BARRETTA R, FABBROCINO F, LUCIANO R, et al. Buckling loads of nano-beams in stress-driven nonlocal elasticity [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, 27(11): 869-875.

[16] MAWPHLANG B R K L L, GHIMIRE M P, RAI D P, et al. Buckling behavior of nonuniform carbon nanotubes using nonlocal elasticity theory and the differential transformation method [J]. *International Nano Letters*, 2021, 11(1): 25-34.

[17] HE D Z, SHI D Y, WANG Q S, et al. Wave propagation in magneto-electro-thermo-elastic nanobeams based on nonlocal theory [J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, 42(11): 601.

[18] ARANI A G, POURJAMSHIDIAN M, AREFI M, et al. Application of nonlocal elasticity theory on the wave propagation of flexoelectric functionally graded (FG) Timoshenko nano-beams considering surface effects and residual surface stress [J]. *Smart Structures and Systems*, 2019, 23(2): 141-153.

[19] SOBHANIARAGH B, NEJATI M, MANSUR W J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2017, 124: 120-133.

[20] SHEN H S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal

- environments[J]. *Composite Structures*, 2009, 91(1): 9–19.
- [21] SAFAEI B, AHMED N A, FATTAHI A M. Free vibration analysis of polyethylene/CNT plates[J]. *European Physical Journal Plus*, 2019, 134(6): 271.
- [22] KE L L, YANG J, KITIPORNCHAI S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(3): 676–683.
- [23] ODEGARD G M, GATES T S, WISE K E, et al. Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites[J]. *Composites Science and Technology*, 2003, 63(11): 1671–1687.
- [24] DAGHIGH H, DAGHIGH V. Free vibration of size and temperature-dependent carbon nanotube (CNT)-reinforced composite nanoplates with CNT agglomeration[J]. *Polymer Composites*, 2019, 40(S2): E1479–E1494.
- [25] DAGHIGH H, DAGHIGH V, MILANI A, et al. Nonlocal bending and buckling of agglomerated CNT-reinforced composite nanoplates[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2020, 183: 107716.
- [26] ARANI A G, JAFARI G S, KOLAHCHI R. Vibration analysis of nanocomposite microplates integrated with sensor and actuator layers using surface SSDPT [J]. *Polymer Composites*, 2018, 39(6): 1936–1949.
- [27] EBRAHIMI F, HAGHI P. Wave propagation analysis of rotating thermoelastically-actuated nanobeams based on nonlocal strain gradient theory[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2017, 30(6): 647–657.
- [28] ESHELBY J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 1957, 241: 376–396.
- [29] MORI T, TANAKA K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions[J]. *Acta Metallurgica*, 1973, 21(5): 571–574.
- [30] MURA T, BARNETT D M. Micromechanics of defects in solids[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50(2): 477.
- [31] SHI D L, FENG X Q, HUANG Y Y, et al. The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites [J]. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2004, 126(3): 250–257.
- [32] YUE Y M, XU K Y, CHEN T. A micro scale Timoshenko beam model for piezoelectricity with flexoelectricity and surface effects [J]. *Composite Structures*, 2016, 136: 278–286.
- [33] REDDY J N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2/3/4/5/6/7/8): 288–307.
- [34] ŞİMŞEK M, YURTCU H H. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory[J]. *Composite Structures*, 2013, 97: 378–386.
- [35] AYDOĞDU M. A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration[J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2009, 41(9): 1651–1655.
- [36] THAI H T, VO T P, NGUYEN T K, et al. A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates[J]. *Composite Structures*, 2017, 177: 196–219.
- [37] LIM C W, ZHANG G, REDDY J N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 78: 298–313.