

## 双参数弹性基功能梯度圆柱管自由振动的高阶梁理论解

马维力<sup>1</sup>, 崔辉如<sup>2</sup>, 申柳雷<sup>3</sup>, 王诗琦<sup>1</sup>, 彭帆<sup>1</sup>, 李显方<sup>4\*</sup>

(1. 长安大学理学院, 陕西西安 710064; 2. 陆军工程大学国防工程学院, 江苏南京 210007;  
3. 国防科技大学军政基础教育学院, 湖南长沙 410072; 4. 中南大学土木工程学院, 湖南长沙 410075)

**摘要:**基于高阶剪切变形梁理论,推导出 Winkler-Pasternak 弹性基径向功能梯度空心圆柱管自由振动行为的控制方程。该方法无须引入剪切修正系数,自动满足空心圆柱管内外表面剪应力自由边界条件。通过引入辅助函数,将关于挠度和转角的耦合控制方程化为单一高阶微分控制方程。给出了典型边界条件下功能梯度空心圆柱管的频率和振型。将计算结果与已有文献结果对比,验证了所提理论的精度。可以为工程中常见的 Winkler-Pasternak 弹性基梁结构提供更高精度的一维弹性理论解,研究表明,功能梯度材料的梯度参数和弹性地基刚度系数对固有频率值影响显著。与高阶固有频率相比,刚度系数对低阶固有频率的影响更加明显。

**关键词:**自由振动;功能梯度材料;空心圆柱管;Winkler-Pasternak 弹性基;高阶剪切变形梁理论

中图分类号:O343 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2024)04-086-10



论  
文  
拓  
展

## Free vibration of cylindrical functionally graded tubes on bi-parameter foundation based on a higher-order beam theory

MA Weili<sup>1</sup>, CUI Huiru<sup>2</sup>, SHEN Liulei<sup>3</sup>, WANG Shiqi<sup>1</sup>, PENG Fan<sup>1</sup>, LI Xianfang<sup>4\*</sup>

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China; 2. College of Defense Engineering, Army Engineering University, Nanjing 210007, China; 3. College of Basic Military and Political Education, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China;  
4. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Based on the theory of high-order shear deformation beam, the governing equations for the free vibration behavior of Winkler-Pasternak elastic foundation radial function gradient hollow cylindrical pipe were derived. This method does not require the introduction of shear correction coefficient and automatically satisfies the free boundary condition of shear stress on the inner and outer surfaces of the hollow cylindrical pipe. By introducing auxiliary functions, the coupled equations for deflection and angle were transformed into a single high-order differential equation. The frequency and mode shapes of the function gradient hollow cylindrical pipe under typical boundary conditions were given. The calculation results were compared with the results in the existing literature to verify the accuracy of the proposed theory. It can provide higher precision one-dimensional elastic theoretical solutions for the common Winkler-Pasternak elastic beam structures in engineering. Research results show that the gradient parameter and elastic foundation stiffness coefficient of the function gradient material have a significant impact on the natural frequency value. Compared with the high-order natural frequency, the stiffness coefficient has a more significant impact on the low-order natural frequency.

**Keywords:** free vibration; functionally graded material; hollow cylindrical tube; Winkler-Pasternak elastic foundation; higher-order shear deformation beam theory

圆柱形梁作为应用广泛的结构件,在工程中发挥着重要作用。与实心圆柱形梁相比,等质量

的空心圆柱管可以承受更高荷载。圆柱管力学行为相关理论包括两个方面:一是基于三维弹性理

收稿日期:2022-08-25

基金项目:国家自然科学基金面上资助项目(12072374);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2023-JC-QN-0010)

第一作者:马维力(1992—),男,陕西宝鸡人,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:mawilling@163.com

\*通信作者:李显方(1964—),男,湖南永州人,教授,博士,博士生导师,E-mail:xfli@csu.edu.cn

引用格式:马维力,崔辉如,申柳雷,等.双参数弹性基功能梯度圆柱管自由振动的高阶梁理论解[J].国防科技大学学报,2024,46(4):86-95.

Citation:MA W L, CUI H R, SHEN L L, et al. Free vibration of cylindrical functionally graded tubes on bi-parameter foundation based on a higher-order beam theory[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2024, 46(4): 86-95.

论对空间变量进行求解,获得结构响应,这种方法精度高,但求解过程复杂<sup>[1-2]</sup>。二是基于一维弹性理论展开求解,这种方法变量少,计算效率高。

高阶剪切变形梁理论(简称高阶梁理论)最早由 Levinson<sup>[3]</sup>提出。该理论同时考虑剪切变形和转动惯量,且无须剪切修正系数。现阶段,高阶梁理论已成为相关领域研究热点。Reddy等<sup>[4]</sup>提出的适用于弹性壳结构的高阶梁理论,成为许多研究的基础。Huang等<sup>[5-6]</sup>将高阶梁理论的适用对象从矩形截面梁扩展到圆形截面梁, Ma等<sup>[7]</sup>进一步将其扩展至环形截面空心圆柱管。

功能梯度材料是一种非均匀复合材料,其组分可以随着结构位置连续变化,因此具备优越的力学性能,得到科研人员的广泛关注<sup>[8]</sup>。对于功能梯度梁结构,材料属性可能沿轴向或径向变化<sup>[9]</sup>。在 Euler-Bernoulli 和 Timoshenko 梁理论的基础上, Li<sup>[10]</sup>提出了一种分析功能梯度梁弯曲和振动的方法。邓先琪等<sup>[11]</sup>提出了一种适用于功能梯度梁动静力学行为的格林函数方法。王壮壮等<sup>[12]</sup>基于三阶剪切变形板理论和正弦剪切变形板理论,分析了石墨烯增强功能梯度板的屈曲和弯曲行为。已有关于功能梯度材料梁、板结构的研究大部分局限于自身变形、自由振动和屈曲等问题,关于弹性地基上功能梯度梁结构的研究鲜见报道。

梁在弹性地基中的力学行为是工程中的普遍问题。常见的地基模型有:Winkler 模型、弹性连续介质模型、黏弹性模型、双参数模型等。双参数模型也被称为 Winkler-Pasternak 模型,克服了 Winkler 地基模型不能反映压力扩散的缺陷,数学处理难度也显著低于弹性连续介质模型和黏弹性模型。艾智勇等<sup>[13]</sup>采用分数阶 Merchant 模型,研究了饱和地基与梁共同作用的时效问题。周凤玺等<sup>[14]</sup>分析了初始轴向机械力作用下,三参数 Winkler-Pasternak 黏弹性地基上多孔功能梯度黏弹性材料梁在热环境中的自由振动特性,需要指出的是,其所研究的梁仍属于矩形截面梁,未涉及圆形或圆环形截面梁。蒲育等<sup>[15-16]</sup>对 Winkler-Pasternak 弹性基上梁结构等振动和屈曲问题开展了系统研究。现阶段,关于弹性地基上的功能梯度空心圆柱管振动行为的研究尚未开展。

本文基于高阶梁理论,研究双参数弹性基功能梯度空心圆柱管的自由振动问题。通过引入翘曲形状函数,建立关于挠度和转角的耦合控制方程。借助辅助函数,得到单一控制微分方程。给出了典型边界条件下的频率方程,讨

论了梯度、刚度系数和长径比等参数对固有频率的影响。

## 1 理论公式推导

考虑在双参数弹性基之上放置长度为  $L$ , 内外半径分别为  $R_i$  和  $R_o$ , 材料属性沿径向梯度分布的空心圆柱管,如图 1 所示,  $M$  表示弯矩,  $Q$  表示剪力,  $q$  表示横向均布载荷。

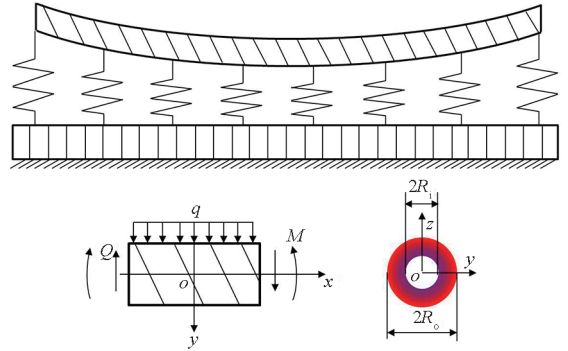


图1 Winkler-Pasternak 弹性基功能梯度圆柱管示意图

Fig. 1 Schematic of a FG circular pipe resting on a Winkler-Pasternak elastic foundation

功能梯度圆柱管的材料属性取决于半径。同时采用笛卡尔坐标系  $(x, y, z)$  和柱坐标  $(x, r, \theta)$ 。取中性轴为  $x$  轴,  $z$  轴向上。 $(u, v, w)$  和  $(u, w_r, w_\theta)$  分别是笛卡尔坐标系和柱坐标下的位移分量,存在如下关系:

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ r = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \quad (1)$$

高阶梁理论中轴向位移分量  $u$  可以表示为挠度  $w$  和转角  $\psi$  的函数。

$$u(x, y, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(y, z) \left[ \psi(x) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2)$$

其中,  $u_0$  代表轴力引起的轴向拉伸或压缩位移。本文不考虑轴力作用的面内横向振动问题,因此  $u_0 = 0$ , 挠度  $w$  是变量  $x$  和时间  $t$  的函数。 $f(y, z)$  为截面翘曲形状函数,用于描述横截面的翘曲形状。根据几何方程,可将应变分量表示为挠度  $w$  和转角  $\psi$  的函数。

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(y, z) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial f}{\partial z} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$\gamma_{xr} = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \sin \theta \right) \left[ \psi(x) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (5)$$

本文选择多项式形式的翘曲形状函数:

$$f = z \frac{3R_i^2 R_o^2 - (y^2 + z^2)^2}{3(R_i^2 + R_o^2)(y^2 + z^2)} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),结合本构方程可知,当  $r = R_i, R_o$  时  $\sigma_{xr} = 0$ ,即空心圆柱管内外表面剪应力自由。根据应力与内力的关系,进一步获得  $M$  和  $Q$  的表达式。

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA = (EI)^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - (EI)_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$Q = \int_A \sigma_{xz} dA = (GA)^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \quad (8)$$

其中,  $(EI)^*$ 、 $(EI)_0$ 、 $(GA)^*$  分别是与弹性模量和剪切模量有关的积分常数,其积分表达式分别为

$$(EI)^* = \int_A z f(y, z) E(r) dA \quad (9)$$

$$(EI)_0 = \int_A z^2 E(r) dA \quad (10)$$

$$(GA)^* = \int_A G(r) \frac{\partial f}{\partial z} dA \quad (11)$$

其中,  $E(r)$  和  $G(r)$  分别表示功能梯度圆柱管的弹性模量和剪切模量。对于双参数弹性基上的空心圆柱管,横向和纵向平衡方程分别为

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -q + K_1 w - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = -m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + m_{2f} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \quad (13)$$

其中:  $K_1$  和  $K_2$  分别为双参数弹性基的平移和旋转刚度。

$$m_0 = \int_A \rho(r) dA \quad (14)$$

$$m_2 = \int_A z^2 \rho(r) dA \quad (15)$$

$$m_{2f} = \int_A z f(y, z) \rho(r) dA \quad (16)$$

$\rho(r)$  表示功能梯度圆柱管的密度。若  $K_2 = 0$ , 则为 Winkler 弹性基。若  $K_1 = K_2 = 0$ , 则表示结构处于自由空间。将内力表达式(7)~(8)代入平衡方程(12)~(13),可得关于  $w$  和转角  $\psi$  的耦合控制方程。

$$K_1 w - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (GA)^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = q \quad (17)$$

$$(EI)^* \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - (EI)_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (GA)^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = (m_{2f} - m_2) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + m_{2f} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (18)$$

为了将方程(19)和(20)解耦,引入辅助函数  $F(x)$ ,将挠度  $w$  和转角  $\psi$  分别写成如下形式:

$$w = F - \frac{(EI)^*}{(GA)^*} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{m_{2f}}{(GA)^*} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (19)$$

$$\psi = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{(EI)_0 - (EI)^*}{(GA)^*} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{m_2 - m_{2f}}{(GA)^*} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial t^2} \quad (20)$$

将式(19)和式(20)分别代入式(17)和式(18)中,可将耦合控制方程化为下述单一控制方程。

$$b_4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - b_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial t^2} + b_1 \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + b_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{K_1}{(EI)_0} F = q \quad (21)$$

其中

$$b_4 = 1 + \frac{K_2 (EI)^*}{(EI)_0 (GA)^*} \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{K_1 (EI)^*}{(EI)_0 (GA)^*} + \frac{K_2}{(EI)_0} \quad (23)$$

$$b_2 = \frac{m_2}{(EI)_0} + \frac{m_0 (EI)^*}{(EI)_0 (GA)^*} + \frac{K_2 m_{2f}}{(EI)_0 (GA)^*} \quad (24)$$

$$b_1 = \frac{m_0 m_{2f}}{(EI)_0 (GA)^*} \quad (25)$$

$$b_0 = \frac{K_1 m_{2f}}{(EI)_0 (GA)^*} + \frac{m_0}{(EI)_0} \quad (26)$$

## 2 振动问题求解

对于自由振动,  $F(x)$  的解可以表示为

$$F = f(x) e^{i\omega t} \quad (27)$$

式中,  $\omega$  为圆频率。为求解方便,引入下述无量纲量。

$$\begin{cases} k_1 = \frac{K_1 L^4}{(EI)_0} \\ k_2 = \frac{K_2 L^2}{(EI)_0} \\ \xi = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \Omega = \omega \sqrt{\frac{m_2 L^2}{(EI)_0}} \\ \Lambda = \sqrt{\frac{(EI)^*}{(GA)^* L^2}} \end{cases} \quad (29)$$

将式(27)~(29)中的无量纲量代入式(21),令  $q = 0$ ,可得

$$a_1 \frac{d^4 f}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + a_3 f = 0 \quad (30)$$

其中

$$a_1 = 1 + k_2 \Lambda^2 \quad (31)$$

$$a_2 = \Omega^2 \left[ 1 + \frac{m_{2f} k_2 (EI)_0 \Lambda^2}{m_2 (EI)^*} + \frac{m_0 L^2 \Lambda^2}{m_2} \right] - (k_1 \Lambda^2 + k_2) \quad (32)$$

$$a_3 = \Omega^2 \left[ \frac{m_{2f} m_0 L^2 (EI)_0 \Lambda^2}{m_2^2 (EI)^*} \Omega^2 - \frac{m_{2f} (EI)_0 k_1 \Lambda^2}{m_2 (EI)^*} - \frac{m_0 L^2}{m_2} \right] + k_1 \quad (33)$$

本文重点关注工程中常见的低频振动问题,因此,可将式(30)解的形式表示为

$$f(x) = C_1 \cos(\lambda_1 \xi) + C_2 \sin(\lambda_1 \xi) + C_3 \cosh(\lambda_2 \xi) + C_4 \sinh(\lambda_2 \xi) \quad (34)$$

其中,  $C_j (j=1, \dots, 4)$  为未知系数。

$$\Omega_{\text{cut-off}} = \sqrt{\frac{\frac{m_{2f} (EI)_0 k_1 \Lambda^2}{m_2 (EI)^*} + \frac{m_0 L^2}{m_2} + \sqrt{\left[ \frac{m_{2f} (EI)_0 k_1 \Lambda^2}{m_2 (EI)^*} + \frac{m_0 L^2}{m_2} \right]^2 - 4k_1 \frac{m_{2f} m_0 L^2 (EI)_0 \Lambda^2}{m_2^2 (EI)^*}}{2m_{2f} m_0 L^2 (EI)_0 \Lambda^2 / m_2^2 (EI)^*}} \quad (38)$$

当圆频率  $\Omega$  的值大于截断圆频率  $\Omega_{\text{cut-off}}$  时,圆柱管发生高频振动。 $\lambda_2$  的值从实数变为虚数,式(34)中解的双曲函数变为三角函数。取特殊情况  $k_1 = k_2 = 0$ , 功能梯度空心圆柱管的截断圆频率可以表示为

$$\Omega_{\text{cut-off}} = \sqrt{\frac{m_2 (GA)^* L^2}{m_{2f} (EI)_0}} \quad (39)$$

结合式(29),也可将式(39)表示为

$$\omega_{\text{cut-off}} = \sqrt{\frac{(GA)^*}{m_{2f}}} \quad (40)$$

对于各向同性材料,式(39)和式(40)将分别退化为

$$\Omega_{\text{cut-off}} = \sqrt{\frac{2GAL^2}{3EI_1}} \quad (41)$$

$$\omega_{\text{cut-off}} = \sqrt{\frac{2GA}{3\rho I_1}} \quad (42)$$

其中,积分常数  $(GA)^*$  和  $(EI)_0$  分别退化为  $GA$  和  $EI_1, I_1, I$  和  $A$  的表达式如下:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{7I}{9} + \frac{5A}{9} \frac{R_i^2 R_o^2}{R_i^2 + R_o^2} \\ I = \frac{\pi}{4} (R_o^4 - R_i^4) \\ A = \pi (R_o^2 - R_i^2) \end{cases} \quad (43)$$

与已有文献[8]中的结果一致。

至此,如式(34)所示,本文已求得辅助函数的表达式。将式(34)分别代入式(19)、式(20)、式(7)和式(8)中,可以获得挠度  $w$ 、转角  $\psi$ 、弯矩  $M$  和剪力  $Q$  的表达式。

$$w = (1 + \Pi_1) [C_1 \cos(\lambda_1 \xi) + C_2 \sin(\lambda_1 \xi)] + (1 -$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2a_1} (\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} + a_2)} \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2a_1} (\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} - a_2)} \end{cases} \quad (35)$$

低频振动的频率范围如式(36)所示:

$$\frac{m_{2f} m_0 L^2 (EI)_0 \Lambda^2}{m_2^2 (EI)^*} \Omega^4 - \left[ \frac{m_{2f} (EI)_0 k_1 \Lambda^2}{m_2 (EI)^*} + \frac{m_0 L^2}{m_2} \right] \Omega^2 + k_1 < 0 \quad (36)$$

也可写为

$$\Omega < \Omega_{\text{cut-off}} \quad (37)$$

式中,截断圆频率  $\Omega_{\text{cut-off}}$  可表示为:

$$\Pi_2) [C_3 \cosh(\lambda_2 \xi) + C_4 \sinh(\lambda_2 \xi)] \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_1 (1 - \Lambda_1) [C_1 \sin(\lambda_1 \xi) - C_2 \cos(\lambda_1 \xi)] - \\ & \lambda_2 (1 + \Lambda_2) [C_3 \sinh(\lambda_2 \xi) + C_4 \cosh(\lambda_2 \xi)] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} M = & \left( E_2 + \frac{E_2 \rho_4 - E_4 \rho_2}{G_0} \right) \times \{ \lambda_1^2 [C_1 \cos(\lambda_1 \xi) + \\ & C_2 \sin(\lambda_1 \xi)] - \lambda_2^2 [C_3 \cosh(\lambda_2 \xi) + \\ & C_4 \sinh(\lambda_2 \xi)] \} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} Q = & -\lambda_1 (E_2 \lambda_1^2 - \rho_2 \omega^2) \times \{ C_1 \sin(\lambda_1 \xi) - \\ & C_2 \cos(\lambda_1 \xi) + \frac{\lambda_2 (\Pi_2 + \Lambda_2)}{\lambda_1 (\Pi_1 + \Lambda_1)} [C_3 \cosh(\lambda_2 \xi) + \\ & C_4 \sinh(\lambda_2 \xi)] \} \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\Pi_1 = \frac{(EI)^* \lambda_1^2 - m_{2f} \omega^2}{(GA)^*} \quad (48)$$

$$\Pi_2 = \frac{(EI)^* \lambda_1^2 + m_{2f} \omega^2}{(GA)^*} \quad (49)$$

$$\Lambda_1 = \frac{[(EI)_0 - (EI)^*] \lambda_1^2 - (m_2 - m_{2f}) \omega^2}{(GA)^*} \quad (50)$$

$$\Lambda_2 = \frac{[(EI)_0 - (EI)^*] \lambda_1^2 + (m_2 - m_{2f}) \omega^2}{(GA)^*} \quad (51)$$

根据边界条件,可得关于位移和内力的方程组。为使未知系数  $C_j (j=1, \dots, 4)$  存在非零解,需令系数矩阵行列式等于零,得到频率方程。频率方程通常是具有无限个正根的超越方程,对应无限个固有频率。作为例证,给出悬臂空心圆柱管

的求解过程,边界条件如下:

$$w(0) = \psi(0) = M(L) = Q(L) = 0 \quad (52)$$

利用式(52)的前三项,可得系数间关系如下:

$$C_3 = -\frac{1 + \Pi_1}{1 - \Pi_2} C_1 \quad (53)$$

$$C_4 = -\frac{\lambda_1(1 - A_1)}{\lambda_2(1 + A_2)} C_2 \quad (54)$$

$$C_2 = -\frac{\lambda_1(1 + A_2)\Psi\cos(\lambda_1 L) + \lambda_2(1 - A_1)\cosh(\lambda_2 L)}{\Psi[\lambda_1(1 + A_2)\sin(\lambda_1 L) + \lambda_2(1 - A_1)\sinh(\lambda_2 L)]} C_1 \quad (55)$$

将式(53)~(55)代入式(52)的第四项,可得:

$$1 + \frac{\lambda_2(\Pi_2 + A_2)(1 - A_1)^2}{\Psi\lambda_1(\Pi_1 + A_1)(1 + A_2)^2} + \frac{1 - A_1}{1 + A_2} \left[ \left( \frac{\Pi_2 + A_2}{\Pi_1 + A_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1\Psi} \right) \cos(\lambda_1 L) \cosh(\lambda_2 L) + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\Pi_2 + A_2}{(\Pi_1 + A_1)\Psi} \right) \sin(\lambda_1 L) \sinh(\lambda_2 L) \right] = 0 \quad (56)$$

其中

$$\Psi = \frac{\lambda_1(1 - A_1)(1 - \Pi_2)}{\lambda_2(1 + A_2)(1 + \Pi_1)} \quad (57)$$

式(56)即为双参数弹性基上悬臂空心圆柱管的频率方程。求解该方程可得固有频率的精确值。一旦求得固有频率,就可通过挠度和转角表达式给出振型。

对于其他边界条件,可类似获得频率方程和振型结果。表 1 和表 2 分别给出了两端简支、固支-自由和两端固支三种边界条件下的频率方程和振型(包括挠度和转角)。需要指出的是,表 1 中的频率方程与文献[8]中相关特征方程形式类似。不同的是,本文的特征值  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  考虑了弹性基刚度系数  $K_1$  和  $K_2$  的影响。如果令  $K_1 = K_2 =$

表 1 Winkler-Pasternak 弹性基空心圆柱管频率方程

Tab.1 Frequency equation for hollow cylindrical pipes on Winkler-Pasternak elastic foundation

边界条件	频率方程
简支-简支	$\sin\lambda_1 = 0$
固支-自由	$1 + \frac{\lambda_2(\Pi_2 + A_2)(1 - A_1)^2}{\Psi\lambda_1(\Pi_1 + A_1)(1 + A_2)^2} + \frac{1 - A_1}{1 + A_2} \left[ \left( \frac{\Pi_2 + A_2}{\Pi_1 + A_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1\Psi} \right) \cos\lambda_1 \cosh\lambda_2 + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\Pi_2 + A_2}{(\Pi_1 + A_1)\Psi} \right) \sin\lambda_1 \sinh\lambda_2 \right] = 0$
固支-固支	$2 - 2\cos\lambda_1 \cosh\lambda_2 - \left( \Psi - \frac{1}{\Psi} \right) \sin\lambda_1 \sinh\lambda_2 = 0$

表 2 Winkler-Pasternak 弹性基空心圆柱管振型方程

Tab.2 Vibration mode equation for hollow cylindrical pipes on Winkler-Pasternak elastic foundation

边界条件	振型控制方程
简支-简支	挠度: $w = \sin(n\pi\xi)$ 转角: $\psi = \cos(n\pi\xi)$
固支-自由	$\text{挠度: } w = \cos(\lambda_1\xi) - \cosh(\lambda_2\xi) - \frac{\lambda_1(1 + A_2)\Psi\cos\lambda_1 + \lambda_2(1 - A_1)\cosh\lambda_2}{\Psi[\lambda_1(1 + A_2)\sin\lambda_1 + \lambda_2(1 - A_1)\sinh\lambda_2]} \left[ \sin(\lambda_1\xi) - \Psi\sinh(\lambda_2\xi) \right]$ $\text{转角: } \psi = \cos(\lambda_1\xi) - \cosh(\lambda_2\xi) + \frac{\Psi[\lambda_1(1 + A_2)\sin\lambda_1 + \lambda_2(1 - A_1)\sinh\lambda_2]}{\lambda_1(1 + A_2)\Psi\cos\lambda_1 + \lambda_2(1 - A_1)\cosh\lambda_2} \left[ \Psi\sin(\lambda_1\xi) + \sinh(\lambda_2\xi) \right]$
固支-固支	$\text{挠度: } w = \cos(\lambda_1\xi) - \cosh(\lambda_2\xi) - \frac{\cos\lambda_1 - \cosh\lambda_2}{\sin\lambda_1 - \Psi\sinh\lambda_2} \left[ \sin(\lambda_1\xi) - \Psi\sinh(\lambda_2\xi) \right]$ $\text{转角: } \psi = \cos(\lambda_1\xi) - \cosh(\lambda_2\xi) + \frac{\sin\lambda_1 - \Psi\sinh\lambda_2}{\cos\lambda_1 - \cosh\lambda_2} \left[ \sin(\lambda_1\xi) + \frac{1}{\Psi}\sinh(\lambda_2\xi) \right]$

0,本文所有计算结果可以退化到文献[8]中的相关结果。

### 3 结果与讨论

#### 3.1 正确性验证

本文研究径向功能梯度圆柱管,材料属性服从幂函数规律,即

$$Y(r) = Y_i + (Y_o - Y_i) \left( \frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right)^N \quad (58)$$

其中,  $Y_i$  和  $Y_o$  分别代表内、外表面的材料特性。 $N$  为梯度参数,代表幂函数形式的体积分数。下文数值计算中,内外表面材料分别设为铝和氧化锆,材料属性如下:

- 1) Al:  $E_i = 70$  GPa,  $G_i = 27$  GPa,  $\rho_i = 2\,702$  kg/m<sup>3</sup>。
- 2) ZrO<sub>2</sub>:  $E_o = 200$  GPa,  $G_o = 77$  GPa,  $\rho_o = 5\,700$  kg/m<sup>3</sup>。

为了验证本文理论的准确性,将所提理论的结果与已有文献的结果对比。表 3 和表 4 分别给出不同  $k_1$ 、 $k_2$  时,两端简支梯度圆柱管前六阶无量纲频率  $\bar{\Omega} = L^2\omega \sqrt{\rho_o A/E_o I}$  的值。表 3 和表 4 中计算结果对应模型参数分别为:  $k_2 = 0$ ,  $L/R_o = 10$ ,  $R_i/R_o = 0.5$ ,  $N = 1$ ;  $k_1 = 1$ ,  $L/R_o = 10$ ,  $R_i/R_o = 0.5$ ,  $N = 1$ 。需要指出的是,表 3 中  $k_2 = 0$  工况所对应的

结果为文献[8]中相关结果。可以发现,当  $k_1$ 、 $k_2$  趋近于 0 时,本文理论计算结果逐渐趋近于文献[8]的计算结果,这与预期相符。

仔细观察表 3 和表 4 的数据可以发现,无量纲频率  $\bar{\Omega}$  的值随着弹性地基刚度系数的增大而增大。但弹性地基刚度系数对低阶频率的影响更为显著,对基频的影响尤为显著。随着阶数增大,地基刚度系数对频率的影响逐渐减小。另外, Pasternak 参数  $k_2$  对固有频率的影响比 Winkler 参

数  $k_1$  更明显,这意味着旋转刚度对固有频率的影响比平移刚度更加显著。Najafi 等<sup>[17]</sup>发现 Pasternak 参数对挠度的影响比 Winkler 参数更加明显。本文关于  $k_2$  对振动行为影响的结论,与 Najafi 的研究结论并不冲突,二者均体现了地基刚度对于系统刚度的影响,与 Winkler 参数相比, Pasternak 参数对弹性地基抗剪刚度的影响更大。所以  $k_2$  对最大挠度和固有频率的影响更加显著。

表 3 不同  $k_1$  时简支-简支梯度圆柱管前六阶无量纲频率  $\bar{\Omega}$

Tab. 3 The first six dimensionless frequencies of simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes for different  $k_1$

$k_1$	前六阶无量纲频率					
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 6 阶
0 <sup>[8]</sup>	9.140 5	30.584 5	56.666 4	84.033 3	111.573 3	138.956 1
0.01	9.141 0	30.584 6	56.666 5	84.033 4	111.573 3	138.956 2
0.1	9.145 9	30.586 0	56.667 3	84.033 9	111.573 7	138.956 5
1	9.194 3	30.600 1	56.674 9	84.039 0	111.577 6	138.959 6
10	9.665 0	30.740 8	56.750 4	84.090 3	111.616 6	138.991 1
100	13.497 0	32.113 6	57.500 8	84.601 1	112.005 2	139.306 0

表 4 不同  $k_2$  时简支-简支梯度圆柱管前六阶无量纲频率  $\bar{\Omega}$

Tab. 4 The first six dimensionless frequencies of simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes for different  $k_2$

$k_2$	前六阶无量纲频率					
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 6 阶
0	9.194 3	30.600 1	56.674 9	84.039 0	111.577 6	138.959 6
0.01	9.199 6	30.606 3	56.682 3	84.048 0	111.588 3	138.972 1
0.1	9.247 1	30.661 9	56.749 5	84.128 9	111.684 3	139.084 0
1	9.709 2	31.212 5	57.416 5	84.933 8	112.640 1	140.198 5
10	13.485 8	36.258 5	63.697 0	92.588 9	121.774 3	150.879 0
100	32.510 2	68.519 7	107.514 9	148.078 8	189.349 4	230.900 0

### 3.2 梯度参数和刚度系数对频率的影响

本节研究梯度参数和弹性地基刚度系数对固有频率的影响。根据表 1 中的频率方程,表 5~7 分别给出两端简支、两端固支和固支-自由功能梯度空心圆柱管的无量纲固有频率  $\bar{\Omega}$ 。需表 5~7 中计算结果对应的模型参数为:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $L/R_0 = 10$ ,  $R_1/R_0 = 0.5$ 。根据表中结果可知,随着梯度参数  $N$  的增大,无量纲频率  $\bar{\Omega}$  逐渐降低。这是因为  $N$  增大时,功能梯度空心圆柱管的主要

组分材料从氧化锆逐渐过渡为铝。为了详细比较梯度参数对不同阶频率的影响,表 5~7 提供了不同梯度参数与梯度参数  $N = 0$  对应无量纲固有频率之间的相对误差  $\varepsilon_p$ 。可以发现,梯度参数  $N$  对基频的影响是最小的。随着模态数的增大,影响效果略有增大,这一现象对于文中每种边界条件均一致。

基频对于振动问题分析至关重要。图 2 和图 3(对应模型参数:  $L/R_0 = 10$ ,  $R_1/R_0 = 0.5$ ,  $N = 1$ )

表 5 不同梯度参数时简支 - 简支梯度圆柱管前三阶无量纲频率  $\bar{\Omega}$  与相对误差  $\varepsilon_p$

Tab. 5 The first three dimensionless frequencies  $\bar{\Omega}$  and relative error  $\varepsilon_p$  of double simply supported FG cylindrical tubes for different gradient index  $N$

N	第 1 阶		第 2 阶		第 3 阶	
	无量纲频率		无量纲频率		无量纲频率	
	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$
0	9.712 9	0	31.566 1	0	58.558 0	0
0.1	9.712 9	0.18	31.562 0	0.01	58.462 0	0.16
0.5	9.746 6	0.35	31.445 2	0.38	58.003 8	0.95
1	9.709 2	0.04	31.212 5	1.12	57.416 4	1.95
2	9.585 7	1.31	30.733 0	2.64	56.419 1	3.65
10	8.973 1	7.62	28.881 5	8.50	53.179 0	9.19

表 6 不同梯度参数时固支 - 固支梯度圆柱管无量纲频率  $\bar{\Omega}$  与相对误差  $\varepsilon_p$

Tab. 6 The dimensionless frequency  $\bar{\Omega}$  and the relative error  $\varepsilon_p$  of clamped - clamped gradient cylindrical tubes for different gradient parameters

N	第 1 阶		第 2 阶		第 3 阶	
	无量纲频率		无量纲频率		无量纲频率	
	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$
0	17.762 8	0	39.521 7	0	64.704 5	0
0.1	17.658 3	0.59	39.401 5	0.30	64.463 1	0.37
0.5	17.614 8	0.83	38.938 0	1.48	63.590 3	1.72
1	17.442 0	1.81	38.437 9	2.74	62.704 7	3.09
2	17.138 7	3.51	37.684 4	4.65	61.433 0	5.06
10	16.136 4	9.16	35.596 8	9.93	58.104 5	10.20

表 7 不同梯度参数时固支 - 自由梯度圆柱管无量纲频率  $\bar{\Omega}$  与相对误差  $\varepsilon_p$

Tab. 7 The dimensionless frequency  $\bar{\Omega}$  and the relative error  $\varepsilon_p$  of clamped - free gradient cylindrical tubes for different gradient parameters

N	第 1 阶		第 2 阶		第 3 阶	
	无量纲频率		无量纲频率		无量纲频率	
	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$	$\bar{\Omega}$	$\varepsilon_p/\%$
0	3.452 6	0	18.312 9	0	42.361 3	0
0.1	3.460 3	0.22	18.307 3	0.03	42.283 6	0.18
0.5	3.470 1	0.51	18.229 7	0.45	41.929 4	1.02
1	3.459 3	0.19	18.087 1	1.23	41.489 1	2.06
2	3.417 1	1.03	17.801 8	2.79	40.754 3	3.79
10	3.195 6	7.44	16.731 5	8.64	38.416 1	9.31

分别绘制了无量纲基频  $\bar{\Omega}_1 = \omega_1 L^2 \sqrt{\rho_0 A / (E_0 I)}$  随刚度系数  $k_1$  和  $k_2$  的变化情况,  $\omega_1$  代表基频。可以发现基频随着刚度系数增大而增大, 与文献 [18] 中的结论一致。比较图 2 和图 3, 可以发现 Pasternak 系数  $k_2$  对基频的影响大于 Winkler 系数  $k_1$ 。

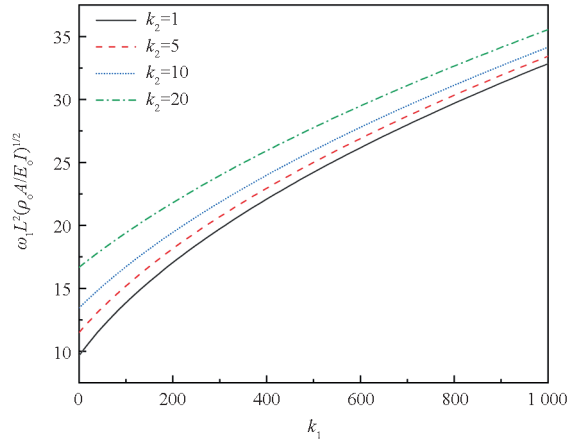


图 2 简支 - 简支梯度圆柱管无量纲基频随  $k_1$  变化情况  
Fig. 2 The variation of the dimensionless fundamental frequency with  $k_1$  for simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes

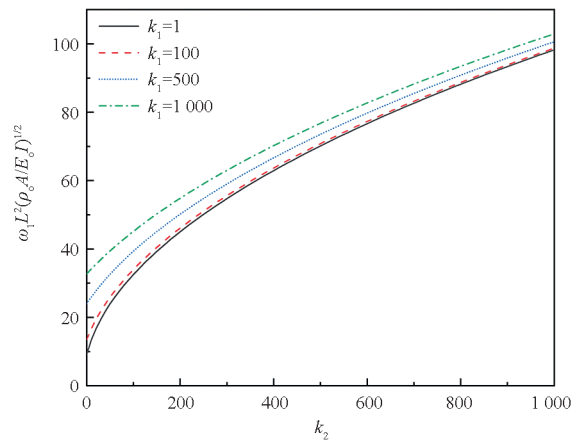


图 3 简支 - 简支梯度圆柱管无量纲基频随  $k_2$  变化情况  
Fig. 3 The variation of the dimensionless fundamental frequency with  $k_2$  for simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes

图 4 和图 5 分别绘制了不同刚度系数  $k_1$  和  $k_2$  时, 两端简支功能梯度空心圆柱管的基频  $\omega_1$  随长度  $L$  的变化情况。对应模型参数分别为:  $k_2 = 0, R_0 = 1, R_1/R_0 = 0.5, N = 1$  和  $k_1 = 1, R_0 = 1, R_1/R_0 = 0.5, N = 1$ 。显然, 随着长度  $L$  的增大, 基频迅速降低, 而刚度系数  $k_1$  和  $k_2$  则会不同程度地提高基频的值。

获得固有频率后, 可以根据表 2 中的公式确

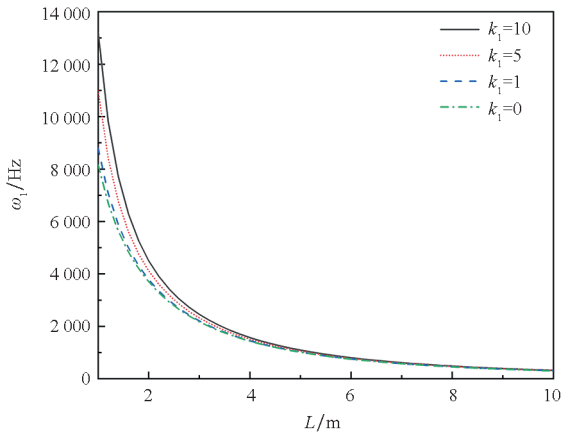


图4 不同  $k_1$  时简支 - 简支梯度圆柱管基频随长度变化情况

Fig.4 Variation of the fundamental frequency with length for simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes at different values of  $k_1$

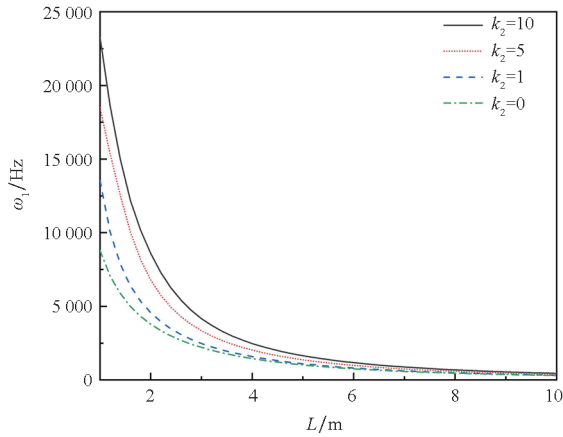
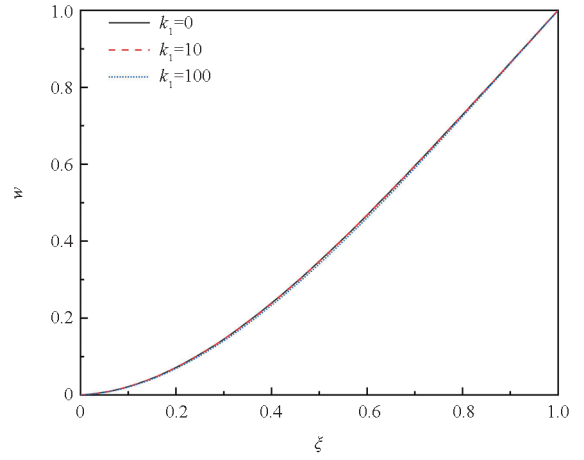


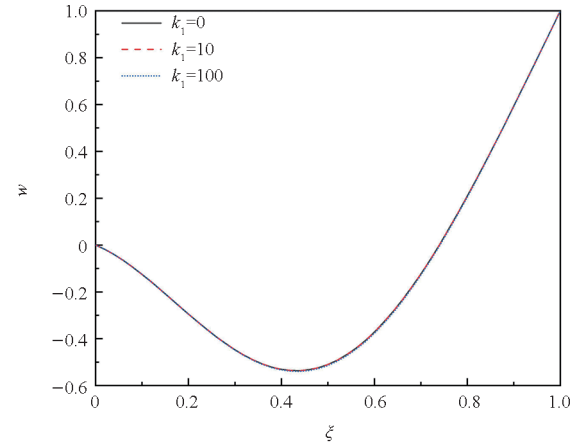
图5 不同  $k_2$  时简支 - 简支梯度圆柱管基频随长度变化情况

Fig.5 Variation of the fundamental frequency with length for simply supported-simply supported gradient cylindrical tubes at different values of  $k_2$

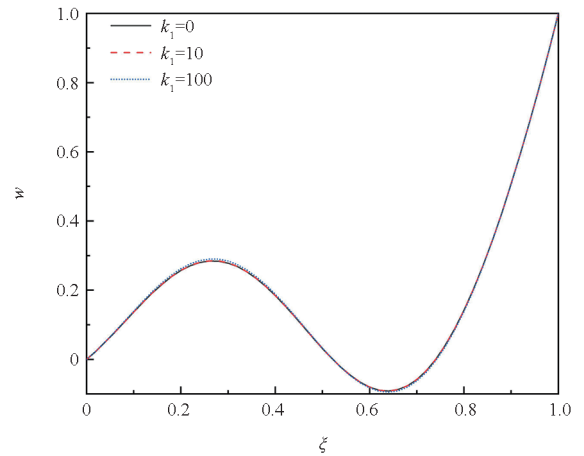
定挠度和转角。图6和图7给出了不同系数  $k_1$  和  $k_2$  时的模态振型,对应模型参数分别为:  $k_2 = 0, R_i/R_0 = 0.5, L/R_0 = 10, N = 1$  和  $k_1 = 1, R_i/R_0 = 0.5, L/R_0 = 10, N = 1$ 。将每个振型归一化处理,可以发现, Pasternak 刚度系数  $k_2$  对振型的影响比 Winkler 刚度系数  $k_1$  更加明显。原因是  $k_2$  对剪切刚度的影响高于  $k_1$ , 剪切刚度越高,对应的模态位移越小。随着阶数的提高,刚度系数对振型的影响更加明显。



(a) 第一阶  
(a) The 1st order



(b) 第二阶  
(b) The 2nd order

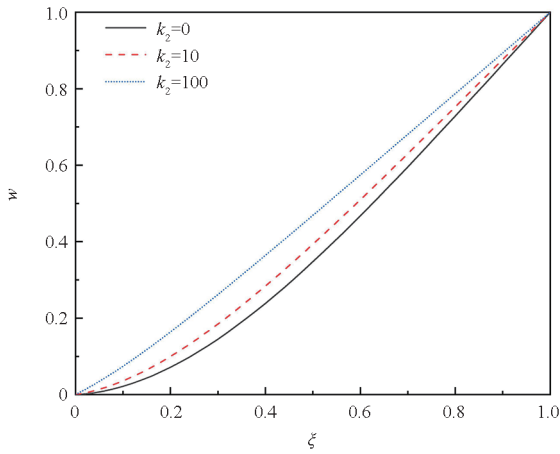


(c) 第三阶  
(c) The 3rd order

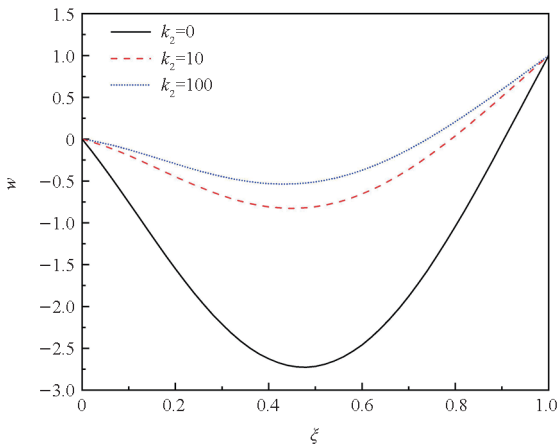
图6 不同  $k_1$  对应的前三阶振型

Fig.6 The first three modes of vibration corresponding to different  $k_1$

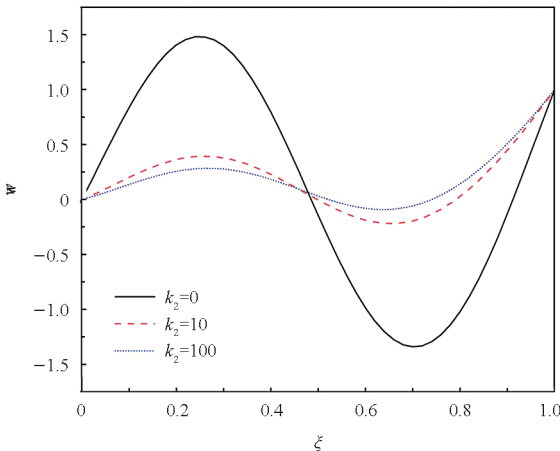




(a) 第一阶  
(a) The 1st order



(b) 第二阶  
(b) The 2nd order



(c) 第三阶  
(c) The 3rd order

图 7 不同  $k_2$  对应的前三阶振型

Fig. 7 The first three modes of vibration corresponding to different  $k_2$

## 4 结论

本文基于高阶梁理论,研究了双参数弹性基

功能梯度空心圆柱管自由振动行为。通过引入自动满足表面剪应力自由边界条件的翘曲形状函数,推导了双参数弹性基上功能梯度空心圆柱管振动行为的控制方程,求得了几种典型边界条件下自由振动频率方程。通过数值算例验证了模型的正确性。得出下述一些结论:

- 1) 弹性地基刚度系数的增大会使频率增大。
- 2) 无量纲频率值随着地基刚度系数的增大而增大。但弹性地基刚度系数对低阶频率的影响更为明显,是对基频的影响最为显著。
- 3) Pasternak 系数  $k_2$  对固有频率和振型的影响比 Winkler 系数  $k_1$  更显著,即旋转刚度对振动行为的影响比平移刚度更显著。
- 4) 梯度参数  $N$  显著影响无量纲频率,可以通过调整梯度参数获得期望的固有频率。
- 5) 长径比较小时基频受刚度系数的影响更大。随着长径比增大,弹性刚度系数的影响逐渐减小。

## 参考文献 (References)

- [1] LOVE A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity [M]. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
  - [2] SOLDATOS K P, HADJIGEORGIOU V P. Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 137(3): 369–384.
  - [3] LEVINSON M. A new rectangular beam theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 74(1): 81–87.
  - [4] REDDY J N, LIU C F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells [J]. International Journal of Engineering Science, 1985, 23(3): 319–330.
  - [5] HUANG Y, LI X F. Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation [J]. Materials & Design, 2010, 31(7): 3159–3166.
  - [6] HUANG Y, WU J X, LI X F, et al. Higher-order theory for bending and vibration of beams with circular cross section [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2013, 80(1): 91–104.
  - [7] MA W L, CHENG C, CHEN X, et al. Free vibration of radially graded hollow cylinders subject to axial force via a higher-order shear deformation beam theory [J]. Composite Structures, 2021, 255: 112957.
  - [8] MA W L, JIANG Z C, LEE K Y, et al. A refined beam theory for bending and vibration of functionally graded tube-beams [J]. Composite Structures, 2020, 236: 111878.
  - [9] 马维力, 申柳雷, 宋殿义, 等. 弹性基上圆柱管弯曲行为的高阶剪切梁理论解 [J]. 国防科技大学学报, 2022, 44(2): 203–210.
- MA W L, SHEN L L, SONG D Y, et al. Theoretical solution of high-order shear deformation beam theory for bending

- behavior of cylindrical tube on elastic foundation[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2022, 44(2): 203 - 210. (in Chinese)
- [10] LI X F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams [J]. *Journal of Sound Vibration*, 2008, 318(4/5): 1210 - 1229.
- [11] 邓先琪, 苏成, 马海涛. 功能梯度梁静力与动力分析的格林函数法[J]. *工程力学*, 2020, 37(9): 248 - 256.  
DENG X Q, SU C, MA H T. Green's function method for static and dynamic analysis of functionally graded beams[J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(9): 248 - 256. (in Chinese)
- [12] 王壮壮, 马连生. 高阶剪切变形板理论下 FG-GRC 板的屈曲和弯曲分析[J]. *工程力学*, 2023, 40(6): 9 - 18.  
WANG Z Z, MA L S. Buckling and bending analysis of FG-GRC plates using high-order shear deformation plate theories[J]. *Engineering Mechanics*, 2023, 40(6): 9 - 18. (in Chinese)
- [13] 艾智勇, 王禾, 慕金晶. 层状分数阶黏弹性饱和地基与梁共同作用的时效研究[J]. *力学学报*, 2021, 53(5): 1402 - 1411.  
AI Z Y, WANG H, MU J J. Time-dependent analysis of the interaction between multilayered fractional viscoelastic saturated soils and beams[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(5): 1402 - 1411. (in Chinese)
- [14] 周凤玺, 蒲育. 热-力-粘弹耦合多孔 FGVM 梁的动力学特性[J]. *工程力学*, 2021, 38(2): 16 - 26.  
ZHOU F X, PU Y. Dynamic behaviors of porous FGVM beams subjected to thermal mechanical viscoelastic effects[J]. *Engineering Mechanics*, 2021, 38(2): 16 - 26. (in Chinese)
- [15] 蒲育, 滕兆春. Winkler-Pasternak 弹性地基梁自由振动的二维弹性分析[J]. *计算力学学报*, 2016, 33(2): 182 - 187, 201.  
PU Y, TENG Z C. Two-dimensional elastic analysis for free vibration of beams set on Winkler-Pasternak elastic foundations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(2): 182 - 187, 201. (in Chinese)
- [16] 蒲育, 滕兆春. Winkler-Pasternak 弹性地基 FGM 梁自由振动二维弹性解[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(20): 74 - 79.  
PU Y, TENG Z C. Two-dimensional elasticity solutions for free vibration of FGM beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundations [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(20): 74 - 79. (in Chinese)
- [17] NAJAFI F, SHOJAEEFARD M H, GOOGARCHIN H S. Nonlinear dynamic response of FGM beams with Winkler-Pasternak foundation subject to noncentral low velocity impact in thermal field [J]. *Composite Structures*, 2017, 167: 132 - 143.
- [18] DENG H, CHEN K D, CHENG W, et al. Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam system on Winkler-Pasternak elastic foundation [J]. *Composite Structures*, 2017, 160: 152 - 168.