doi:10.11887/j.cn.202503007 http://journal.nudt.edu.cn

航天器编队轨迹跟踪 Port-Hamiltonian 控制方法

刘 俊[1],包素艳[2],陈琪锋[1*],郝文康[1]
(1. 中南大学 自动化学院, 湖南 长沙 410083; 2. 北京航天万源科技有限公司, 北京 100076)

摘 要:针对航天器编队相对运动构型时变轨迹跟踪控制问题,基于端口哈密顿(port-Hamiltonian,PH)模型和广义正则变换,采用互联阻尼分配无源控制(interconnection and damping assignment passivity-based control,IDA-PBC)算法设计了一种分布式协调控制律。通过对航天器编队线性动力学的PH建模和广义正则变换,得到轨迹跟踪误差PH系统。在拓扑结构连通且固定的假设下,利用相对运动误差PH系统模型,基于IDA-PBC算法推导出了考虑邻居航天器间相对误差的轨迹跟踪分布式协调控制律。数值仿真验证了控制律的有效性,结果表明,利用PH控制方法可以完成航天器编队轨迹跟踪控制,为航天器编队分布式协调控制提供了一种新的有效方法。

关键词:航天器编队;广义正则变换;轨迹跟踪;IDA-PBC;port-Hamiltonian
中图分类号:V448.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2025)03-064-09

论文拓展

Port-Hamiltonian control method for spacecraft formation trajectory tracking

LIU Jun[1], *BAO Suyan*[2], *CHEN Qifeng*[1*], *HAO Wenkang*[1]
(1. School of Automation, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Beijing Aerospace Wanyuan Science & Technology Co. Ltd, Beijing 100076, China)

Abstract: For the time-varying trajectory tracking control problem of the relative motion configuration of spacecraft formation, a distributed coordinated control method was designed based on the PH(port-Hamiltonian) model and generalized canonical transformation, using IDA-PBC (interconnection and damping assignment passivity-based control) algorithm. Through the PH modeling and generalized canonical transformation of the linear dynamics of spacecraft formation, the trajectory tracking error PH system was obtained. Under the assumption that the topological structure is connected and fixed, a distributed coordinated control method for formation trajectory tracking considering relative errors between neighboring spacecraft was derived based on IDA-PBC algorithm and using the PH model of relative motion errors. Numerical simulation verifies the effectiveness of the control method. The results show that the PH method can complete the trajectory tracking control of spacecraft formation, which provides a new effective method for the distributed coordinated control of spacecraft formation.

Keywords: spacecraft formation; generalized canonical transformation; trajectory tracking; IDA-PBC; port-Hamiltonian

航天器编队是指由多个航天器根据指定任务需求按一定拓扑结构组成的集群。编队航天器在轨飞行时,为了实现不同的任务,需要对编队飞行轨迹进行跟踪控制,从而达到预定构型。在航天器编队控制领域已有多种分布式控制,如一致性算法、虚拟结构法、人工势函数法、滑模控制以及循环追踪控制方法。关于以上控制方法,相关的研究成果有如:Sun 等[1]为提高航天器编队飞行控制的协同性,应用一致性理论设计了非线性控制律,研究了基于一致性理论的航天器编队飞行协调控制方法;殷泽阳等[2]针对利用多航天器编队协同绕飞空间非合作目标的控制问题,提出了一种基于全驱系统理论的分布式约定时间预设性能控制方法;刘幸川等[3]针对近地圆轨道多航天器编队重构问题,提出一种使用凸优化方法的编队重构最优轨迹规划方法;周立凡[4]针对相对距

收稿日期:2023-07-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(62073343)
第一作者:刘俊(1986—),男,湖南长沙人,高级工程师,博士,E-mail:liu919jun@126.com
*通信作者:陈琪锋(1976—),男,河南荥阳人,教授,博士,博士生导师,E-mail:chenqifeng@csu.edu.cn
引用格式:刘俊,包素艳,陈琪锋,等. 航天器编队轨迹跟踪 Port-Hamiltonian 控制方法[J]. 国防科技大学学报,2025,47(3):64-72.
Citation:LIU J, BAO S Y, CHEN Q F, et al. Port-Hamiltonian control method for spacecraft formation trajectory tracking [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(3): 64-72.

离较近、对编队队形有需求的航天器编队系统控制问题，给出了快速终端滑模控制方法；赵磊等[5]设计积分滑模编队飞行控制器，实现了行星悬浮轨道附近编队保持控制；杨希祥等[6]采用循环追踪算法解决了编队航天器交会控制问题。

近年来，采用能量思想的端口哈密顿(port-Hamiltonian，PH)系统理论逐步兴起并快速发展，为复杂非线性系统建模与控制提供了有潜力的求解方案[7-8]。另外 PH 理论从能量的角度出发实现对系统的控制，解决了李雅普诺夫(Lyapunov)函数的选取问题，用其建立的模型更加符合工程实际应用。在航天器编队控制领域，PH 系统方法得到了初步研究。Javanmardi 等[9]基于 PH 理论研究了大型机械系统网络的领导跟随式编队跟踪控制，其中编队网络由领导跟随的有向通信图表示，所有个体被描述为具有恒定质量矩阵的 PH 系统，并验证了网络规模的可扩展性和特定编队的保持性。Javanmardi 等[10]还建立了考虑地球非球形 J2 项和大气阻力摄动的航天器相对运动 PH 模型。Vos 等[11]建立了赤道平面二维轨道动力学 PH 模型，利用广义正则变换方法获得误差系统 PH 模型，然后设计了基于虚拟弹簧阻尼的内部控制律，使多个卫星在轨道上均匀分布。该文是多卫星 PH 系统协调控制的首次尝试，针对的是特殊星座位置保持控制问题。

由于航天器编队轨迹跟踪是时变的，而对于时变 PH 系统，一般不满足无源性，因而一些针对性的控制方法得到研究。Guo 等[12]将 Casimir 函数法拓展到了时变 PH 系统，从而通过能量整形来镇定时变 PH 系统。Fujimoto 等[13-14]借鉴经典 Hamiltonian 系统广义正则变换方法，对 PH 系统引入了广义正则变换，可保留原 PH 系统的结构，因而提供了对 PH 系统进行分析和综合的另一视角和工具；建立了利用广义正则变换构造 PH 系统轨迹跟踪误差系统的方法框架，其关键优势在于可以构造出具有无源性的时变误差 PH 系统，从而能通过对误差系统镇定来实现轨迹跟踪。上述时变 PH 系统控制和广义正则变换方法为 PH 系统跟踪控制提供了理论基础。

互联阻尼分配无源控制(interconnection and damping assignment passivity-based control，IDA-PBC)是一种针对非线性系统的控制律设计方法，自从 Ortega 等[15]在 2001 年提出该方法以来，已经应用到非常多的领域[16]，在航天器控制方面也初步得到了应用。如 Javanmardi 等[10]应用 IDA-PBC 控制方法以及压缩分析设计了跟踪控制律。但是该文的方法仅是基于领导/追随者的一对一跟踪，跟踪控制中缺乏相互协调和反馈机制，如何实现编队的分布式协调控制，该研究并未提供解决思路。

针对航天器编队轨迹跟踪控制问题，本文结合广义正则变换及 IDA-PBC 算法设计了分布式协调控制律，通过仿真验证了广义正则变换设计的领导 - 跟随控制律和分布式跟踪控制律在跟踪时变编队构型中的有效性，并对两种方法进行了比较分析，探索了 PH 理论在航天器编队分布式协调控制领域的应用。

1　理论基础

1.1　PH 模型

物理系统的 PH 模型[17]如下：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{D})\dfrac{\partial H(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial H(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}$ 为系统状态变量，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$；$H(\boldsymbol{x},t)$ 为系统 Hamiltonian 函数；$\boldsymbol{u}$ 为系统控制输入，$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$；$\boldsymbol{y}$ 为系统控制输出，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$；$\boldsymbol{J}$ 是一个反对称矩阵，表示系统的互联矩阵；$\boldsymbol{D}$ 是一个非负定的对称矩阵，表示系统的阻尼矩阵；$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{0}_{(n-m)\times m}\quad \boldsymbol{I}_m]^{\mathrm{T}}$。

1.2　PH 系统广义正则变换

广义正则变换是一组坐标和反馈的变换，它保持了原系统的 PH 结构。将期望轨迹耦合到反馈系统中，使转换后的 PH 系统成为一个误差系统，由此得到的系统描述了原系统跟踪误差的行为，从而实现轨迹跟踪控制。

定义 1[13]　如果变换 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)$，$\bar{H}=H(\boldsymbol{x},t)+Q(\boldsymbol{x},t)$，$\bar{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},t)$，$\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)$，将 PH 系统(1)转换成：

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=(\bar{\boldsymbol{J}}-\bar{\boldsymbol{D}})\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}+\bar{\boldsymbol{G}}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{y}}=\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}\end{cases}\tag{2}$$

称此变换为 PH 系统的广义正则变换，式(2)为误差系统，式中 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为系统(1)中状态变量 $\boldsymbol{x}$ 的广义误差，$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)$ 为误差系统 Hamiltonian 函数，$\bar{\boldsymbol{u}}$ 为误差系统输入，$\bar{\boldsymbol{y}}$ 为误差系统输出；$\bar{\boldsymbol{J}}$ 是一个反对称矩阵，表示误差系统的互联矩阵；$\bar{\boldsymbol{D}}$ 是一个非负定的对称矩阵，表示误差系统的阻尼矩阵；$\bar{\boldsymbol{G}}=(\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}$。

引理 1[13]　考虑 PH 系统(1)，对于任意标量函数 $Q(\boldsymbol{x},t)$ 和任意向量函数 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)$，存在一对

函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},t)$ 产生如式(2)所示的广义正则变换。函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)$、$Q(\boldsymbol{x},t)$、$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)$ 产生广义正则变换当且仅当存在 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)=-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}\geqslant\boldsymbol{0}$，满足偏微分方程：

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial(\boldsymbol{x},t)}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{D})\dfrac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{S})\dfrac{\partial(H+Q)}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G\beta}\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

此时，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\dfrac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},t)$，$\bar{\boldsymbol{J}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K})\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{x}}$，$\bar{\boldsymbol{D}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{x}}$。

引理 2[13] 对于一般 PH 系统，通过 $Q(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)$ 进行广义正则变换，其中 $H+Q\geqslant0$。如果存储函数 $\bar{H}$ 满足

$$\frac{\partial\bar{H}^{\mathrm{T}}}{\partial(\boldsymbol{x},t)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}\dfrac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G\beta}\\-1\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\tag{4}$$

则新的输入输出映射 $\bar{\boldsymbol{u}}\rightarrow\bar{\boldsymbol{y}}$ 是无源的。如果式(4)满足并且函数 $\bar{H}$ 是正定的，则反馈控制

$$\bar{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},t)\bar{\boldsymbol{y}}\tag{5}$$

使得系统渐近稳定，其中 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},t)\geqslant\boldsymbol{\varepsilon I}>\boldsymbol{0}$。如果转换系统是零状态可检测的，则该反馈控制可使系统一致渐近稳定。

1.3 IDA-PBC 算法

IDA-PBC 是专门用于设计 PH 系统控制律的方法，利用状态反馈来修改系统的互联和阻尼矩阵，从而为系统配置一个正定的能量函数使之能够作为闭环系统的 Lyapunov 函数。采用 IDA-PBC 算法转化的系统仍然为 PH 系统，通过对系统配置期望的互联和阻尼矩阵能够求解出控制律，并且得到的能量函数可以自然地作为 Lyapunov 函数。

引理 3[18-19] 对于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$，若能找到函数 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$、对称矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})\geqslant\boldsymbol{0}$ 和反对称矩阵 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$ 满足偏微分方程：

$$\boldsymbol{g}^{\perp}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}^{\perp}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})]\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{g}^{\perp}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{x}^*$ 为 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$ 的极小值点，$\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ 为闭环系统的一个局部稳定的平衡点。系统控制律

$$\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\{[\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})]\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}\tag{7}$$

使系统转变成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})]\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\tag{8}$$

另外，如果包含在

$$\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,[\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\tag{9}$$

中的闭环系统(8)最大不变集等于 $\{\boldsymbol{x}^*\}$，则系统渐进稳定。

2 基于广义正则变换的航天器编队轨迹跟踪控制

2.1 动力学模型

本文考虑地球轨道上的航天器编队，因为各航天器的轨道根数与参考轨道根数仅有很小的差异，因此各航天器跟随参考点(真实或虚拟的航天器)并在其附近运动。若参考轨道为圆轨道，则各航天器相对参考点的质心运动可近似地用 CW 方程这一线性动力学模型表示。

航天器动力学模型(归一化后)为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{Gu}\tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3}&\boldsymbol{I}_3\\\boldsymbol{T}&\boldsymbol{S}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3}\\\boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{x}=[x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}]^{\mathrm{T}}$ 为航天器状态变量，$\boldsymbol{u}=[u_x,u_y,u_z]^{\mathrm{T}}$ 是航天器的控制加速度；$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 为根据航天器动力学方程得到的相关系数矩阵；坐标系为旋转的 Euler-Hill 参考坐标系[15]。为了保证航天器具有封闭的相对运动轨迹，取 $\dot{y}_0=-2\omega x_0$(ω 为角速度)，则 CW 方程的解析解为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\cos(\omega t+\phi)\\-2c\sin(\omega t+\phi)\\b\cos(\omega t+\phi+\varphi)\end{pmatrix}\tag{11}$$

式中：$c=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega)^2}$，$b=\sqrt{z_0^2+(\dot{z}_0/\omega)^2}$，$\begin{cases}\cos\phi=x_0/c\\\sin\phi=-\dot{x}_0/(\omega c)\end{cases}$，$\begin{cases}\cos(\phi+\varphi)=z_0/b\\\sin(\phi+\varphi)=-\dot{z}_0/(\omega b)\end{cases}$；$c$ 为长度量纲，表示绕飞轨道的大小；ϕ 为角度量纲，表示环绕卫星在绕飞轨道上的位置；b 表示 z 方向上的振动幅值大小；φ 为角度量纲，表示 z 方向上的振动相位；x_0、z_0、$\dot{x}_0$、$\dot{z}_0$ 分别为 x、z、$\dot{x}$、$\dot{z}$ 初始值。

根据定义 1 和引理 1 对航天器相对运动轨迹跟踪进行广义正则变换，根据文献[20]可知航天器相对运动的 Hamiltonian 能量函数为：

$$H(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2 \tag{12}$$

因此结合式(10)可以得到航天器相对运动 PH 方程为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}\dfrac{\partial H(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial H(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\end{cases} \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3\\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}$, $\dfrac{\partial H(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{T} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}$。

2.2　领导-跟随控制

为了给航天器 PH 系统(13)构造一个误差系统并保证其稳定,可以对系统(13)采用如定义 1 所提出的广义正则变换。取

$$Q(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})-\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{1}{2}\dot{z}^2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}z^2 \tag{14}$$

式中,$\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}=(x_{\mathrm{d}},y_{\mathrm{d}},z_{\mathrm{d}},\dot{x}_{\mathrm{d}},\dot{y}_{\mathrm{d}},\dot{z}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$ 为航天器的期望状态,由式(14)可得:

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}=(4x-x_{\mathrm{d}},y-y_{\mathrm{d}},-z_{\mathrm{d}},-\dot{x}_{\mathrm{d}},-\dot{y}_{\mathrm{d}},-\dot{z}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},t)=(-\dot{x}_{\mathrm{d}},-\dot{y}_{\mathrm{d}},-\dot{z}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

因此根据定义 1,由式(12)和式(14)可得变换后的误差系统 Hamiltonian 能量函数为:

$$\bar{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}) \tag{17}$$

由式(17)可得以下表达式:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}} \tag{19}$$

为了得到广义正则变换后的状态表达式,求解偏微分方程(3),式中取 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{0}_{6\times6}$, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)=(4x-x_{\mathrm{d}}+2\dot{y}_{\mathrm{d}}-\ddot{x}_{\mathrm{d}},y-y_{\mathrm{d}}-2\dot{x}_{\mathrm{d}}-\ddot{y}_{\mathrm{d}},-\ddot{z}_{\mathrm{d}}-z_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$,且由式(13)可知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0}$,因此可得:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial(\boldsymbol{x},t)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}\dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta}\\ -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\\ &\Rightarrow\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}(-\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}})=\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\\ &\Rightarrow\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{20}$$

于是有:

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{J}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{J}\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}\\ \bar{\boldsymbol{G}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\\ \bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\beta}\end{cases} \tag{21}$$

2.3　系统稳定性分析

基于引理 2,可以对航天器 PH 系统(13)广义正则变换后的误差系统进行稳定性分析。因为当 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)=(4x-x_{\mathrm{d}}+2\dot{y}_{\mathrm{d}}-\ddot{x}_{\mathrm{d}},y-y_{\mathrm{d}}-2\dot{x}_{\mathrm{d}}-\ddot{y}_{\mathrm{d}},-\ddot{z}_{\mathrm{d}}-z_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$,且 $Q(\boldsymbol{x},t)$ 为式(14)时,求解式(4)可得:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{H}^{\mathrm{T}}}{\partial(\boldsymbol{x},t)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)\\ -1\end{pmatrix}\\ &=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{J}\frac{\partial Q(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)\right]+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}\\ &=-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}+\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{d}}\\ &=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{22}$$

因此可知经广义正则变换(21)得到的系统为无源系统。

令 $\boldsymbol{x}=(\bar{\boldsymbol{q}},\bar{\boldsymbol{p}})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\boldsymbol{q}}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, $\bar{\boldsymbol{p}}=(\dot{\bar{x}},\dot{\bar{y}},\dot{\bar{z}})$,由式(2)和式(21)可知,当 $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{y}})\equiv(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ 时有

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{y}}=\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{0}\\ &\Rightarrow\frac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}=\boldsymbol{0}\\ &\Rightarrow\bar{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{23}$$

以及

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{\boldsymbol{J}}\frac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}+\bar{\boldsymbol{G}}\bar{\boldsymbol{u}}\\ &\Rightarrow\begin{pmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}\\ \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3\\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{q}}}\\ \dfrac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}=-\frac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{q}}}+\boldsymbol{S}\frac{\partial \bar{H}(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}\\ &\Rightarrow\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{24}$$

由式(23)和式(24)可得 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$,因此可知系统(13)的误差系统零状态可检测。

因此,根据引理 2 可知存在反馈控制(5)使系统(13)的误差系统一致渐近稳定。

3　基于 IDA-PBC 算法的航天器编队分布式协调控制

3.1　航天器编队误差 PH 动力学模型

由若干给定的节点以及连接其中任意两个节点的边所构成的图形称为图[21],可表述为 $\boldsymbol{F}=$

$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是一个有限非空的节点集合，边集 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}$ 是由不同节点的无序偶对组成的集合，$(v_i,v_j)\in\boldsymbol{E}$ 表示节点 v_i 和 v_j 为邻接节点，节点 v_i 和 v_j 之间可以获得信息，且记节点 v_i 的邻集为 $\boldsymbol{V}_i=\{v_j\in\boldsymbol{V}:(v_i,v_j)\in\boldsymbol{E}\}$。邻邻矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为：当 $(v_i,v_j)\in\boldsymbol{E}$ 时，有 $a_{ij}=1$，否则 $a_{ij}=0$。图的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 元素取值如下：

$$\begin{cases} l_{ij}=-a_{ij},\ i\neq j \\ l_{ii}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij},i=j \end{cases} \tag{25}$$

依据 PH 系统的特性，即由多个具有 PH 结构的系统构成的系统依然是 PH 系统，由式(17)可得由多个航天器误差系统组成的编队误差系统 Hamiltonian 函数为：

$$\bar{\boldsymbol{H}}=\sum_{i=1}^{n}\bar{H}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}_i \tag{26}$$

式中，$\bar{H}_i$ 为航天器 i 的误差哈密顿函数，$\bar{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{id}$ 为航天器 i 的状态误差。

由式(26)可得：

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}}=\bar{\boldsymbol{X}} \tag{27}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{X}}=[\bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}\quad\bar{\boldsymbol{x}}_2^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad\bar{\boldsymbol{x}}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为编队误差系统状态。

因此可得编队误差系统 PH 方程为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{X}}}=(\boldsymbol{I}_n\otimes\bar{\boldsymbol{J}})\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}}+(\boldsymbol{I}_n\otimes\bar{\boldsymbol{G}})\bar{\boldsymbol{U}} \\ \bar{\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{I}_n\otimes\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}})\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}} \end{cases} \tag{28}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{U}}=[\bar{\boldsymbol{u}}_1\quad\bar{\boldsymbol{u}}_2\quad\cdots\quad\bar{\boldsymbol{u}}_n]^{\mathrm{T}}$ 为系统控制律，$\otimes$表示矩阵 Kronecker 积。

3.2 编队分布式协调控制

为了保持航天器编队相对运动构型，将各航天器间相对位置误差耦合到系统中，取编队误差系统期望 Hamiltonian 函数为：

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{\boldsymbol{x}}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}}_{ij}) \tag{29}$$

式中：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} k_{\mathrm{p}}\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_{ij}=\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_j$ 为航天器 i 与航天器 j 之间相对状态保持的误差，且仅为具有拓扑连接的航天器之间才有此项，即 $a_{ij}\neq0$；k_{p} 为互联系数。

由式(29)可求得：

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{d}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}}=\bar{\boldsymbol{X}}+\{[(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{I}_6]\bar{\boldsymbol{X}}\}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{M}) \tag{30}$$

根据引理3，求解匹配方程：

$$(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G}^{\perp})(\boldsymbol{I}_n\otimes\bar{\boldsymbol{J}})\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}} =(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G}^{\perp})[\boldsymbol{I}_n\otimes(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{d}}-\bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{d}})]\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{d}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}} \tag{31}$$

因为 $\boldsymbol{G}^{\perp}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{G}^{\perp}$ 满秩，可取 $\boldsymbol{G}^{\perp}=[\boldsymbol{I}_3\quad\boldsymbol{0}_{3\times3}]$，并设

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ -\boldsymbol{J}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix},\boldsymbol{J}_{11}=-\boldsymbol{J}_{11}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{J}_{22}=-\boldsymbol{J}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix},\boldsymbol{D}_{11}=\boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{22}=\boldsymbol{D}_{22}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{32}$$

将式(32)代入式(31)可得到方程：

$$\bar{\boldsymbol{P}}=[\boldsymbol{I}_n\otimes(\boldsymbol{J}_{11}-\boldsymbol{D}_{11})]\{[(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A})\otimes k_{\mathrm{p}}\boldsymbol{I}_3]\bar{\boldsymbol{Q}}\}+(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{J}_{12})\bar{\boldsymbol{P}} \tag{33}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G}^{\perp})\bar{\boldsymbol{X}}=(\bar{\boldsymbol{q}}_1,\bar{\boldsymbol{q}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{q}}_n)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{q}}_i=(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)$；$\bar{\boldsymbol{P}}=(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})\bar{\boldsymbol{X}}=(\bar{\boldsymbol{p}}_1,\bar{\boldsymbol{p}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{p}}_n)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{p}}_i=(\dot{\bar{x}}_i,\dot{\bar{y}}_i,\dot{\bar{z}}_i)$。

根据 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 的任意性，满足该方程的条件为 $\boldsymbol{J}_{11}=\boldsymbol{D}_{11}$，$\boldsymbol{J}_{12}=\boldsymbol{I}_3$。因此可设

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 \\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{S} \end{bmatrix} \\ \bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & k_{\mathrm{d}}\boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{34}$$

式中，k_{d} 为阻尼系数。

根据引理3可知系统控制律为：

$$\bar{\boldsymbol{U}}=(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\left\{[\boldsymbol{I}_n\otimes(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{d}}-\bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{d}})]\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{d}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}}-(\boldsymbol{I}_n\otimes\bar{\boldsymbol{J}})\frac{\partial\bar{\boldsymbol{H}}}{\partial\bar{\boldsymbol{X}}}\right\} \tag{35}$$

将式(27)、式(30)和式(34)代入式(35)中可求得系统(28)的控制律为：

$$\bar{\boldsymbol{U}}=-[(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A})\otimes k_{\mathrm{p}}\boldsymbol{I}_3]\bar{\boldsymbol{Q}}-k_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{P}} \tag{36}$$

由式(36)可得误差系统第 i 个卫星的控制律为：

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i=-[\sum_{j=1}^{n}k_{\mathrm{p}}a_{ij}(\bar{\boldsymbol{q}}_i-\bar{\boldsymbol{q}}_j)]-k_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{p}}_i \tag{37}$$

由定义1及式(37)可得原系统第 i 个卫星的控制律为：

$$\boldsymbol{u}_i=-[\sum_{j=1}^{n}k_{\mathrm{p}}a_{ij}(\bar{\boldsymbol{q}}_i-\bar{\boldsymbol{q}}_j)]-k_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{p}}_i-\boldsymbol{\beta}_i \tag{38}$$

式中，$\boldsymbol{\beta}_i=(4x_i-x_{id}+2\dot{y}_{id}-\ddot{x}_{id},y_i-y_{id}-2\dot{x}_{id}-\ddot{y}_{id},-\ddot{z}_{id}-z_{id})^{\mathrm{T}}$。

因为 $\bar{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{d}}\geqslant\boldsymbol{0}$，且

$$\begin{aligned}\dot{\bar{H}}_{\mathrm{d}} &= \left[\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}}{\partial \bar{X}}\right]^{\mathrm{T}}[I_n \otimes(\bar{J}_{\mathrm{d}}-\bar{D}_{\mathrm{d}})]\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}}{\partial \bar{X}} \\ &= -\left[\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}}{\partial \bar{X}}\right]^{\mathrm{T}}(I_n \otimes D_{\mathrm{d}})\left[\frac{\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}}{\partial \bar{X}}\right] \leqslant 0 \end{aligned} \tag{39}$$

又因为 $\bar{X}=\bar{X}_{\mathrm{d}}$ 时,$\bar{H}_{\mathrm{d}}=\mathbf{0}$,因此包含在 $M=\{\bar{X}\in\mathbb{R}^{6n\times 6n} \mid [\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}/\partial \bar{X}]^{\mathrm{T}}(I_n\otimes \bar{D}_{\mathrm{d}})\partial \bar{H}_{\mathrm{d}}/\partial \bar{X}=\mathbf{0}\}$ 中的闭环系统最大不变集等于 $\{\bar{X}_{\mathrm{d}}\}$,根据引理 3 可知此闭环系统渐进稳定。

4　数值仿真

本节分别给出了广义正则变换和 IDA-PBC 算法设计的控制律进行航天器编队构型控制的数值仿真实例,主要用于验证 7 个航天器编队相对距离轨迹跟踪以及运动构型保持控制。设航天器在高度为 600 km 的近地圆参考轨道上的参考点(半长轴为 6 978 km,偏心率为 0,轨道倾角为 π/6,升交点赤经为 π/3,纬度幅角为 0,真近点角为 0)附近运行,计算出参考轨道的轨道角速度为 $\omega=1.083\ 1\times10^{-3}$ rad/s,设置仿真步长为 0.1 s,数值仿真中采用 ODE45 函数求解微分方程,相对精度设置为 10^{-8},绝对精度设置为 10^{-9}。

仿真中,考虑了非线性和地球非球形的 J_2 项摄动的影响。在仿真计算的每个时间步,先将各航天器在地心惯性坐标系中的绝对运动状态转换到参考点的 Euler-Hill 坐标系中,然后基于 Euler-Hill 坐标系的相对运动状态应用提出的控制律计算各航天器的控制加速度。7 个航天器按表 1 所示生成位于 Euler-Hill 坐标系 $X-Y-Z$ 平面内的编队运动构型,并要求 7 个航天器保持此编队构型在期望的相对运动轨迹上稳定飞行。分别对航天器领导 - 跟随控制和分布式协调控制方法进行仿真计算,其中分布式协调控制采用固定的网络拓扑结构,其拓扑结构图的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

领导 - 跟随控制采用式(21)的控制律,其中 $\bar{u}_i=-0.1\bar{y}_i, \beta_i(x_i,t)=(4x_i-x_{i\mathrm{d}}+2\dot{y}_{i\mathrm{d}}-\ddot{x}_{i\mathrm{d}}, y_i-y_{i\mathrm{d}}-2\dot{x}_{i\mathrm{d}}-\ddot{y}_{i\mathrm{d}}, -\ddot{z}_{i\mathrm{d}}-z_{i\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$,分布式协调控制采用式(38)的控制律,其中互联系数 $k_{\mathrm{p}}=0.02$,阻尼系数 $k_{\mathrm{d}}=0.5$。各航天器轨道初始角度 $\varphi_{i0}=298°$ 和期望角度 $\varphi_{i\mathrm{d}}=318°$,其他轨迹参数如表 1 所示。

表 1　各航天器初始和期望轨迹

Tab. 1　Initial and desired trajectories of each spacecraft

航天器序号	初始状态			期望状态		
	c_{i0}	b_{i0}	$\phi_{i0}/(°)$	$c_{i\mathrm{d}}$	$b_{i\mathrm{d}}$	$\phi_{i\mathrm{d}}/(°)$
1	0.8	0.8	40	0.8 + Δ	0.8 + Δ	40
2	0.8	0.8	20	0.8 + Δ	0.8 + Δ	20
3	1	1	50	1 + Δ	1 + Δ	50
4	1	1	30	1 + Δ	1 + Δ	30
5	1	1	10	1 + Δ	1 + Δ	10
6	1.2	1.2	40	1.2 + Δ	1.2 + Δ	40
7	1.2	1.2	20	1.2 + Δ	1.2 + Δ	20

注:仿真实例中取 Δ = 0.1。

数值仿真结果如图 1 ~ 4 所示,所有结果都在 Euler-Hill 坐标系中表示,分别给出了期望构型中 7 个航天器各自的跟踪轨迹、轨迹跟踪误差、相邻航天器之间轨迹跟踪误差和控制加速度。

图 1 给出了 7 个航天器的跟踪轨迹以及编队构型,图中 S_i 表示第 i 个航天器的轨迹,从图中可以看到,航天器编队轨迹跟踪过程中能保持稳定的构型。

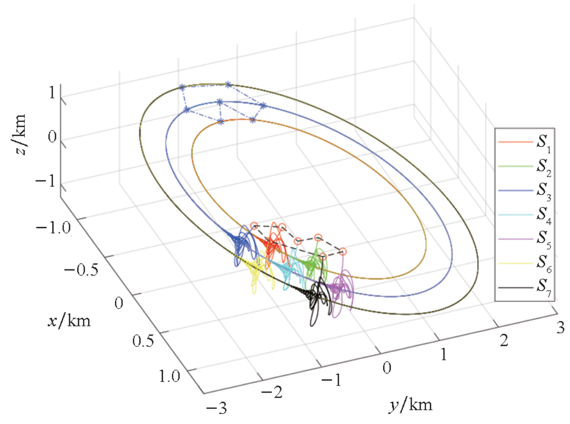
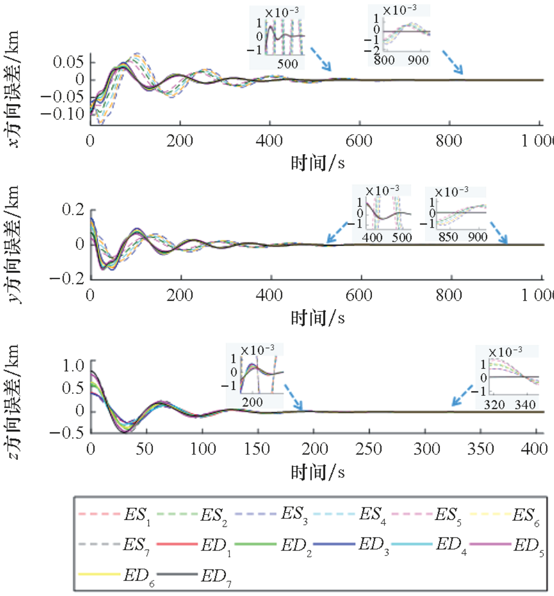


图 1　各航天器跟踪轨迹

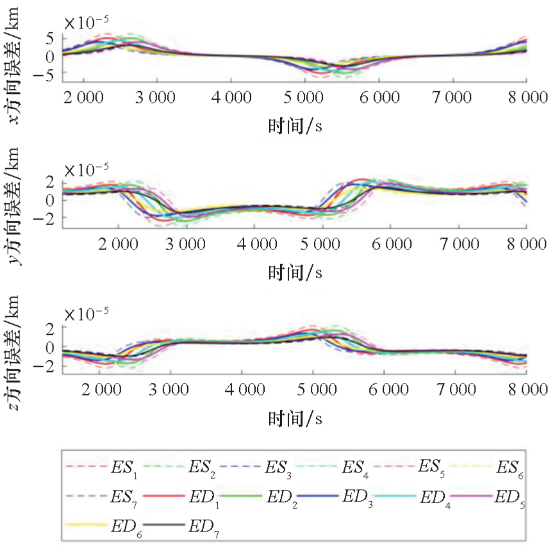
Fig. 1　Tracking trajectories of each spacecraft

图 2 给出了 7 个航天器分别采用分布式协调控制和领导 - 跟随控制时的轨迹误差,图中 ES_i 为第 i 个航天器采用领导 - 跟随控制律的轨迹误差,ED_i 为第 i 个航天器采用分布式协调控制律的轨迹误差。从图 2(a)显示结果可得,x 方向采用领导 - 跟随控制律误差收敛到 10^{-3} km 需要 800 s,而采用分布式协调控制律误差收敛到 10^{-3} km仅需要 480 s;y 方向采用领导 - 跟随控制律误差收敛到 10^{-3} km 需要 850 s,而采用分布式



（a）轨迹跟踪瞬态误差

（a） Transient error of trajectory tracking

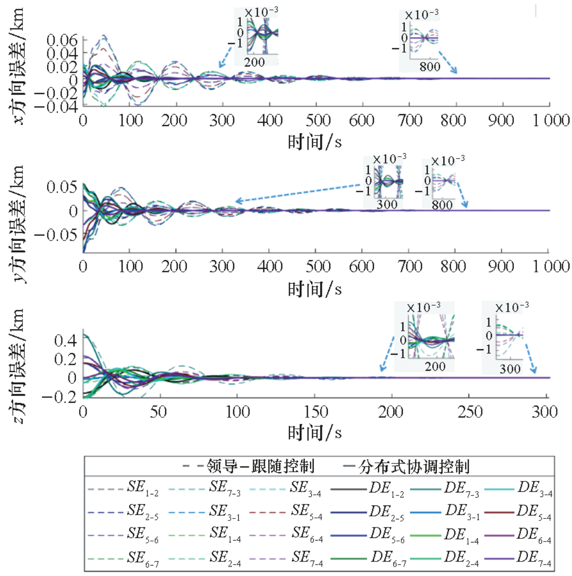


（b）轨迹跟踪稳态误差

（b） Steady-state error of trajectory tracking

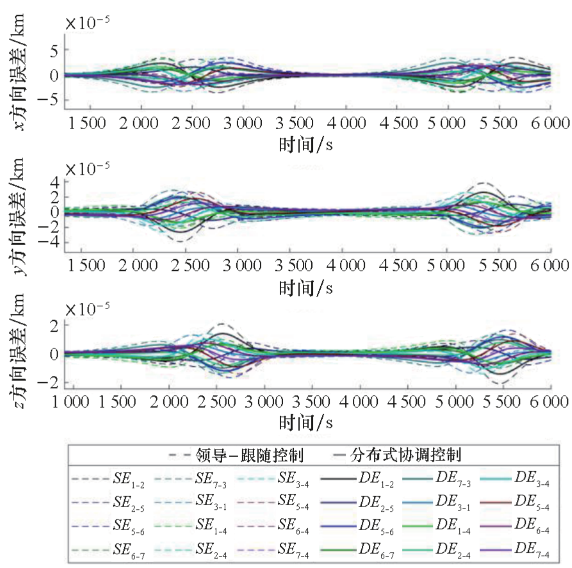
图 2　各航天器轨迹跟踪误差

Fig. 2　Trajectory tracking error of each spacecraft



（a）相邻航天器之间轨迹跟踪瞬态误差

（a） Transient errors of trajectory tracking between adjacent spacecraft



（b）相邻航天器之间轨迹跟踪稳态误差

（b） Steady-state error of trajectory tracking between adjacent spacecraft

图 3　相邻航天器之间轨迹跟踪误差

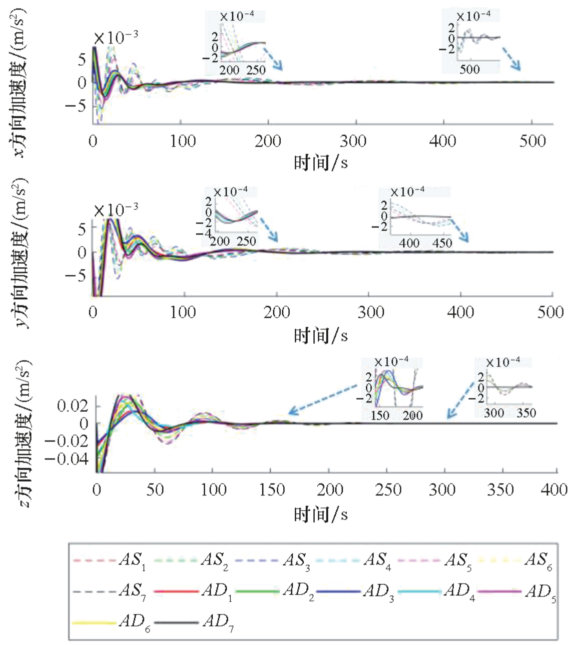
Fig. 3　Trajectory tracking error between adjacent spacecraft

协调控制律误差收敛到 10^{-3} km 仅需要 400 s；z 方向采用领导－跟随控制律误差收敛到 10^{-3} km需要 320 s，而采用分布式协调控制律误差收敛到 10^{-3} km 仅需要 200 s。由此可知，采用分布式协调控制律误差收敛速度更快。从图 2(b)显示结果可得，稳态下分布式协调控制的轨迹跟踪误差小于领导－跟随控制。

图 3 给出了 7 个航天器采用分布式协调控制和领导－跟随控制时相邻卫星之间的轨迹跟踪误差，图中 SE_{i-j} 为各航天器采用领导－跟随控制时第 i 个航天器与第 j 个航天器之间的相对轨迹误差，DE_{i-j} 为各航天器采用分布式协调控制时第 i 个航天器与第 j 个航天器之间的相对轨迹误差。从图 3(a)显示结果可得，在 x 方向采用领导－跟随控制律误差收敛到 10^{-3} km 需要 750 s，而采用分布式协调控制律误差收敛到 10^{-3} km 仅需要 200 s；在 y 方向采用领导－跟随控制律误差收敛到 10^{-3} km 需要 700 s，而采用分布式协调控制律误差收敛到 10^{-3} km 仅需要 300 s；在 z 方向采用领导－跟随控制律误差收敛到10^{-3} km

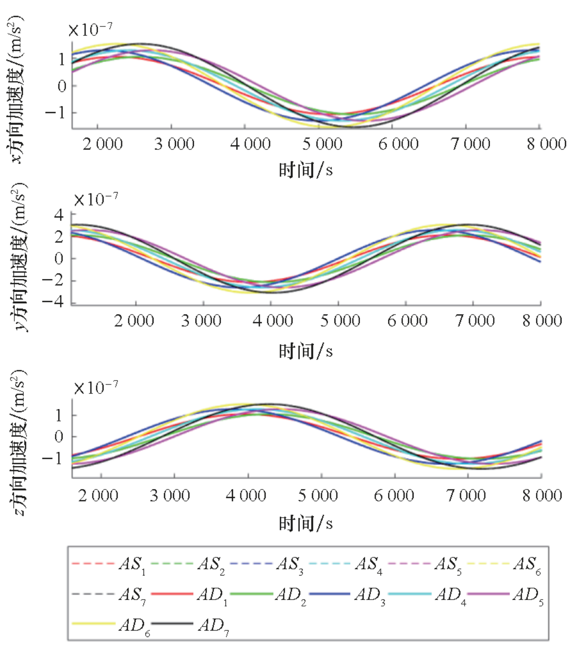
需要300 s，而采用分布式协调控制律误差收敛到 10^{-3} km 仅需要 200 s。由此可知，采用分布式协调控制律误差收敛速度更快。从图 3(b)显示结果可得，稳态时分布式协调控制误差小于领导 – 跟随控制误差。

图 4 给出了分布式协调控制和领导 – 跟随控制时对 7 个航天器分别施加的加速度，图中 AS_i 为各航天器采用领导 – 跟随控制律时第 i 个航天器所施加的加速度，AD_i 为各航天器采用分布式协调控制律时第 i 个航天器所施加的加速度。从图 4(a)显示结果可得，采用分布式协调控制时系统在 x 方向所施加的加速度收敛到 2×10^{-4} m/s^2 仅需要 200 s，而采用领导 – 跟随控制加速度收敛到 2×10^{-4} m/s^2 需要 500 s；y 方向所施加的加速度收敛到 2×10^{-4} m/s^2 仅需要 220 s，而采用领导 – 跟随控制加速度收敛到 2×10^{-4} m/s^2 需要 350 s；z 方向所施加的加速度收敛到2×10^{-4} m/s^2 仅需要 180 s，而采用领导 – 跟随控制加速度收敛到 2×10^{-4} m/s^2 需要 300 s。由此可知，采用分布式协调控制律加速度收敛速度更快。从图 4(b)显示结果可得，稳态下分布式协调控制的加速度和领导 – 跟随控制无明显差别。



(a) 各航天器施加的瞬态加速度

(a) Transient acceleration applied by each spacecraft



(b) 稳态时各航天器施加的加速度

(b) Steady acceleration applied by each spacecraft

图 4　各航天器施加的加速度变化

Fig. 4　Variation in acceleration applied by each spacecraft

5　结论

本文基于 PH 理论采用广义正则变换和 IDA-PBC 算法，研究了航天器编队轨迹跟踪控制问题。通过广义正则变换将航天器编队时变相对运动 PH 方程转换为轨迹跟踪误差 PH 方程，从而得到航天器编队领导 – 跟随构型轨迹跟踪控制律；在误差系统 PH 模型基础上，引入相对误差的期望 Hamiltonian 函数，根据 IDA-PBC 算法，设计出了分布式协调控制律。最后采用实例仿真验证了方法的有效性。仿真结果表明，编队航天器在本文设计的控制律作用下，能够准确、快速地达到期望的运动轨迹并保持构型。相比领导 – 跟随控制律，采用分布式协调控制律跟踪误差收敛速度更快，相邻航天器之间轨迹跟踪稳态误差更小，因此分布式协调控制律更适合于航天器编队轨迹跟踪控制。文中基于 PH 理论对航天器编队轨道跟踪控制问题进行了初步探索，为 PH 理论在航天器编队控制领域的应用打下了基础，但采用的动力学模型是线性化模型，后续还需要研究基于航天器非线性动力学模型及考虑 J_2 摄动的编队轨迹跟踪控制方法。

参考文献(References)

[1] SUN J, LI S, HUANG J, et al. Robust coordinated control for large flexible spacecraft based on consensus theory[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(9): 5359 – 5379.

[2] 殷泽阳, 邢友朋, 韩飞, 等. 编队航天器协同绕飞非合作目标的全驱预设性能控制[J]. 航空学报, 2024, 45(1): 79 – 93.
YIN Z Y, XING Y P, HAN F, et al. Fully-actuated prescribed performance control of spacecraft formation for flying cooperatively around non-cooperative target[J]. Acta

Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(1): 79 – 93. (in Chinese)

[3] 刘幸川, 陈丹鹤, 徐根, 等. 利用凸优化方法的多航天器编队重构轨迹规划[J]. 宇航学报, 2023, 44(6): 934 – 945.
LIU X C, CHEN D H, XU G, et al. Trajectory planning of multi-spacecraft formation reconfiguration using convex optimization method [J]. Journal of Astronautics, 2023, 44(6): 934 – 945. (in Chinese)

[4] 周立凡. 编队飞行航天器合围控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.
ZHOU L F. Research on formation flying spacecraft enclosing control[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2022. (in Chinese)

[5] 赵磊, 袁长清, 龚胜平, 等. 混合推进航天器行星悬浮轨道附近编队构型保持研究[J]. 空间控制技术与应用, 2022, 48(2): 39 – 46.
ZHAO L, YUAN C Q, GONG S P, et al. Hybrid propulsion spacecraft formation maintaining around a planet-centered displaced orbit [J]. Aerospace Control and Application, 2022, 48(2): 39 – 46. (in Chinese)

[6] 杨希祥, 杨涛, 张为华. 基于循环追踪算法的编队航天器交会控制[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(1): 1 – 5.
YANG X X, YANG T, ZHANG W H. Rendezvous control of spacecraft formation based on cyclic pursuit algorithm [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(1): 1 – 5. (in Chinese)

[7] DUINDAM V, MACCHELLI A, STRAMIGIOLI S, et al. Modeling and control of complex physical systems: the port-Hamiltonian approach[M]. Berlin: Springer, 2009.

[8] BRUGNOLI A, RASHAD R, CALIFANO F, et al. Mixed finite elements for port-Hamiltonian models of von Kármán beams[J]. IFAC-PapersOnLine, 2021, 54(19): 186 – 191.

[9] JAVANMARDI N, BORJA P, YAZDANPANAH M J, et al. Distributed formation control of networked mechanical systems[J]. IFAC-PapersOnLine, 2022, 55(13): 294 – 299.

[10] JAVANMARDI N, YAGHMAEI A, YAZDANPANAH M J. Spacecraft formation flying in the port-Hamiltonian framework[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(4): 2765 – 2783.

[11] VOS E, SCHERPEN J M A, VAN DER SCHAFT A J. Equal distribution of satellite constellations on circular target orbits[J]. Automatica, 2014, 50(10): 2641 – 2647.

[12] GUO Y Q, CHENG D Z. Stabilization of time-varying Hamiltonian systems [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(5): 871 – 880.

[13] FUJIMOTO K, SUGIE T. Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems[J]. Systems & Control Letters, 2001, 42(3): 217 – 227.

[14] FUJIMOTO K, SAKURAMA K, SUGIE T. Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations[J]. Automatica, 2003, 39(12): 2059 – 2069.

[15] ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A J, MAREELS I, et al. Putting energy back in control [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(2): 18 – 33.

[16] TSOLAKIS A, KEVICZKY T. Distributed IDA-PBC for a class of nonholonomic mechanical systems [J]. IFAC-PapersOnLine, 2021, 54(14): 275 – 280.

[17] VAN DER SCHAFT A, JELTSEMA D. Port-Hamiltonian systems theory: an introductory overview [M]. New York: Now Publishers, 2014.

[18] ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A, MASCHKE B, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems [J]. Automatica, 2002, 38(4): 585 – 596.

[19] ORTEGA R, GARCÍA-CANSECO E. Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey [J]. European Journal of Control, 2004, 10(5): 432 – 450.

[20] ALFRIEND K T, VADALI S R, GURFIL P, et al. Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation[M]. Amsterdam: Elsevier, 2010.

[21] GODSIL C, ROYLE G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.