

## 抗通信时延的分布式固定时间收敛协同制导律

商玮宸<sup>1</sup>, 马翔<sup>1</sup>, 郑技平<sup>2</sup>, 于航<sup>1</sup>, 戴可人<sup>1\*</sup>, 张合<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学机械工程学院, 江苏南京 210094; 2. 北方信息控制研究院集团有限公司信息总体部, 江苏南京 210094)

**摘要:**为使得多枚导弹在存在通信时延的情况下有效完成对机动目标的同时攻击,提出了一种抗通信时延的固定时间收敛分布式协同制导律。该制导律基于固定时间控制技术框架,实现了稳定时间边界不依赖于多导弹系统初始状态,提升了多导弹系统控制效率;采用一种快速非奇异终端滑模和虚拟领弹共同主导的方法,可实现制导律具有对抗通信时延的鲁棒性;利用了李雅普诺夫稳定性理论证明了固定时间内的一致性。仿真结果表明,存在通信时延的情况下,基于所设计的分布式协同制导律,多枚导弹能够有效地完成对目标的同时攻击。

**关键词:**协同制导;固定时间收敛;虚拟领弹;通信时延

中图分类号:TJ765 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2024)03-158-09

## Distributed fixed-time convergence cooperative guidance law against communication delay

SHANG Weichen<sup>1</sup>, MA Xiang<sup>1</sup>, ZHENG Jiping<sup>2</sup>, YU Hang<sup>1</sup>, DAI Keren<sup>1\*</sup>, ZHANG He<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. General Information Department, North Information Control, Research Academy Group Co. Ltd., Nanjing 210094, China)

**Abstract:** In order to make multiple missiles effectively complete the simultaneous attack of maneuvering targets in the presence of communication delay, a fixed-time convergence distributed cooperative guidance law against communication delay was proposed. Based on the framework of fixed time control technology, the guidance law can stabilize the time boundary independent of the initial state of multiple missile system and improved the control efficiency of multiple missile system. A fast non-singular terminal sliding mode and virtual leader were used to realize the guidance law's robustness against communication delay. The Lyapunov stability theory was used to prove the consistency in fixed time. Simulation results show that under the condition of communication time delay, multiple missiles can effectively attack the target simultaneously based on the designed distributed cooperative guidance law.

**Keywords:** cooperative guidance; fixed-time convergence; virtual leader; communication time delay

现代战争中,重要敌方目标往往具有一定的防御或抗打击能力,比如文献[1]中提到的反舰导弹系统,它具有导弹拦截和高机动的能力,依靠单枚导弹很难将其摧毁,因此多枚导弹协同作战在战场上变得尤为重要,文献[2]中所提到的多弹协同同步攻击策略用来打击这类目标。此外文献[3]中提出的多枚导弹协同作战与传统的单个导弹作战策略相比,多导弹协同作战效率高、穿透力强。文献[4]中提出协同作战的成功依赖于协同制导律,协同制导律有两种:一种是传统的集中式制导律,但在传统的集中式制导律中,一旦其中心节点被敌方打掉,整个弹群的同步攻击就会

失败。因此为了提高导弹的抗干扰能力,越来越多的研究集中在另外一种协同制导律——分布式同步攻击制导律方面。

近几年来,分布式同步攻击制导律已经取得了长足的进步。最初,文献[5]提出了一种有限时间收敛的分布式制导律。为了攻击机动目标,文献[6]提出了一种基于自适应律的分布式协同制导律来估计目标加速度的上限。其次,在文献[7]实现了沿视线角法线方向的速度分量和沿视线角水平方向的运动状态的一致性来攻击机动目标。文献[8]中提出一种特殊的分布式共识策略,然后采用局部视线控制律来实现对静态目标

的同时攻击。另外,考虑到多导弹系统的通信拓扑可能受到环境干扰的影响,在文献[9]中研究了具有固定拓扑和交换拓扑的动态代理网络的共识问题。在文献[10]中得到,通信拓扑的切换不会影响有限时间的收敛性,但可能会影响一致时间。然而,以上的有限时间收敛制导律,其收敛时间都依赖于各个弹的初始状态参数,而这些在真实战场工况下是很难被准确估计的。

为了解决这一问题,文献[11]中提出了固定时间收敛的分布式制导律,其优点是收敛时间完全由设计参数决定,提升了其在战争中的实用性。之后文献[12-20]对分布式制导律进行了深层次的研究。在文献[12]中针对多导弹的齐射攻击问题,提出了一种具有异构“领弹-被领弹”的分布式自适应协同制导方法。针对机动目标的末制导拦截问题,文献[13]构造了一种新型的非奇异快速终端滑模面,有效解决了奇异性问题,同时通过合理地改变滑模面与弹目视线角跟踪误差的趋近律指数,使得制导系统比现有的固定时间收敛控制具有更快的收敛速率。文献[14]提出了一种可以实现闭环制导系统在固定时间内稳定,并且闭环制导系统收敛时间的上界在一定条件下与制导系统初始状态无关的固定时间收敛的终端角约束滑模制导律。文献[15]解决了多导弹协同制导中由通信丢包及时延等引起的通信拓扑随机变化导致实际拓扑非连通甚至通信中断等问题。针对多导弹在平面内从各自期望方向同时击中机动目标的问题,文献[16]中提出了一种带视线角约束且能打击机动目标的有限时间协同制导律。其次,在文献[17]中提出了一种实现系统快速固定时间稳定的控制方案,利用所提出的固定时间稳定系统,推导出了一种快速固定时间非奇异终端滑模控制方法。文献[18]研究了一类通信拓扑为一般定向的一阶非线性多智能体系统(multi-agent system, MAS)的固定时间一致性问题,既考察了固定时间跟踪一致性问题,也考察了固定时间无领导一致性问题。最后,文献[19]中研究了多枚导弹在固定时间收敛的情况下同时攻击机动目标的制导律。但是,它没有考虑初始航向角误差和通信拓扑中的突然变化。之后在文献[20]中进一步发展了这一方法,通过一个新的快速非奇异终端滑模设计,使得滑模表面不仅避免了奇点,而且具有传统的滑动模表面和固定时间收敛特性的优点,使固定时间收敛的分布式制导律向实用化迈出了关键一步。

但是,在实际的战场环境下,还存在很多非

理想因素,其中文献[19]中提到的通信时延就是比较重要的因素。受通信时延影响,各个节点所接收到的周边节点的信息是滞后的,对于机动性较强的目标,各弹药节点虽然仍能够实现状态量的固定时间收敛,但却可能无法完成对目标的追击。

为了解决上述问题,本文提出了一种抗通信时延的固定时间收敛分布式协同制导律。该制导律,一方面,基于文献[20]设计的快速非奇异终端滑模,完成对导弹状态精确控制的同时,实现了稳定时间边界不依赖于多导弹系统初始状态;另一方面,加入了虚拟领弹的方法,压制了通信时延对于目标追击的破坏效应。

## 1 数学建模

图1表示涉及多枚导弹攻击一个机动目标的场景,其中 $v_i$ 表示第 $i$ 枚导弹的速度, $r_i$ 表示第 $i$ 枚导弹和目标之间的沿着弹目视线方向的距离。图2表示第 $i$ 枚导弹与目标之间的动力学模型,其中 $a_{n,i}$ 、 $a_{t,i}$ 、 $\lambda_i$ 、 $\phi_i$ 和 $\gamma_i$ 分别表示第 $i$ 枚导弹的法向加速度、切向加速度、飞行路径角、航向角误差以及弹目视线角。导引头的探测航向角误差 $\phi_i$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,如若超过这个范围,导弹探测装置将失去对目标的追踪。 $a_T$ 、 $\phi_T$ 和 $v_T$ 分别表示目标的加速度、飞行方向和速度。第 $i$ 枚导弹的运动学模型表示为

$$\dot{r}_i = v_{r,i} \quad (1)$$

$$\dot{\gamma}_i(t) = \frac{v_{q,i}(t)}{r_i(t)} \quad (2)$$

$$\dot{v}_{r,i} = \frac{v_{q,i}^2}{r_i} + u_{r,i} + u_{Tr,i} \quad (3)$$

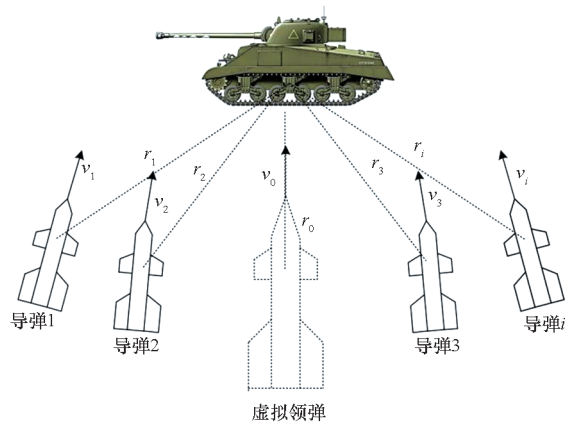


图1 虚拟领弹引导的多枚导弹交战场景  
Fig. 1 Multiple missiles engagement scenario guided by virtual leader

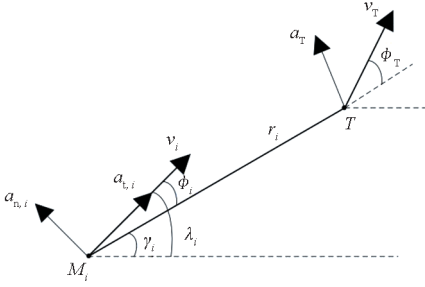


图 2 导弹与目标的平面作战关系图

Fig. 2 Planar engagement relation chart between missile and the target

$$\dot{v}_{q,i} = -\frac{v_{q,i}v_{r,i}}{r_i} + u_{q,i} + u_{Tq,i} \quad (4)$$

其中:  $v_{r,i} = v_T \cos \phi_T - v_i \cos \phi_i$ ,  $v_{q,i} = v_T \sin \phi_T - v_i \sin \phi_i$ ;  $v_{r,i}$  和  $v_{q,i}$  表示第  $i$  枚导弹沿视线角水平方向和垂直于视线角方向的相对速度分量;  $u_{Tr,i}$ 、 $u_{Tq,i}$  表示目标相对于第  $i$  枚导弹沿着视线角方向的控制分量;  $u_{r,i}$ 、 $u_{q,i}$  表示沿着视线角方向水平和垂直方向的控制分量。

### 2 定义及引理

**引理 1** 若  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, 0 < p_1 \leq 1, 1 < p_2 < \infty$ , 那么

$$\sum_{i=1}^n x_i^{p_1} \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^{p_1} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^{p_2} \geq n^{1-p_2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^{p_2} \quad (6)$$

**引理 2** 考虑如下标量系统

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay^{\frac{m}{n}} - by^{\frac{p}{q}} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $a > 0, b > 0, m, n, p, q$  为正奇数, 且  $m > n, p < q, y$  在固定时间内收敛于原点, 稳定时间边界为

$$T \leq \frac{1}{a} \frac{n}{m-n} + \frac{1}{b} \frac{q}{q-p} \quad (8)$$

除此之外, 如果  $\vartheta \triangleq \{q(m-n)/[n(q-p)]\} \leq 1$ , 稳定时间边界则可以表示为

$$T \leq \frac{q}{q-p} \left[ \frac{1}{\sqrt{ab}} \left( \tan \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^{-1} + \frac{1}{a\vartheta} \right] \quad (9)$$

**定义 1** 多枚导弹固定时间同时攻击的定义如下

$$\lim_{t \rightarrow T_1} |r_i(t) - r_j(t)| \leq \varepsilon_1 \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_1} |v_{r,i}(t) - v_{r,j}(t)| \leq \varepsilon_2 \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_2} v_{q,i}(t) = 0 \quad (12)$$

其中,  $T_1, T_2$  是无状态的稳定时间边界,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  为可调的边界。

### 3 制导律的设计与分析

针对文献[20]提出的固定时间收敛的分布式制导律, 在本节中首先向原有分布式制导律的一致性误差中加入通信时延, 并且通过虚拟领弹的方式保证制导律的一致性, 最后验证所设计的协同分布式制导律能够在时延的存在下性能不受影响, 各个状态量能够在固定时间内收敛到 0。

根据文献[20]得到设计的快速非奇异终端滑模为

$$s_i = \xi_{v_{r,i}} + \alpha_1 \xi_{r,i} + \alpha_2 \beta(\xi_{r,i}) \quad (13)$$

式中,  $\alpha_1, \alpha_2$  均为正常数。

若  $\bar{s}_i = 0$  或  $\bar{s}_i \neq 0, |\xi_{r,i}| \geq \mu$ , 那么  $\beta(\xi_{r,i})$  表达式为

$$\beta(\xi_{r,i}) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \xi_{r,i} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \xi_{r,i}^{\frac{m_1}{n_1}} + \xi_{r,i}^{\frac{p_1}{q_1}} \quad (14)$$

若  $\bar{s}_i \neq 0, |\xi_{r,i}| < \mu$ , 则  $\beta(\xi_{r,i})$  可以表示为

$$\beta(\xi_{r,i}) = l_1 \xi_{r,i} + l_2 \text{sign}(\xi_{r,i}) \xi_{r,i}^2 \quad (15)$$

$$l_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( 2 - \frac{m_1}{n_1} \right) \mu^{\frac{m_1}{n_1}-1} + \left( 2 - \frac{p_1}{q_1} \right) \mu^{\frac{p_1}{q_1}-1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (16)$$

$$l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{m_1}{n_1} - 1 \right) \mu^{\frac{m_1}{n_1}-2} + \left( \frac{p_1}{q_1} - 1 \right) \mu^{\frac{p_1}{q_1}-2} \quad (17)$$

其中,  $m_1, n_1, p_1, q_1$  均为正奇数且满足  $m_1/n_1 > 1, p_1/q_1 < 1, \mu$  是一个极小且大于 0 的常数。

$\bar{s}_i$  的表达式为

$$\bar{s}_i = \xi_{v_{r,i}} + \alpha_1 \xi_{r,i}^{\frac{m_1}{n_1}} + \alpha_2 \xi_{r,i}^{\frac{p_1}{q_1}} \quad (18)$$

$\xi_{v_{r,i}}, \xi_{r,i}$  分别为导弹沿视线角方向的速度以及导弹与目标相对距离的一致性误差, 表示为

$$\xi_{v_{r,i}} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_{r,i} - v_{r,j}) \quad (19)$$

$$\xi_{r,i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (r_i - r_j) \quad (20)$$

$s_i$  的导数为

$$\dot{s}_i = -k_1 s_i^{\frac{m_2}{n_2}} - k_2 s_i^{\frac{p_2}{q_2}} - d_i^r \text{sign}(s_i) + \Delta_{d,i}^r \quad (21)$$

式中,  $\Delta_{d,i}^r = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (u_{Tr,i} - u_{Tr,j})$ 。

分布式制导律的表达式为

$$u_{r,i} = -\frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij}} \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left( \frac{v_{q,i}^2}{r_i} - \frac{v_{q,j}^2}{r_j} + u_{r,j} \right) + [\alpha_1 \xi_{v_{r,i}} + \alpha_2 \beta(\xi_{r,i})] + k_1 s_i^{\frac{m_2}{n_2}} + k_2 s_i^{\frac{p_2}{q_2}} + d_i^r \text{sign}(s_i) \right\} \quad (22)$$

其中:  $k_1, k_2$  是正常数,  $m_2, n_2, p_2, q_2$  是正奇数且满足  $m_2/n_2 > 1, p_2/q_2 < 1$ ;  $d_i^r \geq 2 |N_i| \omega^r$  是一个正常数。

$$u_{q,i} = \frac{v_{q,i}v_{r,i}}{r_i} - k_3 \frac{m_3}{v_{q,i}^{p_3}} - k_4 \frac{p_3}{v_{q,i}^{q_3}} - d_i^q \text{sign}(v_{q,i}) \quad (23)$$

其中:  $k_3, k_4$  为正常数,  $m_3, n_3, p_3, q_3$  为奇数且满足  $m_3/n_3 > 1, p_3/q_3 < 1; d_i^q > |N_i| \omega^q$  是正常数。

存在通信时延时, 偏差量  $e_{r,i}, e_{v_{r,i}}$  的表达式为

$$e_{r,i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [r_i - r_j(t - \tau)] \quad (24)$$

$$e_{v_{r,i}} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [v_{r,i} - v_{r,j}(t - \tau)] \quad (25)$$

备注: 存在通信时延的情况下, 通过式(24)、式(25)可以得到的是当前第  $i$  枚导弹的状态量  $r_i, v_{r,i}$  分别与上一时刻的第  $j$  枚导弹的状态量  $r_j, v_{r,j}$  的差值, 因此, 上式  $e_{r,i}, e_{v_{r,i}}$  则表示为偏差量, 就不能表示为状态量的一致性误差, 制导律的一致性就出现了问题。在上述偏差量的表达式中通过加入虚拟领弹的方法, 能够使得状态量  $r_i, v_{r,i}$  和领弹的  $r_0, v_{r,0}$  保持一致。因此上述式(19)~(20)的一致性误差方程重新表述为

$$\xi_{r,i} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (r_i - r_j) + k_5 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (r_i - r_0) \quad (26)$$

$$\xi_{v_{r,i}} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_{r,i} - v_{r,j}) + k_5 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_{r,i} - v_{r,0}) \quad (27)$$

其中,  $k_5$  是正常数。

加入通信时延和虚拟领弹后的  $e_{r,i}, e_{v_{r,i}}$  通过辅助变换得到

$$\begin{cases} e_{r,i}(t) = \xi_{r,i}(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij} \int_{t-\tau}^t (-\tau - T + t) \times \\ \quad [u_{r,i}(T) - u_{r,j}(T)] dT \\ e_{v_{r,i}}(t) = \xi_{v_{r,i}}(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij} \int_{t-\tau}^t [u_{r,i}(T) - u_{r,j}(T)] dT \end{cases} \quad (28)$$

其中  $e_{r,i}(t)$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{r,i}(t) &= \dot{\xi}_{r,i} + \sum_{i=1}^n a_{ij} \int_{t-\tau}^t [u_{r,i}(T) - u_{r,j}(T)] dT - \\ &\quad \tau [u_{r,i}(t) - u_{r,j}(t)] \\ &= \dot{e}_{v_{r,i}} - \tau \sum_{i=1}^n a_{ij} [u_{r,i}(t) - u_{r,j}(t)] \end{aligned} \quad (29)$$

然后定义

$$\begin{cases} z_{r,i}(t) = e_{r,i}(t) + \tau e_{v_{r,i}}(t) \\ z_{v_{r,i}}(t) = e_{v_{r,i}}(t) \end{cases} \quad (30)$$

可以得到如下导数形式

$$\begin{cases} \dot{z}_{r,i}(t) = z_{v_{r,i}}(t) \\ \dot{z}_{v_{r,i}}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} [u_{r,i}(t) - u_{r,j}(t)] \end{cases} \quad (31)$$

可以发现式(31)与式(19)~(20)一致性误差表达式相似, 因此滑模面可以表示为

$$s_i = z_{v_{r,i}} + \alpha_1 z_{r,i} + \alpha_2 \beta(z_{r,i}) \quad (32)$$

分布式协同制导律表达式为

$$\begin{aligned} u_{r,i} = & - \frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij}} \left\{ \sum a_{ij} \left( \frac{v_{q,i}^2}{r_i} - \frac{v_{q,j}^2}{r_j} + u_{r,j} \right) + \right. \\ & \left. [\alpha_1 z_{v_{r,i}} + \alpha_2 \dot{\beta}(z_{r,i})] + k_1 s_i^{\frac{m_2}{p_2}} + k_2 s_i^{\frac{p_2}{q_2}} + \right. \\ & \left. d_i^r \text{sign}(s_i) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$u_{q,i} = \frac{v_{q,i}v_{r,i}}{r_i} - k_3 \frac{m_3}{v_{q,i}^{p_3}} - k_4 \frac{p_3}{v_{q,i}^{q_3}} - d_i^q \text{sign}(v_{q,i}) \quad (34)$$

接下来证明导弹的各个状态量能够在固定时间内收敛到0。

**定理1** 如果在固定时间  $T_s$  内,  $s_i = \bar{s}_i = 0$ , 并且能够在固定时间内  $z_{v_{r,i}} \equiv 0, z_{r,i} \equiv 0$ , 那么稳定时间边界  $T_1$  可以表示为

$$T_1 \leq T_s + \frac{n(m_1 - n_1)/(2n_1)}{\alpha_1} \frac{n_1}{m_1 - n_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{q_1}{p_1}$$

证明: 如果  $s_i = \bar{s}_i = 0$  的时间  $t \geq T_s$ , 由式(32)可以得出

$$\dot{z}_{r,i} = z_{v_{r,i}} = -(\alpha_1 z_{r,i}^{n_1} + \alpha_2 z_{r,i}^{q_1}) \quad (35)$$

考虑到以下李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_{r,i}^2 \quad (36)$$

通过引理1, 对  $V_1$  求导后可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= - \sum_{i=1}^n z_{r,i} (\alpha_1 z_{r,i}^{n_1} + \alpha_2 z_{r,i}^{q_1}) \\ &= - \alpha_1 \sum_{i=1}^n z_{r,i}^{n_1+1} - \alpha_2 \sum_{i=1}^n z_{r,i}^{q_1+1} \\ &\leq - \alpha_1 n^{\frac{m_1-n_1}{2n_1}} \left( \sum_{i=1}^n z_{r,i}^2 \right) - \alpha_2 \left( \sum_{i=1}^n z_{r,i}^2 \right)^{\frac{p_1+q_1}{2q_1}} \end{aligned} \quad (37)$$

由式(37)变化后得

$$\dot{V}_1 \leq - \alpha_1 n^{\frac{m_1-n_1}{2n_1}} (2V_1) - \alpha_2 (2V_1)^{\frac{p_1+q_1}{2q_1}} \quad (38)$$

基于引理2, 这就意味着  $V_1$  在固定时间内收敛于0, 即  $\lim_{t \rightarrow T_1} V_1(t) = 0$ , 其次通过式(36)可以看出  $z_{r,i}$  在固定时间收敛到0, 最后通过式(32)可以推出  $z_{v_{r,i}}$  在固定时间内收敛到0。□

**定理2** 通过第  $i$  枚导弹的运动学模型, 在式(32)滑模面的条件下, 所提出的分布式制导律式(33)保证了  $z_{r,i}, z_{v_{r,i}}$  实现在固定时间内收敛到0, 那么

$$\bar{T}_1 \leq T_1 + \frac{n(m_2 - n_2)/(2n_2)}{k_2} \frac{n_2}{m_2 - n_2} + \frac{1}{k_3} \frac{q_2}{q_2 - p_2}$$

证明: 考虑到李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad (39)$$

对  $V_2$  求导后可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \sum_{i=1}^n s_i \dot{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \left[ -k_1 s_i^{\frac{m_2}{2}} - k_2 s_i^{\frac{p_2}{2}} - d_i^r \text{sign}(s_i) + \Delta_{d,i}^r \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n -k_1 (s_i^2)^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} - \sum_{i=1}^n k_2 (s_i^2)^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} - \\ &\quad \sum_{i=1}^n [(d_i^r - \Delta_{d,i}^r) |s_i|] \\ &\leq \sum_{i=1}^n -k_1 (s_i^2)^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} - \sum_{i=1}^n -k_2 (s_i^2)^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} \quad (40) \end{aligned}$$

根据引理 1, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k_1 n^{\frac{n_2-m_2}{2n_2}} \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right)^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} - k_2 \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right)^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} \\ &\leq -k_1 n^{\frac{n_2-m_2}{2n_2}} (2V_2)^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} - k_2 (2V_2)^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} \quad (41) \end{aligned}$$

根据引理 2, 可以得到  $s_i$  在固定时间内收敛到 0, 稳定时间边界  $T_2$  为

$$T_2 \leq \frac{n(m_2 - n_2)/(2n_2)}{k_1} \frac{n_2}{m_2 - n_2} + \frac{1}{k_2} \frac{q_2}{q_2 - p_2}$$

根据定理 1 可以得出,  $z_{r,i}, z_{v,r,i}$  在固定时间内收敛到 0, 稳定时间边界为  $T_1 + T_2$ 。□

**定理 3** 所提出的分布式控制 (34) 保证了  $v_{q,i}$  在固定时间内的一致性, 那么稳定时间边界  $\bar{T}_2$  表示为

$$\bar{T}_2 \leq \frac{n(m_3 - n_3)/(2n_3)}{k_3} \frac{n_3}{m_3 - n_3} + \frac{1}{k_4} \frac{q_3}{q_3 - p_3}$$

证明: 设如下李雅普诺夫函数

$$V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_{q,i}^2 \quad (42)$$

其导数形式为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sum_{i=1}^n \left[ -k_3 v_{q,i}^{\frac{m_3+n_3}{3}} - k_4 v_{q,i}^{\frac{p_3+q_3}{3}} - d_i^q \text{sign}(v_{q,i}) + u_{Tq,i} v_{q,i} \right] \\ &\leq -k_3 \sum_{i=1}^n v_{q,i}^{\frac{m_3+n_3}{3}} - k_4 \sum_{i=1}^n v_{q,i}^{\frac{p_3+q_3}{3}} - \sum_{i=1}^n [(d_i^q - u_{Tq,i}) |v_{q,i}|] \\ &\leq -k_3 \sum_{i=1}^n v_{q,i}^{\frac{m_3+n_3}{3}} - k_4 \sum_{i=1}^n v_{q,i}^{\frac{p_3+q_3}{3}} \quad (43) \end{aligned}$$

根据引理 2 可以得出  $v_{q,i}$  在固定时间内收敛到 0。□

### 4 仿真分析

在本节中进行相关的仿真实验来验证所提出的分布式制导律的性能。表 1 介绍了 5 枚导弹的初始条件, 图 3 介绍了 5 枚导弹之间的通信网络拓扑结构, 所建立的通信拓扑需保证每个导弹都能接收到相邻导弹的交互信息。

表 1 导弹的初始条件

Tab. 1 Initial conditions for missiles

导弹信息	初始位置 (m, m)	初始速度/ (m/s)	初始航向角/ rad
导弹 1	(500, 10 000)	350	-0.09
导弹 2	(10 000, 550)	340	0.10
导弹 3	(7 500, 2 000)	250	0.11
导弹 4	(5 000, 3 000)	300	0.12
导弹 5	(4 000, 5 000)	250	-0.15

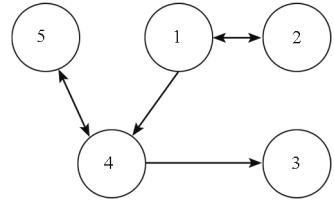


图 3 5 枚导弹相互通信的网络

Fig. 3 A network of 5 missiles communicating with each other

协同制导律的参数如下:  $k_1 = 0.2, k_2 = 1.0, k_3 = 0.5, k_4 = 1.5, k_5 = 1.0; p_1 = 5.0, q_1 = 7.0, m_1 = 13, n_1 = 11, \alpha_1 = 0.1; p_2 = 5.0, q_2 = 7.0, m_2 = 9.0, n_2 = 7.0, \alpha_2 = 1.5; p_3 = 3.0, q_3 = 5.0, m_3 = 9.0, n_3 = 7.0; \mu = 0.001, d_i^r = 5.0, d_i^q = 10; i = 1, 2, 3, \dots, n; \tau = 0.01$  s。

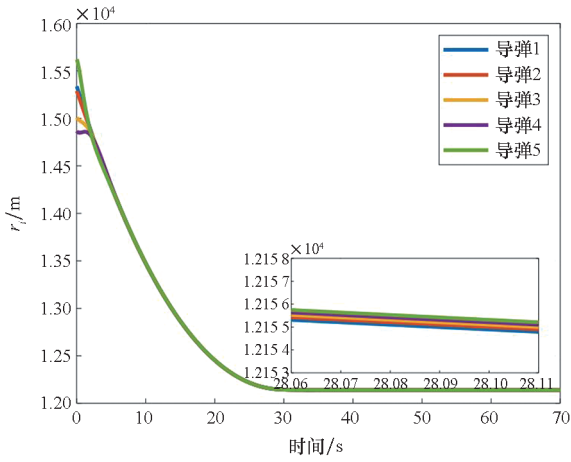
机动目标初始位置为 (15 000 m, 15 000 m), 由于机动目标的初始速度要小于导弹的初始速度, 机动目标速度分量为  $v_x(0) = 100$  m/s,  $v_y(0) = 100$  m/s, 加速度分量为  $a_x = \sin(0.04t + \frac{5}{3}\pi)$  m/s<sup>2</sup>,  $a_y = 4\sin(0.04t + \frac{5}{3}\pi)$  m/s<sup>2</sup>。

仿真主要分为两部分: 第一部分对有时延但是没有虚拟领弹的情况进行仿真实验, 判断分布式制导律是否能够在没有虚拟领弹的情况下, 各个状态量能够在固定时间收敛以及完成对目标的追击; 第二部分则是在有时延和存在虚拟领弹的情况下, 通过对比第一部分的仿真结果, 验证存在虚拟领弹的情况下, 能够消除时延对制导律的影响, 导弹能够不受时延的干扰而实现对目标的有效打击。

#### 4.1 存在时延 $\tau$ 、无虚拟领弹的情况

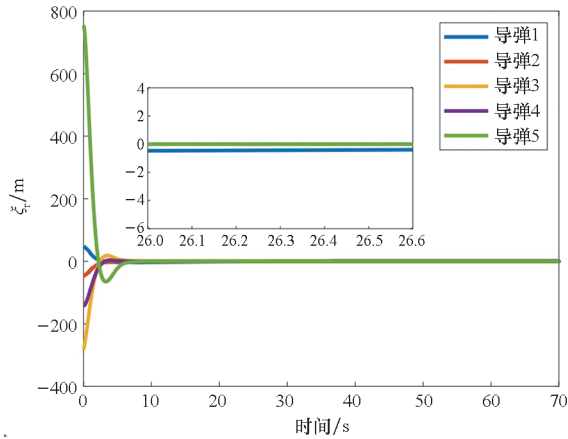
将通信时延设置为  $\tau = 0.01$  s。通过图 4 所示的仿真结果表明, 虽然图 4(b)、(c) 中  $\xi_r, \xi_v$  能够在固定时间内收敛到 0, 但在图 4(a) 中表明各个导弹的弹目相对距离却没有实现一致性, 这种情况证明了在第 3 节中提到的: 在加入通信时延的情况下, 制导律的一致性出现了问题, 并且由于制导律出现

问题,导弹在之后追击不到目标。此外,图4(d)表明沿视线角法线方向的速度不受通信时延的干扰, $v_{q,i}$ 能够在固定时间内实现快速的收敛。图4(e)、(f)显示沿视线角水平方向和法线方向的控制输入量 $u_{r,i}$ 、 $u_{q,i}$ 能够在固定时间内收敛到0。



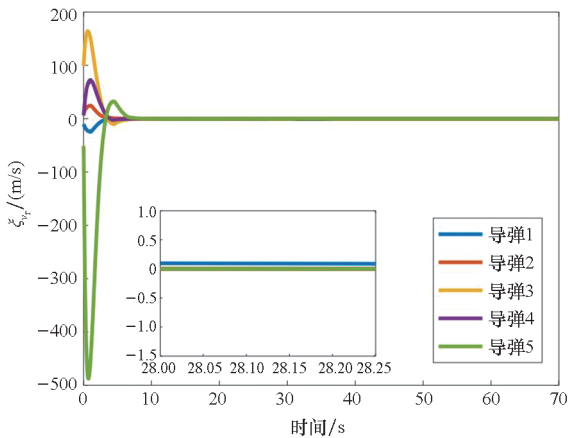
(a) 导弹与目标的相对距离

(a) Relative distance between the missile and the target



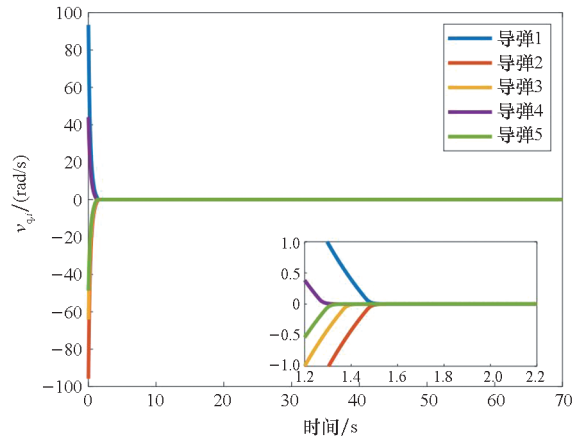
(b) 弹目相对距离误差值

(b) Error value of relative distance between projectile and target



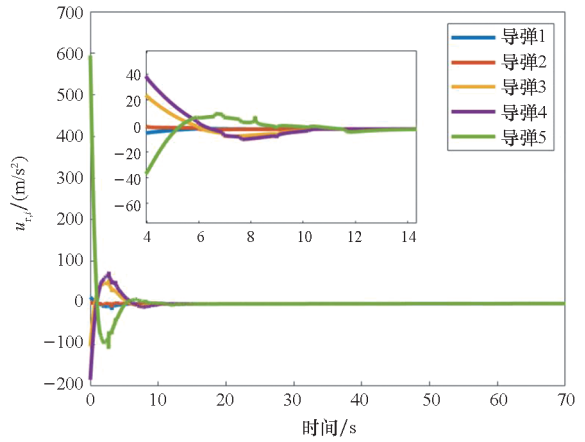
(c) 沿视线角水平方向相对速度的误差值

(c) Consensus error of the relative velocities along the line-of-sight direction



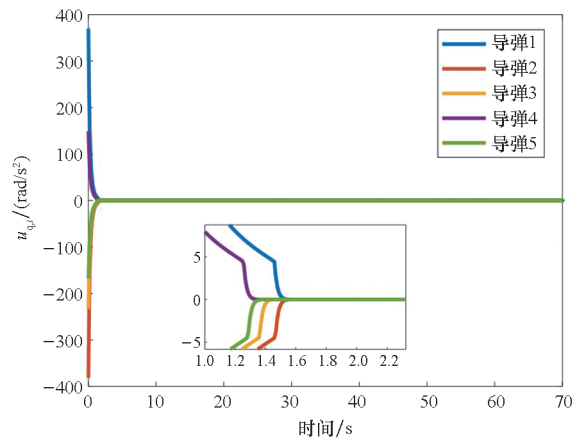
(d) 沿视线角法线方向的相对速度

(d) Relative velocities perpendicular to the line-of-sight direction



(e) 沿视线角水平方向的加速度分量

(e) Acceleration components along the line-of-sight direction



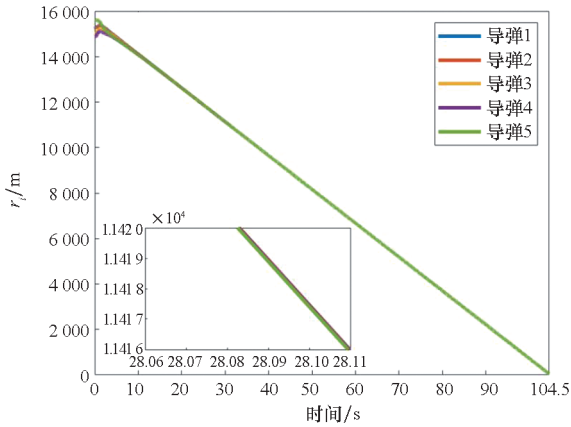
(f) 沿视线角法线方向的加速度分量

(f) Acceleration components perpendicular to the line-of-sight direction

图4 存在时延、无虚拟领弹的仿真结果  
Fig.4 Simulation results of guidance laws with input delay and without virtual leader

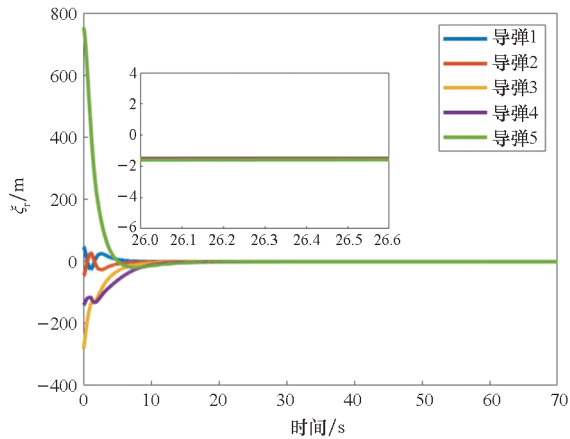
### 4.2 存在时延 $\tau$ 以及虚拟领弹的情况

本部分在 4.1 节的基础上加入了虚拟领弹, 虚拟领弹的速度设为 150 m/s。从图 5 所示的仿真结果可以看出: 存在虚拟领弹的情况下, 通过图 5(a) 和图 4(a) 的比较可以看出, 各个导弹与目标的相对距离能够快速达成一致, 并且在图 5(a) 中可以得到导弹在达到一致性后能够在 104.5 s 击中目标; 图 5(b)、(c) 的  $\xi_r$ 、 $\xi_{v_r}$  和图 4(b)、(c) 对比能够看出, 虚拟领弹的存在能够保证制导律不受通信时延的影响, 保证制导律的一致性。此外图 5(d) 中导弹沿视线角法线方向的速度以及图 5(f) 中导弹沿视线角法线方向的加速度分量和图 4(d)、(f) 收敛的时间基本一致。图 5(e) 中沿视线角水平方向的加速度分量与图 4(e) 对比可以看出, 在虚拟领弹的情况下,



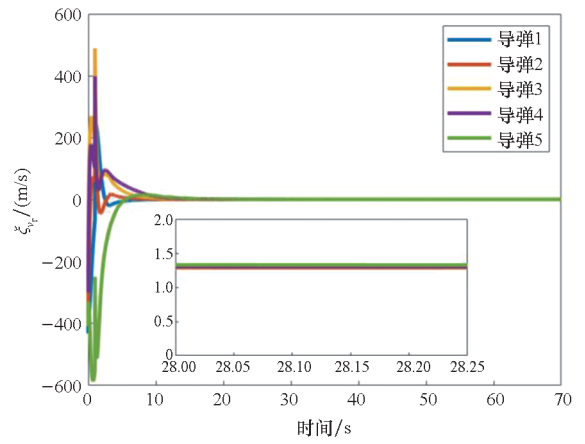
(a) 导弹与目标的相对距离

(a) Relative distance between the missile and the target



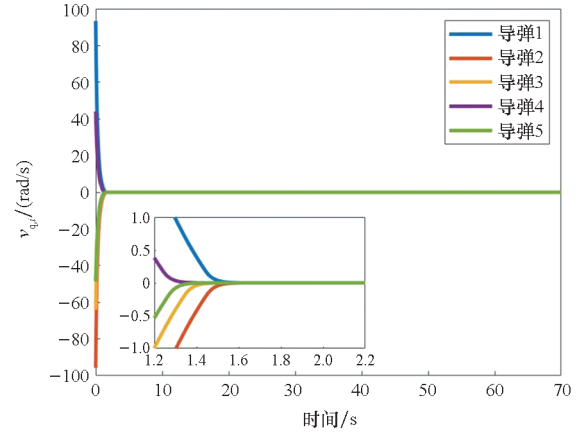
(b) 弹目相对距离误差值

(b) Error value of relative distance between projectile and target



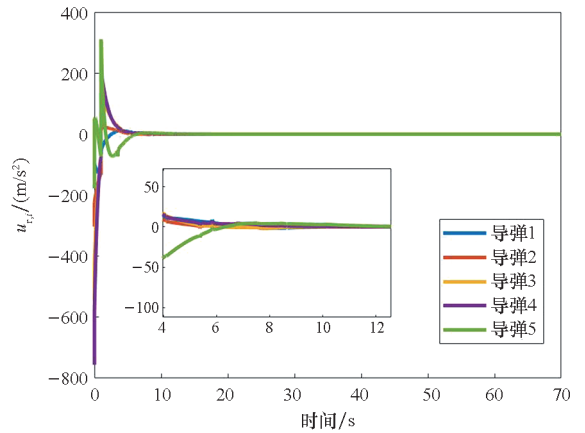
(c) 沿视线角水平方向相对速度的误差值

(c) Consensus error of the relative velocities along the line-of-sight direction



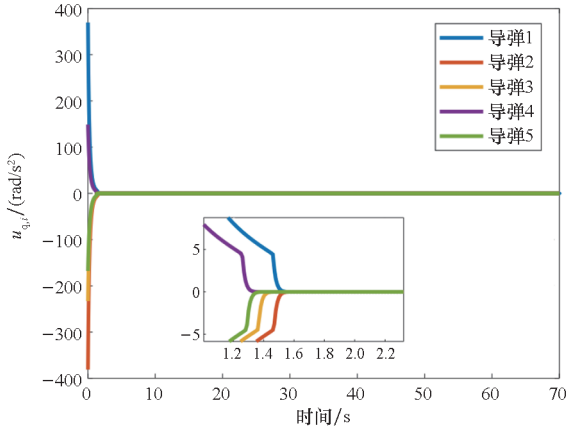
(d) 沿视线角法线方向的相对速度

(d) Relative velocities perpendicular to the line-of-sight direction

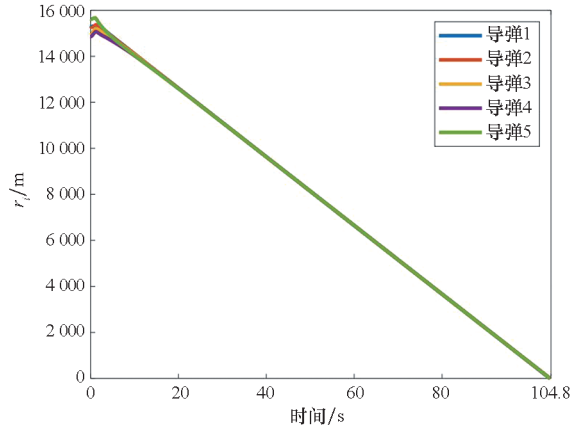


(e) 沿视线角水平方向的加速度分量

(e) Acceleration components along the line-of-sight direction



(f) 沿视线角法线方向的加速度分量  
(f) Acceleration components perpendicular to the line-of-sight direction



(b) 导弹与目标的相对距离( $k_1=0.4, k_2=1.5$ )  
(b) Relative distance between the missile and the target ( $k_1=0.4, k_2=1.5$ )

图5 存在时延和虚拟领弹的仿真结果  
Fig.5 Simulation results of guidance laws with input time delay and virtual leader

图6 不同参数值下的弹目相对距离  
Fig.6 Relative distance between the missile and the target under different parameters

在6 s时就能够实现收敛。因此得出,所设计的由虚拟领弹和快速非奇异终端滑模主导的协同分布式制导律在通信时延存在的情况下,制导律的性能理论分析和研究结果一致。

最后,改变制导律中的参数值  $k_1$ 、 $k_2$  进行仿真,如图6(a)中选取  $k_1=0.1$ 、 $k_2=0.5$ ,图6(b)中选取  $k_1=0.4$ 、 $k_2=1.5$ 。由图6结果可以证明,即使在不同参数值下,导弹也能够虚拟领弹的引导下精确击中目标。

### 5 结论

针对存在通信时延情况下的多导弹协同攻击制导律设计问题,通过非奇异终端滑模结合虚拟领弹的方法,能够有效抵抗时延产生的干扰,并且使每一枚导弹的状态量能够在固定时间内达成一

致。仿真实验表明,本文设计的制导律在存在通信时延的前提下,能够使多枚导弹同时击中目标。具体而言,本文的主要结论如下:

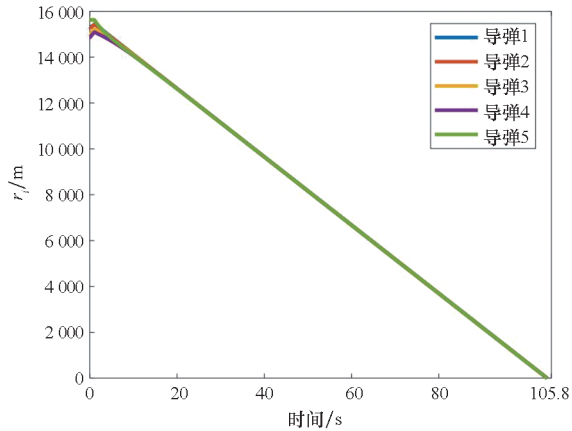
1)提出了一种由快速非奇异终端滑模和虚拟领弹共同主导的分布式同步攻击制导律。通过构造辅助变换函数,证明了该制导律在有通信时延的情况下仍可实现固定时间收敛。

2)通过加入虚拟领弹的方法,证明了所提出的分布式制导律可不受输入通信时延的干扰,实现对机动目标的有效追击。

3)进行了系统的仿真分析,验证了所提制导律的性能,可有效抵抗高达10 ms的通信时延。

### 参考文献 (References)

- [1] JEON I S, LEE J I, TAHK M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 260-266.
- [2] ZHOU J L, YANG J Y. Distributed guidance law design for cooperative simultaneous attacks with multiple missiles[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(10): 1-9.
- [3] SUN X J, ZHOU R, HOU D L, et al. Consensus of leader-followers system of multi-missile with time-delays and switching topologies[J]. Optik, 2014, 125(3): 1202-1208.
- [4] JEON I S, LEE J I, TAHK M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1): 275-280.
- [5] ZHOU J L, YANG J Y, LI Z K. Simultaneous attack of a stationary target using multiple missiles; a consensus-based approach[J]. Science China Information Sciences, 2017, 60(7): 070205.
- [6] ZHOU J L, LYU Y Z, YANG J Y, et al. Cooperative guidance law design for simultaneous attack with multiple



(a) 导弹与目标的相对距离( $k_1=0.1, k_2=0.5$ )  
(a) Relative distance between the missile and the target ( $k_1=0.1, k_2=0.5$ )



- missiles under directed communication topologies [C]// Proceedings of the International Workshop on Complex Systems and Networks (IWCSN), 2017: 313 - 318.
- [7] LIU Z H, LYU Y Z, ZHOU J L, et al. On 3D simultaneous attack against manoeuvring target with communication delays[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2020, 17(1): 1 - 8.
- [8] WANG Y J, DONG S, OU L L, et al. Cooperative control of multi-missile systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(3): 441 - 446.
- [9] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520 - 1533.
- [10] LI B, LIN D F, WANG H. Finite time convergence cooperative guidance law based on graph theory[J]. Optik, 2016, 127(21): 10180 - 10188.
- [11] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106 - 2110.
- [12] 孙雪娇, 周锐, 吴江, 等. 多导弹分布式协同制导与控制方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(1): 120 - 124.  
SUN X J, ZHOU R, WU J, et al. Distributed cooperative guidance and control for multiple missiles[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(1): 120 - 124. (in Chinese)
- [13] 赵国荣, 李晓宝, 刘帅, 等. 自适应非奇异快速终端滑模固定时间收敛制导律[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(6): 1059 - 1070.  
ZHAO G R, LI X B, LIU S, et al. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode guidance law with fixed-time convergence[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(6): 1059 - 1070. (in Chinese)
- [14] 张晓宇, 张鹏, 郑鑫, 等. 基于固定时间收敛的终端角约束滑模制导律设计[J]. 空天防御, 2020, 3(3): 9 - 15.  
ZHANG X Y, ZHANG P, ZHENG X, et al. Terminal angle constraint sliding mode guidance law design based on fixed-time convergence[J]. Air & Space Defense, 2020, 3(3): 9 - 15. (in Chinese)
- [15] 叶鹏鹏, 盛安冬, 张蛟, 等. 非持续连通通信拓扑下的多导弹协同制导[J]. 兵工学报, 2018, 39(3): 474 - 484.  
YE P P, SHENG A D, ZHANG J, et al. Cooperative guidance of multi-missile with unsustainable connected communication topology [J]. Acta Armamentarii, 2018, 39(3): 474 - 484. (in Chinese)
- [16] 吕腾, 吕跃勇, 李传江, 等. 带视线角约束的多导弹有限时间协同制导律[J]. 兵工学报, 2018, 39(2): 305 - 314.  
LYU T, LYU Y Y, LI C J, et al. Finite time cooperative guidance law for multiple missiles with line-of-sight angle constraint[J]. Acta Armamentarii, 2018, 39(2): 305 - 314. (in Chinese)
- [17] NI J K, LIU L, LIU C X, et al. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2017, 64(2): 151 - 155.
- [18] WANG H, YU W W, WEN G H, et al. Fixed-time consensus of nonlinear multi-agent systems with general directed topologies [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 66(9): 1587 - 1591.
- [19] LI G F, WU Y J, XU P Y. Fixed-time cooperative guidance law with input delay for simultaneous arrival[J]. International Journal of Control, 2021, 94(6): 1664 - 1673.
- [20] YU H, DAI K R, LI H J, et al. Fixed-time cooperative guidance law for multiple missiles in simultaneous attacks[EB/OL]. [2022 - 01 - 03]. <http://arxiv.org/abs/2106.02772>.